

## Центральные и вписанные углы

### Определения

Центральный угол – это угол, вершина которого лежит в центре окружности.

Вписанный угол – это угол, вершина которого лежит на окружности.

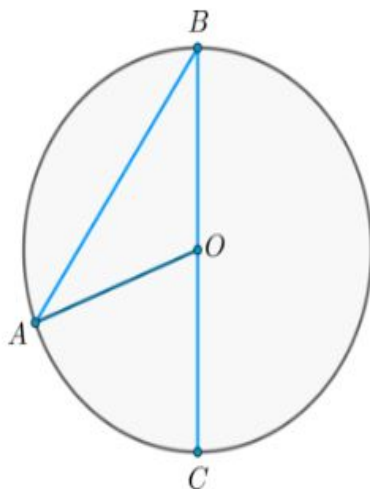
Градусная мера дуги окружности – это градусная мера центрального угла, который на неё опирается.

### Теорема

Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

### Доказательство

Доказательство проведём в два этапа: сначала докажем справедливость утверждения для случая, когда одна из сторон вписанного угла содержит диаметр. Пусть точка  $B$  – вершина вписанного угла  $ABC$  и  $BC$  – диаметр окружности.



Треугольник  $AOB$  – равнобедренный,  $AO = OB$ ,  $\angle AOC$  – внешний, тогда  $\angle AOC = \angle OAB + \angle ABO = 2\angle ABC$ , откуда  $\angle ABC = 0,5 \cdot \angle AOC = 0,5 \cdot \overset{\frown}{AC}$ .

Теперь рассмотрим произвольный вписанный угол  $ABC$ . Проведём диаметр окружности  $BD$  из вершины вписанного угла. Возможны два случая:

1) диаметр разрезал угол на два угла  $\angle ABD$ ,  $\angle CBD$  (для каждого из которых теорема верна по доказанному выше, следовательно верна и для исходного угла, который является суммой этих двух и значит равен полусумме дуг, на которые они опираются, то есть равен половине дуги, на которую он опирается). Рис. 1.

2) диаметр не разрезал угол на два угла, тогда у нас появляется ещё два новых вписанных угла  $\angle ABD$ ,  $\angle CBD$ , у которых сторона содержит диаметр, следовательно, для них теорема верна, тогда верна и для исходного угла (который равен разности этих двух углов, значит, равен полуразности дуг, на которые они опираются, то есть равен половине дуги, на которую он опирается). Рис. 2.

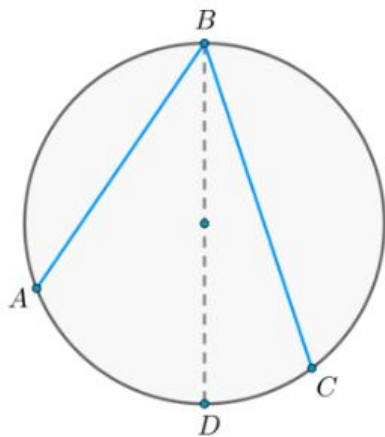


рис. 1

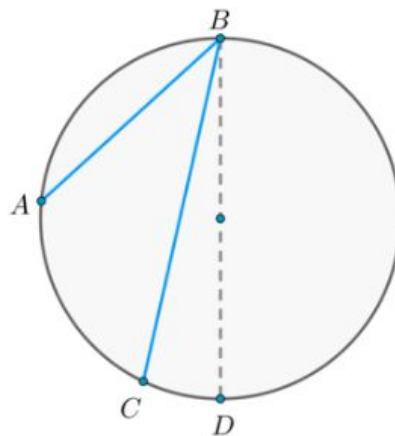


рис. 2

## Следствия

1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
2. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, прямой.
3. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

# Касательная к окружности

## Определения

Существует три типа взаимного расположения прямой и окружности:

1) прямая  $a$  пересекает окружность в двух точках. Такая прямая называется секущей. В этом случае расстояние  $d$  от центра окружности до прямой меньше радиуса  $R$  окружности (рис. 3).

2) прямая  $b$  пересекает окружность в одной точке. Такая прямая называется касательной, а их общая точка  $B$  – точкой касания. В этом случае  $d = R$  (рис. 4).

3) прямая  $c$  не имеет общих точек с окружностью (рис. 5).

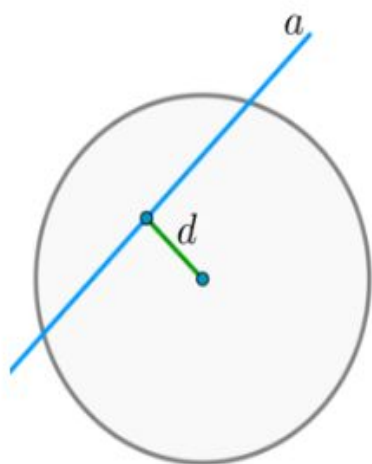


рис. 3

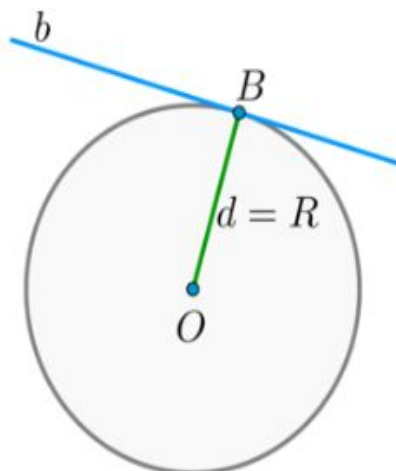


рис. 4

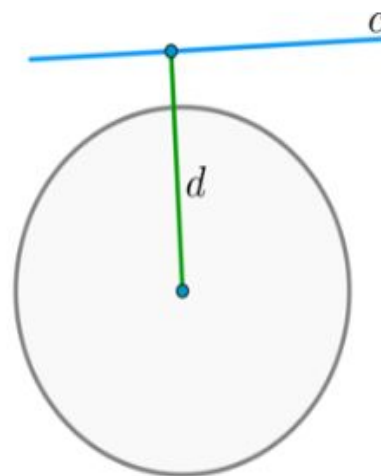


рис. 5

**Теорема**

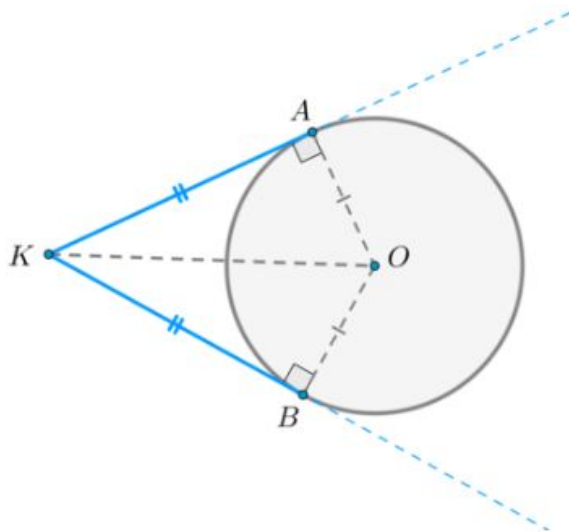
1. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
2. Если прямая проходит через конец радиуса окружности и перпендикулярна этому радиусу, то она является касательной к окружности.

**Следствие**

Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны.

**Доказательство**

Проведем к окружности из точки  $K$  две касательные  $KA$  и  $KB$ :



Значит,  $OA \perp KA$ ,  $OB \perp KB$  как радиусы. Прямоугольные треугольники  $\triangle KAO$  и  $\triangle KBO$  равны по катету и гипотенузе, следовательно,  $KA = KB$ .

~

**Следствие**

Центр окружности  $O$  лежит на биссектрисе угла  $AKB$ , образованного двумя касательными, проведенными из одной точки  $K$ .

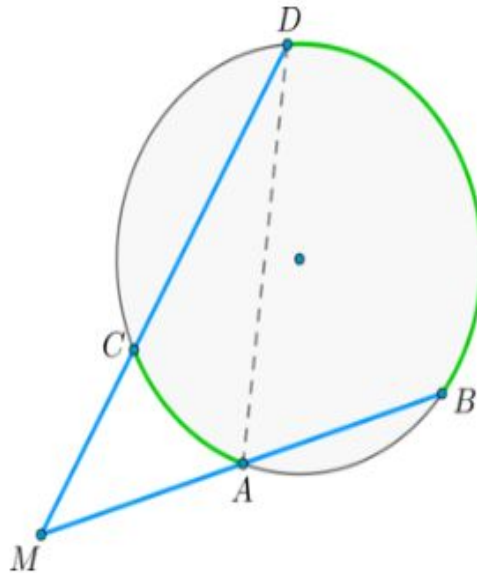
# Теоремы, связанные с углами

## Теорема об угле между секущими

Угол между двумя секущими, проведенными из одной точки, равен полуразности градусных мер большей и меньшей высекаемых ими дуг.

### Доказательство

Пусть  $M$  – точка, из которой проведены две секущие как показано на рисунке:



Покажем, что  $\angle DMB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{CA})$ .

$\angle DAB$  – внешний угол треугольника  $MAD$ , тогда  $\angle DAB = \angle DMB + \angle MDA$ , откуда  $\angle DMB = \angle DAB - \angle MDA$ , но углы  $\angle DAB$  и  $\angle MDA$  – вписанные, тогда  $\angle DMB = \angle DAB - \angle MDA = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BD} - \frac{1}{2} \overset{\frown}{CA} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{CA})$ , что и требовалось доказать.

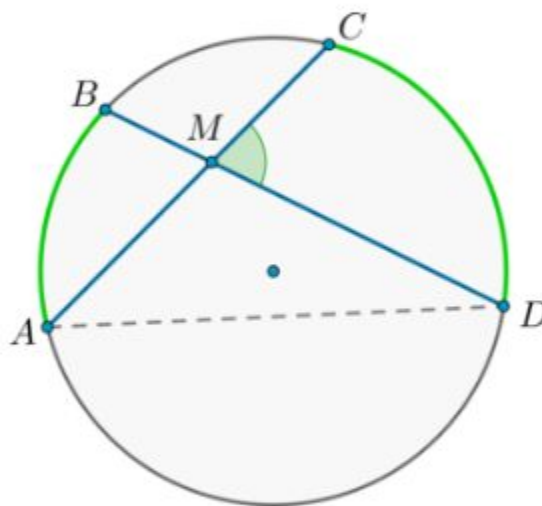
### Теорема об угле между пересекающимися хордами

Угол между двумя пересекающимися хордами равен полусумме градусных мер высекаемых ими дуг:

$$\angle CMD = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD})$$

#### Доказательство

$\angle BMA = \angle CMD$  как вертикальные.



Из треугольника  $AMD$ :  $\angle AMD = 180^\circ - \angle BDA - \angle CAD = 180^\circ - \frac{1}{2} \overset{\frown}{AB} - \frac{1}{2} \overset{\frown}{CD}$ .

Но  $\angle AMD = 180^\circ - \angle CMD$ , откуда заключаем, что

$$\angle CMD = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{CD} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}).$$

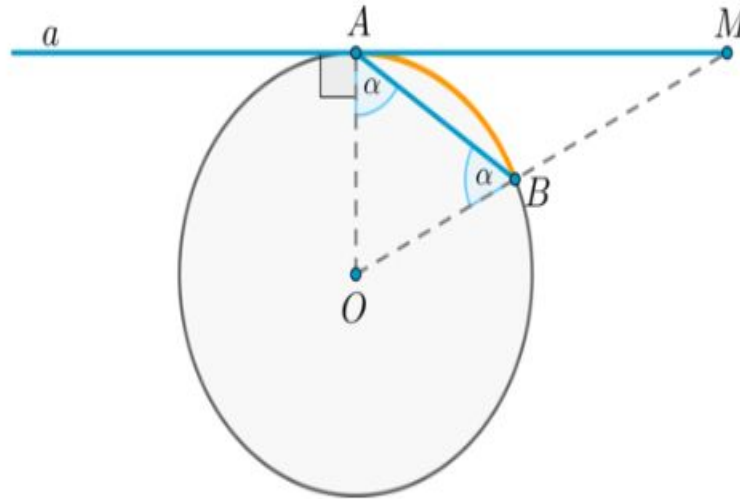


### Теорема об угле между хордой и касательной

Угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, равен половине градусной меры дуги, стягиваемой хордой.

#### Доказательство

Пусть прямая  $a$  касается окружности в точке  $A$ ,  $AB$  – хорда этой окружности,  $O$  – её центр. Пусть прямая, содержащая  $OB$ , пересекает  $a$  в точке  $M$ . Докажем, что  $\angle BAM = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{AB}$ .



Обозначим  $\angle OAB = \alpha$ . Так как  $OA$  и  $OB$  – радиусы, то  $OA = OB$  и  $\angle OBA = \angle OAB = \alpha$ . Таким образом,  $\overset{\frown}{AB} = \angle AOB = 180^\circ - 2\alpha = 2(90^\circ - \alpha)$ .

Так как  $OA$  – радиус, проведённый в точку касания, то  $OA \perp a$ , то есть  $\angle OAM = 90^\circ$ , следовательно,  $\angle BAM = 90^\circ - \angle OAB = 90^\circ - \alpha = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{AB}$ .



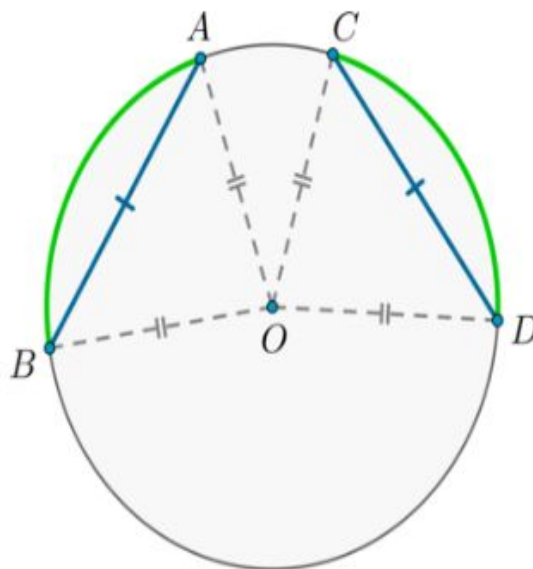
### Теорема о дугах, стягиваемых равными хордами

Равные хорды стягивают равные дуги, меньшие полуокружности.

И наоборот: равные дуги стягиваются равными хордами.

### Доказательство

1) Пусть  $AB = CD$ . Докажем, что меньшие полуокружности дуги  $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ .



$\triangle AOB = \triangle COD$  по трем сторонам, следовательно,  $\angle AOB = \angle COD$ . Но т.к.  $\angle AOB, \angle COD$  — центральные углы, опирающиеся на дуги  $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{CD}$  соответственно, то  $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ .

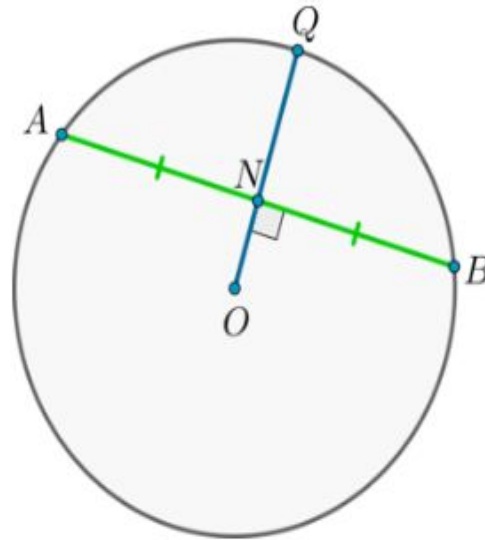
2) Если  $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ , то  $\triangle AOB = \triangle COD$  по двум сторонам  $AO = BO = CO = DO$  и углу между ними  $\angle AOB = \angle COD$ . Следовательно, и  $AB = CD$ .



### Теорема

Если радиус делит хорду пополам, то он ей перпендикулярен.

Верно и обратное: если радиус перпендикулярен хорде, то точкой пересечения он делит ее пополам.



### Доказательство

1) Пусть  $AN = NB$ . Докажем, что  $OQ \perp AB$ .

Рассмотрим  $\triangle AOB$ : он равнобедренный, т.к.  $OA = OB$  – радиусы окружности. Т.к.  $ON$  – медиана, проведенная к основанию, то она также является и высотой, следовательно,  $ON \perp AB$ .

2) Пусть  $OQ \perp AB$ . Докажем, что  $AN = NB$ .

Аналогично  $\triangle AOB$  – равнобедренный,  $ON$  – высота, следовательно,  $ON$  – медиана. Следовательно,  $AN = NB$ .

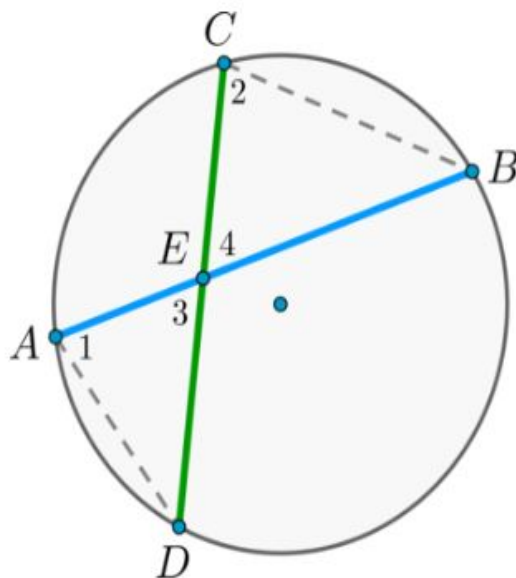
# Теоремы, связанные с длинами отрезков

## Теорема о произведении отрезков хорд

Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

### Доказательство

Пусть хорды  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $E$ .



Рассмотрим треугольники  $ADE$  и  $CBE$ . В этих треугольниках углы 1 и 2 равны, так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу  $BD$ , а углы 3 и 4 равны как вертикальные. Треугольники  $ADE$  и  $CBE$  подобны (по первому признаку подобия треугольников).

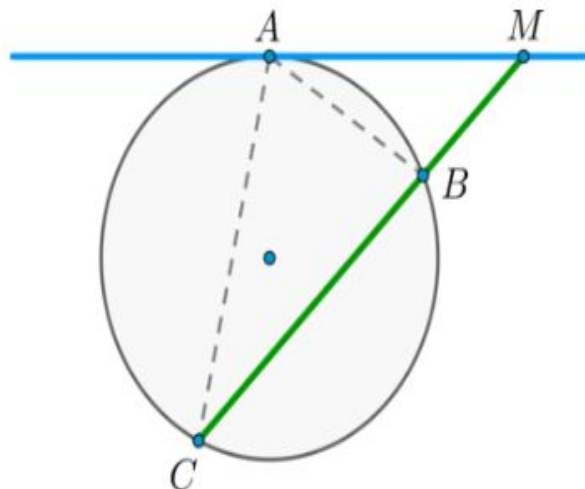
Тогда  $\frac{AE}{EC} = \frac{DE}{BE}$ , откуда  $AE \cdot BE = CE \cdot DE$ .

### Теорема о касательной и секущей

Квадрат отрезка касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть.

#### Доказательство

Пусть касательная проходит через точку  $M$  и касается окружности в точке  $A$ . Пусть секущая проходит через точку  $M$  и пересекает окружность в точках  $B$  и  $C$  так что  $MB < MC$ . Покажем, что  $MB \cdot MC = MA^2$ .

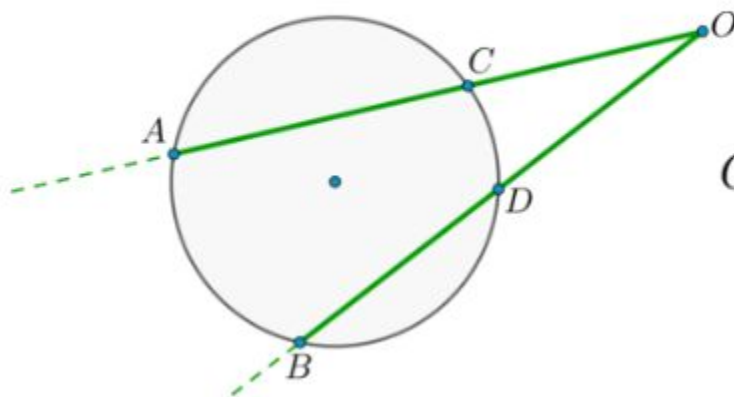


Рассмотрим треугольники  $MBA$  и  $MCA$ :  $\angle M$  – общий,  $\angle BCA = 0,5 \cdot \overset{\frown}{AB}$ . По теореме об угле между касательной и секущей,  $\angle BAM = 0,5 \cdot \overset{\frown}{AB} = \angle BCA$ . Таким образом, треугольники  $MBA$  и  $MCA$  подобны по двум углам.

Из подобия треугольников  $MBA$  и  $MCA$  имеем:  $\frac{MB}{MA} = \frac{MA}{MC}$ , что равносильно  $MB \cdot MC = MA^2$ .

**Следствие**

Произведение секущей, проведённой из точки  $O$ , на её внешнюю часть не зависит от выбора секущей, проведённой из точки  $O$ :



$$OA \cdot OC = OB \cdot OD$$