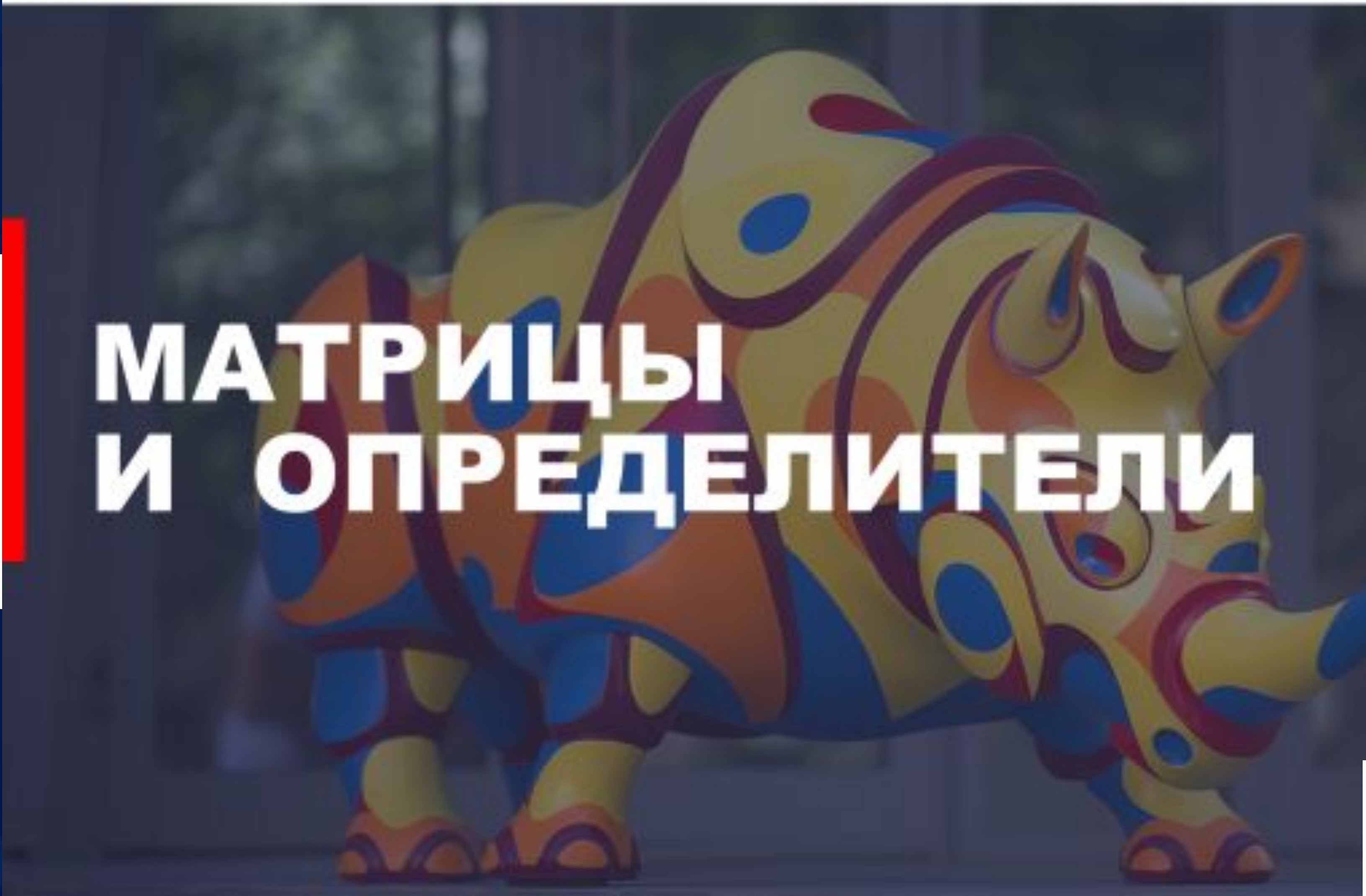
УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ | БОЛЬШЕ ЧЕМ ОБРАЗОВАНИЕ



МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

<u>Определитель</u> – это число, которое вычисляется по формулам, схемам и правилам.

Обозначается:

D $\quad |A| \quad \Delta \quad \det A$

Определителем первого порядка матрицы

$$A=(a_{11})$$

называется число a_{11}

То есть: $\boxed{|A|=|a_{11}|=a_{11}}$

Определителем второго порядка называется число, которое определяется по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ

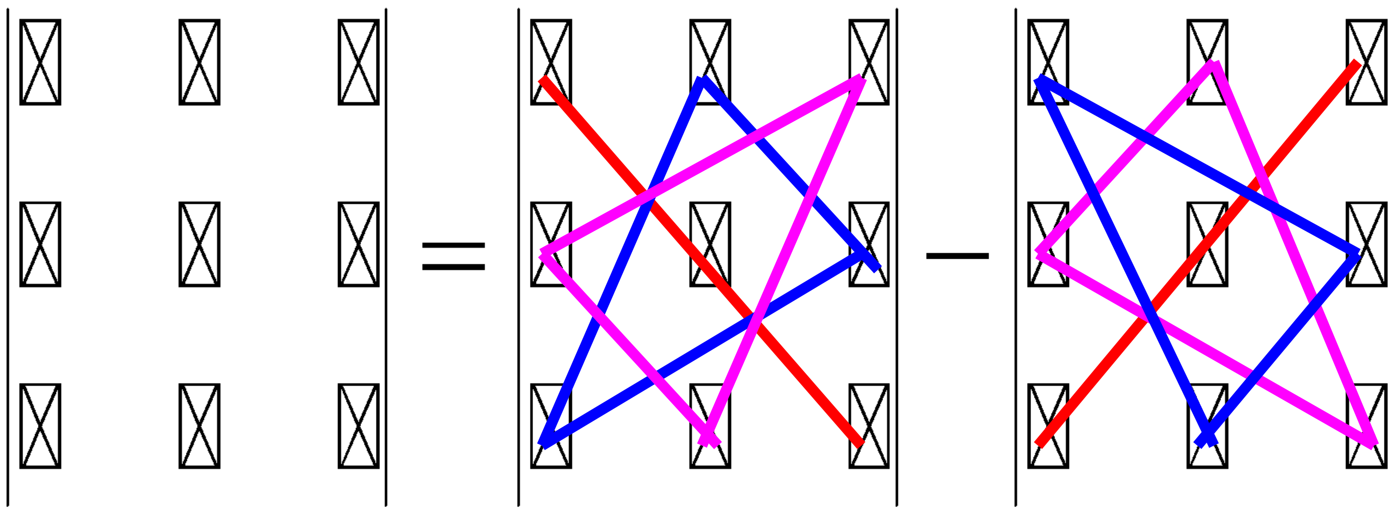
<u>Определителем третьего порядка</u> называется число, которое определяется по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} -$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$$

1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

Для вычисления определителей третьего порядка удобно пользоваться <u>правилом треугольников</u>:



Пример.

Вычислить определители матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-3) \cdot 2 = 11$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 5$$

1.2. Определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Минором M_{ij} **элемента** a_{ij} **определителя D называется такой новый определитель, полученный из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.**

Минор элемента определителя a_{ij} **обозначается как** M_{ij}

1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ

Алгебраическим дополнением

элемента a_{ij} определителя D называется минор M_{ij} этого элемента, умноженный на $(-1)^s$, где $S=i+j$ - сумме индексов $i+j$.

Обозначают: A_{ij}

$$\boxed{\begin{gathered} A_{ij} = (-1)^S M_{ij} \\ S = i + j \end{gathered}}$$

В частности, минор элемента a_{11}

определителя третьего порядка найдется по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Его алгебраическое дополнение:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$$

Свойства определителе

1

Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

$$\boxed{\left|A\right| = \left|A^T\right|}$$

Например:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$|B^T| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 1 - 1 + 4 - 1 = 5$$

2

При перестановке двух строк или столбцов определитель изменит свой знак на противоположный.

Например:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

Меняем местами первую и вторую строки:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4+1+1+1-2-2 = -5$$

1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

3

Если определитель имеет две одинаковые строки или столбца, то он равен нулю.

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 + 12 - 12 - 4 + 4 = 0$$

4

Общий множитель строки или столбца можно выносить за знак определителя.

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-2+2-2+4-2=4$$

Выносим из второй строки множитель 2:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(2-1+1-1+2-1) = 2\cdot 2 = 4$$

5

Определитель не изменится, если к элементам одной строки или столбца прибавить соответственные элементы другой строки или столбца, умноженные на одно и то же число.

Например:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

Первую строку умножаем на 2 и складываем со второй:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 3 + 4 + 1 + 8 - 3 = 5$$

6

Треугольный определитель, у которого все элементы, лежащие выше (или ниже) главной диагонали- нули, равен произведению элементов главной диагонали.

УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ

Например:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

7

Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на их алгебраические дополнения:

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}$$

Пример.

Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение:

Раскладываем определитель по третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{32} + 1 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{34} = A_{32} + A_{33}$$

=

Находим алгебраические дополнения:

1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3+6+16-24-3-4) = 6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2+4+12-16-2-3 = -3$$

Подставляем полученный результат:

$$= 6 + (-3) = 3$$

Вывод:
Способы вычисления определителя.

1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

1

1. *Определители второго и третьего порядка вычисляют по схемам.*

2

2. Определитель можно вычислить с помощью его разложения по элементам строки или столбца (свойство 7).

3

3. Определитель можно вычислить способом приведения его к треугольному виду.

Этот способ основан на том, что по свойству 6, треугольный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

Чтобы получить треугольный определитель, надо, по свойству 5 к какой-либо строке или столбцу определителя

1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, умноженные на одно и тоже число, до тех пор, пока не придем к определителю треугольного вида.

Вычислить определитель:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Вычитая первую строку из всех остальных, сразу получим определитель треугольного вида:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot(-2)(-2)(-2)=-8.$$

Практикум 2.1 Определители

1. Вычислить определители:

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\Delta = \begin{vmatrix} 10 & -14 \\ -6 & 21 \end{vmatrix}$;

1. 2. Вычислить определители третьего порядка разными способами(треугольников, полосочками и по свойству 6)

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; $б) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$; $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} =$

1. 3. Вычислить определители, используя разложение по 1 строке или 2-му столбцу, свойства определителей:

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$;

Практикум 2.2 Определители

1. Вычислить значение определителя различными способами (разложение по 2 строке, 2 столбцу и приведением к треугольному виду)

для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ - любой способ

3. Вычислить определители матриц (любой способ): а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;