Окружность. Основные теоремы

Центральные и вписанные углы

Определения

Центральный угол – это угол, вершина которого лежит в центре окружности.

Вписанный угол – это угол, вершина которого лежит на окружности.

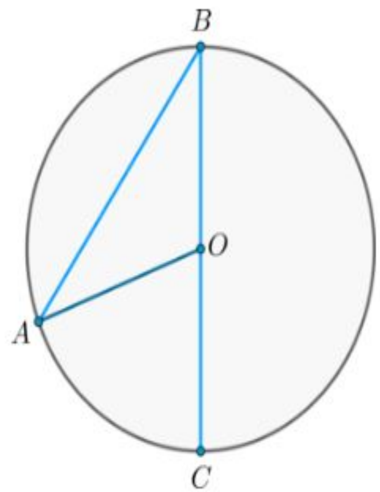
Градусная мера дуги окружности – это градусная мера центрального угла, который на неё опирается.

Теорема

Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

Доказательство

Доказательство проведём в два этапа: сначала докажем справедливость утверждения для случая, когда одна из сторон вписанного угла содержит диаметр. Пусть точка B – вершина вписанного угла ABC и BC – диаметр окружности:



Треугольник AOB – равнобедренный, $AO = OB$, $\angle AOC$ – внешний, тогда $\angle AOC = \angle OAB + \angle ABO = 2\angle ABC$, откуда $\angle ABC = 0,5 \cdot \angle AOC = 0,5 \cdot \smile{AC}$.

Теперь рассмотрим произвольный вписанный угол ABC. Проведём диаметр окружности BD из вершины вписанного угла. Возможны два случая:

1) диаметр разрезал угол на два угла $\angle ABD, \angle CBD$ (для каждого из которых теорема верна по доказанному выше, следовательно верна и для исходного угла, который является суммой этих двух и значит равен полусумме дуг, на которые они опираются, то есть равен половине дуги, на которую он опирается). Рис. 1.

2) диаметр не разрезал угол на два угла, тогда у нас появляется ещё два новых вписанных угла $\angle ABD, \angle CBD$, у которых сторона содержит диаметр, следовательно, для них теорема верна, тогда верна и для исходного угла (который равен разности этих двух углов, значит, равен полуразности дуг, на которые они опираются, то есть равен половине дуги, на которую он опирается). Рис. 2.

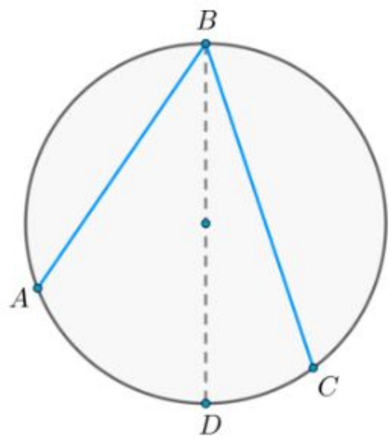


рис. 1

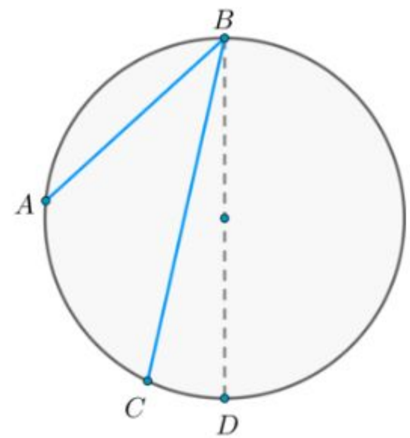


рис. 2

Следствия

1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

2. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, прямой.

3. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Касательная к окружности

Определения

Существует три типа взаимного расположения прямой и окружности:

1) прямая a пересекает окружность в двух точках. Такая прямая называется секущей. В этом случае расстояние d от центра окружности до прямой меньше радиуса R окружности (рис. 3).

2) прямая b пересекает окружность в одной точке. Такая прямая называется касательной, а их общая точка B – точкой касания. В этом случае $d = R$ (рис. 4).

3) прямая c не имеет общих точек с окружностью (рис. 5).

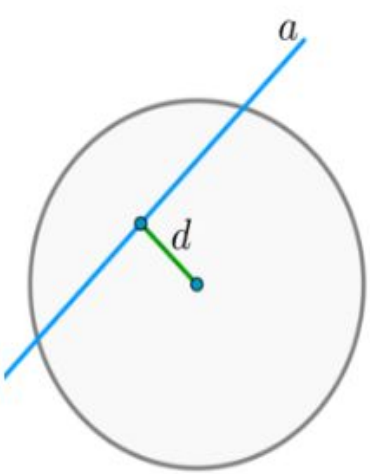


рис. 3

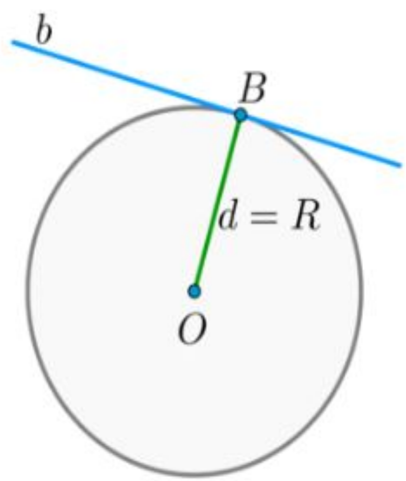


рис. 4

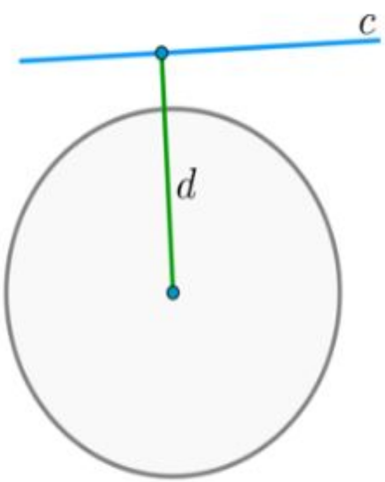


рис. 5

Теорема

1. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

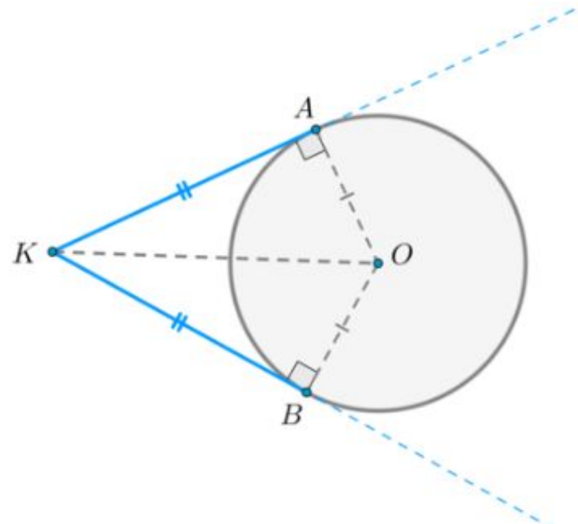
2. Если прямая проходит через конец радиуса окружности и перпендикулярна этому радиусу, то она является касательной к окружности.

Следствие

Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны.

Доказательство

Проведем к окружности из точки K две касательные KA и KB:



Значит, $OA \perp KA, OB \perp KB$ как радиусы. Прямоугольные треугольники $\triangle KAO$ и $\triangle KBO$ равны по катету и гипотенузе, следовательно, $KA = KB$.

Следствие

Центр окружности O лежит на биссектрисе угла AKB, образованного двумя касательными, проведенными из одной точки K.

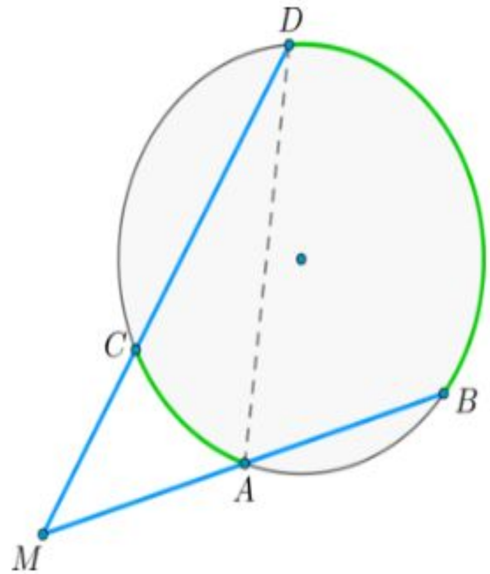
Теоремы, связанные с углами

Теорема об угле между секущими

Угол между двумя секущими, проведенными из одной точки, равен полуразности градусных мер большей и меньшей высекаемых ими дуг.

Доказательство

Пусть M – точка, из которой проведены две секущие как показано на рисунке:



Покажем, что $\angle DMB = \dfrac{1}{2}(\breve{BD} - \breve{CA})$.

$\angle DAB$ – внешний угол треугольника MAD, тогда $\angle DAB = \angle DMB + \angle MDA$, откуда $\angle DMB = \angle DAB - \angle MDA$, но углы $\angle DAB$ и $\angle MDA$ – вписанные, тогда $\angle DMB = \angle DAB - \angle MDA = \frac{1}{2}\ \breve{BD} - \frac{1}{2}\ \breve{CA} = \frac{1}{2}(\breve{BD} - \breve{CA})$, что и требовалось доказать.

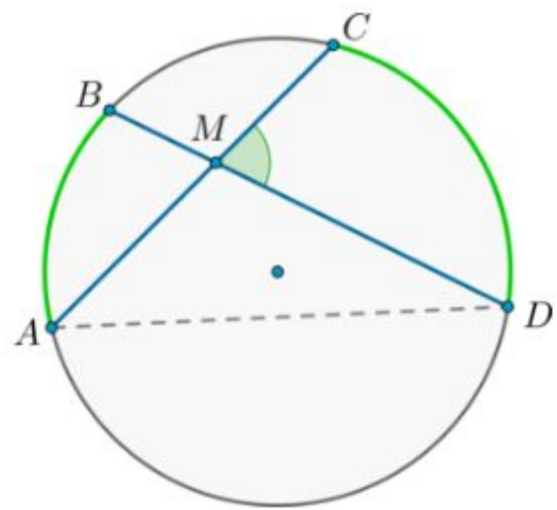
Теорема об угле между пересекающимися хордами

Угол между двумя пересекающимися хордами равен полусумме градусных мер высекаемых ими дуг:

$$\angle CMD = \frac{1}{2}\left(\breve{AB} + \breve{CD}\right)$$

Доказательство

$\angle BMA = \angle CMD$ как вертикальные.



Из треугольника AMD: $\angle AMD = 180^\circ - \angle BDA - \angle CAD = 180^\circ - \frac{1}{2}\ \breve{AB} - \frac{1}{2}\ \breve{CD}$.

Но $\angle AMD = 180^\circ - \angle CMD$, откуда заключаем, что

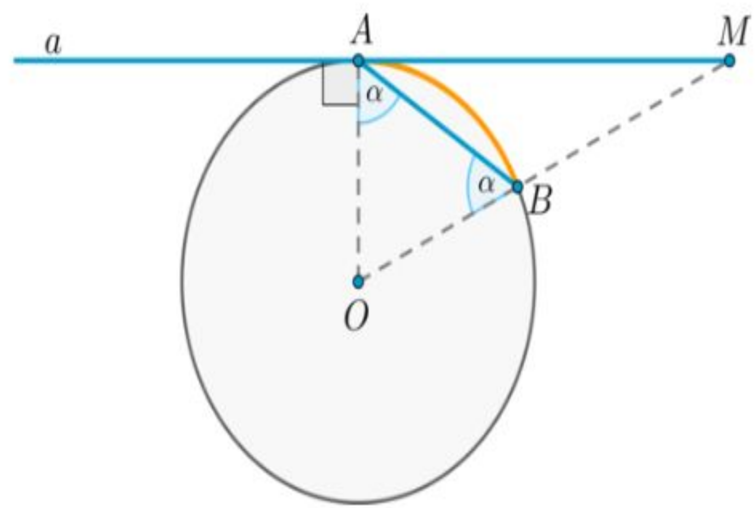
$$\angle CMD = \frac{1}{2} \cdot \breve{AB} + \frac{1}{2} \cdot \breve{CD} = \frac{1}{2}(\breve{AB} + \breve{CD}).$$

Теорема об угле между хордой и касательной

Угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, равен половине градусной меры дуги, стягиваемой хордой.

Доказательство

Пусть прямая a касается окружности в точке A, AB – хорда этой окружности, O – её центр. Пусть прямая, содержащая OB, пересекает a в точке M. Докажем, что $\angle BAM = \frac{1}{2}\cdot \breve{AB}$.



Обозначим $\angle OAB = \alpha$. Так как OA и OB – радиусы, то $OA = OB$ и $\angle OBA = \angle OAB = \alpha$. Таким образом, $\breve{AB} = \angle AOB = 180^\circ - 2\alpha = 2(90^\circ - \alpha)$.

Так как OA – радиус, проведённый в точку касания, то $OA \perp a$, то есть $\angle OAM = 90^\circ$, следовательно, $\angle BAM = 90^\circ - \angle OAB = 90^\circ - \alpha = \frac{1}{2}\cdot \breve{AB}$.

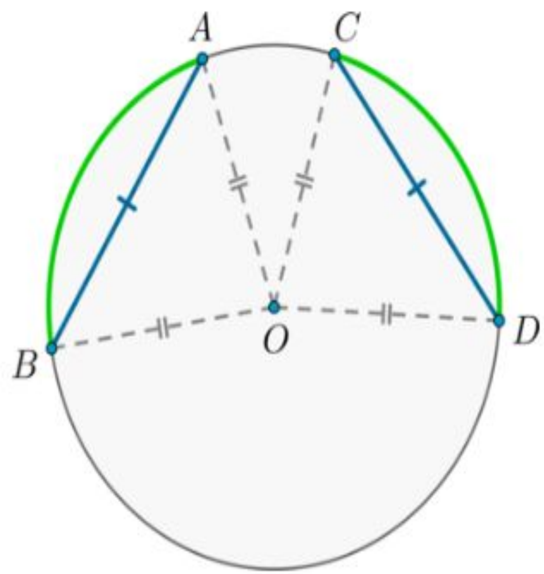
Теорема о дугах, стягиваемых равными хордами

Равные хорды стягивают равные дуги, меньшие полуокружности.

И наоборот: равные дуги стягиваются равными хордами.

Доказательство

1) Пусть $AB = CD$. Докажем, что меньшие полуокружности дуги $\breve{AB}=\breve{CD}$.



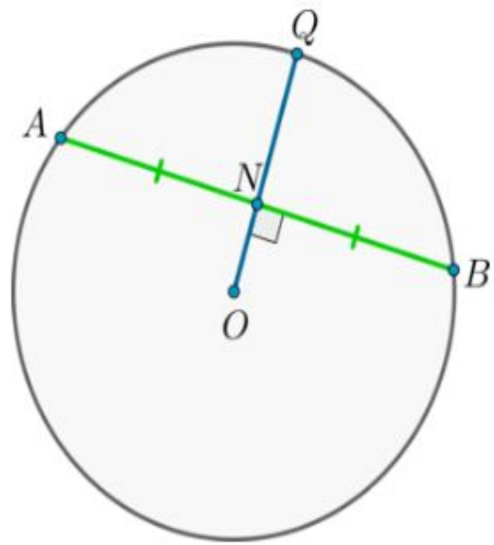
$\triangle AOB = \triangle COD$ по трем сторонам, следовательно, $\angle AOB = \angle COD$. Но т.к. $\angle AOB, \angle COD$ — центральные углы, опирающиеся на дуги $\breve{AB}, \breve{CD}$ соответственно, то $\breve{AB}=\breve{CD}$.

2) Если $\breve{AB}=\breve{CD}$, то $\triangle AOB = \triangle COD$ по двум сторонам $AO = BO = CO = DO$ и углу между ними $\angle AOB = \angle COD$. Следовательно, и $AB = CD$.

Теорема

Если радиус делит хорду пополам, то он ей перпендикулярен.

Верно и обратное: если радиус перпендикулярен хорде, то точкой пересечения он делит ее пополам.



Доказательство

1) Пусть $AN = NB$. Докажем, что $OQ \perp AB$.

Рассмотрим $\triangle AOB$: он равнобедренный, т.к. $OA = OB$ – радиусы окружности. Т.к. ON – медиана, проведенная к основанию, то она также является и высотой, следовательно, $ON \perp AB$.

2) Пусть $OQ \perp AB$. Докажем, что $AN = NB$.

Аналогично $\triangle AOB$ – равнобедренный, ON – высота, следовательно, ON – медиана. Следовательно, $AN = NB$.

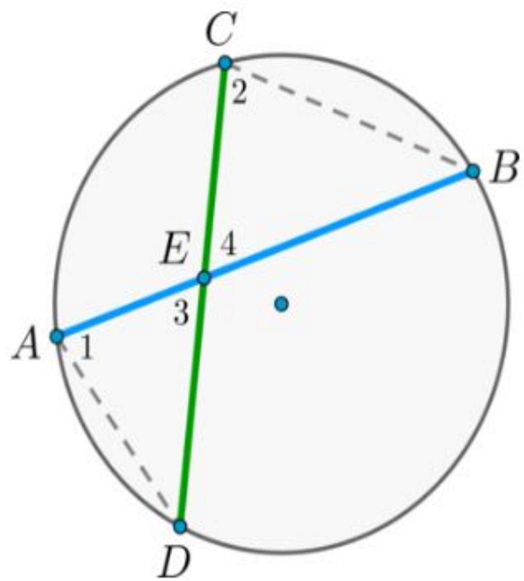
Теоремы, связанные с длинами отрезков

Теорема о произведении отрезков хорд

Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

Доказательство

Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке E.



Рассмотрим треугольники ADE и CBE. В этих треугольниках углы 1 и 2 равны, так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу BD, а углы 3 и 4 равны как вертикальные. Треугольники ADE и CBE подобны (по первому признаку подобия треугольников).

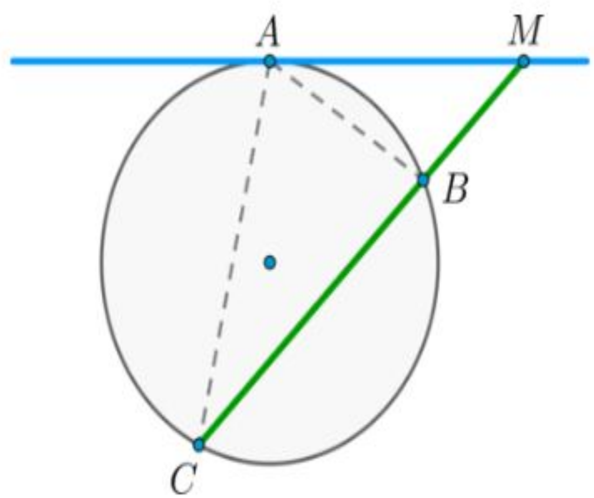
Тогда $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{DE}{BE}$, откуда $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

Теорема о касательной и секущей

Квадрат отрезка касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть.

Доказательство

Пусть касательная проходит через точку M и касается окружности в точке A. Пусть секущая проходит через точку M и пересекает окружность в точках B и C так что $MB < MC$. Покажем, что $MB \cdot MC = MA^2$.

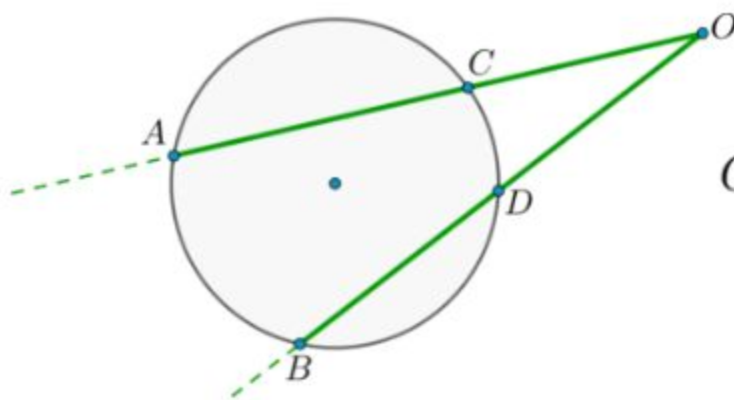


Рассмотрим треугольники MBA и MCA: $\angle M$ – общий, $\angle BCA = 0,5 \cdot \breve{AB}$. По теореме об угле между касательной и секущей, $\angle BAM = 0,5 \cdot \breve{AB} = \angle BCA$. Таким образом, треугольники MBA и MCA подобны по двум углам.

Из подобия треугольников MBA и MCA имеем: $\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{MA}{MC}$, что равносильно $MB \cdot MC = MA^2$.

Следствие

Произведение секущей, проведённой из точки O, на её внешнюю часть не зависит от выбора секущей, проведённой из точки O:



$$OA \cdot OC = OB \cdot OD$$