

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ



1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

Определитель – это число,
 которое вычисляется по
 формулам,
 схемам и правилам.

Обозначается:

D $|A|$ Δ $\det A$



Определителем первого порядка матрицы

$$A = (a_{11})$$

называется число a_{11}

То есть:

$$|A| = |a_{11}| = a_{11}$$



Определителем второго порядка
называется число, которое
определяется по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

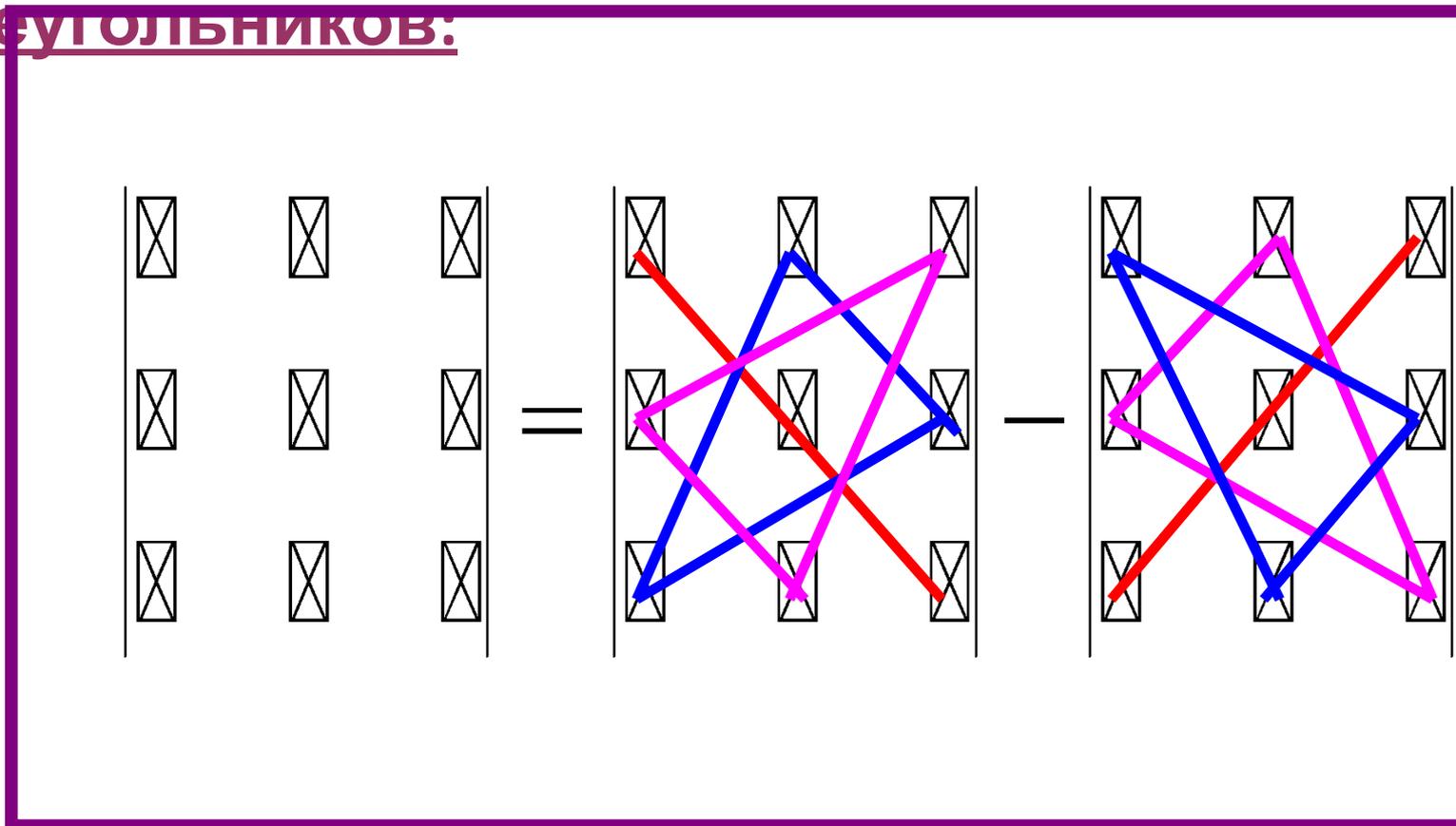


Определителем третьего порядка
называется число, которое
определяется по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$



Для вычисления определителей третьего порядка удобно пользоваться правилом треугольников:



Пример.

Вычислить определители матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

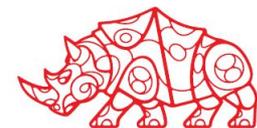


Решение:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-3) \cdot 2 = 11$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 5$$



Минором элемента определителя

M_{ij} D a_{ij}
называется такой **новый**
определитель,
полученный из данного определителя
вычеркиванием строки и столбца,
на пересечении которых стоит
данный элемент.

Минор элемента определителя a_{ij}
обозначается как M_{ij}



Алгебраическим дополнением
элемента a_{ij} определителя D
называется минор M_{ij} этого элемента,
умноженный на $(-1)^S$, где $S=i+j$ - сумме
индексов $i+j$.

Обозначают: A_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^S M_{ij}$$

$$S = i + j$$



В частности, минор элемента a_{11} определителя третьего порядка найдется по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Его алгебраическое дополнение:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$$



Свойства определителя

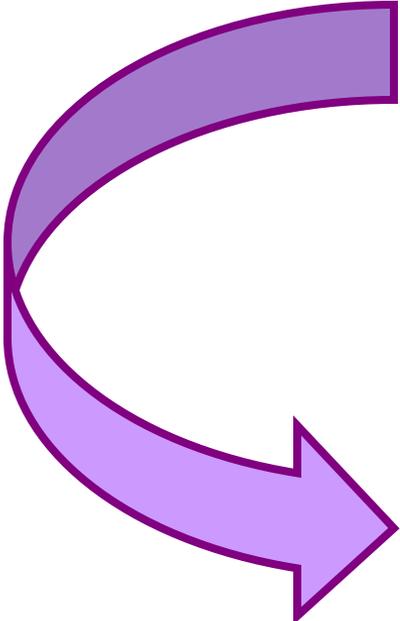
1

Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

$$|A| = |A^T|$$



Например:


$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$|B^T| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 1 - 1 + 4 - 1 = 5$$



2

*При перестановке двух строк
или столбцов определитель
изменит свой знак на
противоположный.*



Например:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

Меняем местами первую и вторую строки:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 1 + 1 + 1 - 2 - 2 = -5$$



3

Если определитель имеет две одинаковые строки или столбца, то он равен нулю.



Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 + 12 - 12 - 4 + 4 = 0$$



4

Общий множитель строки или столбца можно выносить за знак определителя.



Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 2 - 2 + 4 - 2 = 4$$

Выносим из второй строки множитель 2:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (2 - 1 + 1 - 1 + 2 - 1) = 2 \cdot 2 = 4$$



5

Определитель не изменится, если к элементам одной строки или столбца прибавить соответственные элементы другой строки или столбца, умноженные на одно и то же число.



Например:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

Первую строку умножаем на 2 и складываем со второй:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 3 + 4 + 1 + 8 - 3 = 5$$



6

Треугольный определитель, у которого все элементы, лежащие выше (или ниже) главной диагонали- нули, равен произведению элементов главной диагонали.



Например:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$



Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на их алгебраические дополнения:

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik}$$



Пример.

Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$



Решение:

Раскладываем определитель по третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{32} + 1 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{34} = A_{32} + A_{33} \quad \diamond =$$

Находим алгебраические дополнения:



$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3 + 6 + 16 - 24 - 3 - 4) = 6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 12 - 16 - 2 - 3 = -3$$

Подставляем полученный результат:

$$\diamond = 6 + (-3) = 3$$





***Вывод:
Способы вычисления определителя.***



1

- 1. Определители второго и третьего порядка вычисляются по схемам.*



2

2. *Определитель можно вычислить с помощью его разложения по элементам строки или столбца (свойство 7).*



3

**3. *Определитель можно
вычислить
способом приведения его
к треугольному виду.***



Этот способ основан на том, что по свойству 6, треугольный определитель равен произведению элементов главной диагонали.



Чтобы получить треугольный определитель, надо, по свойству 5 к какой-либо строке или столбцу определителя



*прибавить соответствующие
элементы другой строки или
столбца, умноженные на одно и
тоже*

*число, до тех пор, пока не придем к
определителю треугольного вида.*



Вычислить определитель:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Вычитая первую строку из всех остальных, сразу получим определитель треугольного вида:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2)(-2)(-2) = -8.$$



Практикум 2.1 Определители

1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \Delta = \begin{vmatrix} 10 & -14 \\ -6 & 21 \end{vmatrix};$$

1. 2. Вычислить определители третьего порядка разными способами (треугольников, полосочками и по свойству б)

$$\text{a) } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}; \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} =$$

1. 3. Вычислить определители, используя разложение по 1 строке или 2-му столбцу, свойства определителей:

$$\text{a) } \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix};$$



Практикум 2.2 Определители

1. Вычислить значение определителя различными способами (разложение по 2 строке, 2 столбцу и приведением к треугольному виду)

для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ - любой способ

3. Вычислить определители матриц (любой способ): а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

