

Полная вероятность. Формула Байеса и применение неравенств Маркова и Чебышева для решения комбинаторных задач

Практическая работа

Формула полной вероятности

Если событие **A** может произойти только при выполнении одного из событий

$$B_1, B_2, \dots, B_n,$$

которые образуют **полную группу несовместных событий**, то вероятность события **A** вычисляется по формуле

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n).$$

Эта формула называется формулой **полной вероятности**.

Формула Байеса (Бейеса)

Вновь рассмотрим полную группу несовместных событий

B_1, B_2, \dots, B_n , вероятности появления которых

$P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$.

Событие **A** может произойти только вместе с каким-либо из событий B_1, B_2, \dots, B_n , которые будем называть **гипотезами**.

Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n) .$$

Как определить вероятность того, что имела место **та или иная гипотеза**?

Формула Байеса (Бейеса)

При условии, что событие уже произошло, вероятности гипотез переоцениваются по формулам, которые получили фамилию английского священника Томаса Байеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} \quad \text{— вероятность того, что имела место гипотеза } B_1$$

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} \quad \text{— вероятность того, что имела место гипотеза } B_2$$

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(A)} \quad \text{— вероятность того, что имела место гипотеза } B_3$$

...

$$P_A(B_n) = \frac{P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}{P(A)} \quad \text{— вероятность того, что имела место гипотеза } B_n$$

Формула Байеса (Бейеса)

На первый взгляд кажется полной нелепицей – зачем пересчитывать вероятности гипотез, если они и так известны? Но на самом деле разница есть:

$P(B_1), P(B_2), P(B_3), \dots, P(B_n)$ - это **априорные** (оцененные до испытания) вероятности.

$P_A(B_1), P_A(B_2), P_A(B_3), \dots, P_A(B_n)$ - это **апостериорные**

(оцененные **после** испытания) вероятности тех же гипотез, пересчитанные в связи «со вновь открывшимися обстоятельствами» – с учётом того факта, что событие **A** достоверно произошло.

Формула Байеса (Бейеса)

Рассмотрим пример.

На склад поступило 2 партии изделий: первая – 4000 штук, вторая – 6000 штук.

Средний процент нестандартных изделий в первой партии составляет 20%, а во второй – 10%.

Наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным.

Найти вероятность того, что оно:

а) из первой партии,

б) из второй партии.

Формула Байеса (Бейеса)

Решение.

Первая часть решения состоит в использовании формулы полной вероятности. Иными словами, вычисления проводятся в предположении, что испытание ещё не произведено и событие «изделие оказалось стандартным» пока не наступило.

Рассмотрим две гипотезы:

V_1 — наудачу взятое изделие будет из 1-й партии;

V_2 — наудачу взятое изделие будет из 2-й партии.

Всего: $4000 + 6000 = 10000$ изделий на складе.

Решение.

По [классическому определению](#):

$$P(B_1) = \frac{4000}{10000} = 0,4; \quad P(B_2) = \frac{6000}{10000} = 0,6.$$

Рассмотрим зависимое событие: **A** – наудачу взятое со склада изделие будет стандартным.

В первой партии $100\% - 20\% = 80\%$ стандартных изделий,

поэтому: $P_{B_1}(A) = \frac{80}{100} = 0,8$ - вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным **при условии**, что оно принадлежит 1-й партии. Аналогично, во второй партии $100\% - 10\% = 90\%$ стандартных изделий и

$$P_{B_2}(A) = \frac{90}{100} = 0,9 \quad - \text{вероятность того, что наудачу взятое на}$$

складе изделие будет стандартным при условии, что оно принадлежит 2-й партии.

Решение.

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = 0,4 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,9 = 0,32 + 0,54 = 0,86 \quad -$$

вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным.

Часть вторая. Пусть наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным. Эта фраза прямо прописана в условии, и она констатирует тот факт, что событие произошло. По формулам Байеса вероятность того, что выбранное стандартное изделие принадлежит 1-й партии:

$$\text{а) } P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,4 \cdot 0,8}{0,86} = \frac{0,32}{0,86} = \frac{32}{86} = \frac{16}{43} \approx 0,37$$

вероятность того, что выбранное стандартное изделие принадлежит 2-й партии:

$$\text{б) } P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{0,6 \cdot 0,9}{0,86} = \frac{0,54}{0,86} = \frac{54}{86} = \frac{27}{43} \approx 0,63$$

Задание 1.

На склад поступило 3 партии изделий: первая – 2000 штук, вторая – 3000 штук, третья – 5000 штук.

Средний процент нестандартных изделий в первой партии составляет 5%, во второй – 10%, а в третьей – 15%.

Наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным.

Найти вероятность того, что оно:

- а) из первой партии,
- б) из второй партии,
- в) из третьей партии.

Неравенство Маркова

Неравенство Маркова дает вероятностную оценку того, что значение неотрицательной случайной величины превзойдет некоторую константу через известное математическое ожидание.

Когда никаких других данных о распределении нет, неравенство дает некоторую информацию, хотя зачастую оценка груба или тривиальна.

Неравенство Маркова

Пусть X - случайная величина, принимающая неотрицательные значения, $M(X)$ - ее конечное математическое ожидание, то для любых $a > 0$ выполняется условие

$$P(X \geq a) \leq \frac{M(X)}{a}.$$

Альтернативная форма записи (когда нужно оценить вероятность того, что случайная величина меньше некоторой константы):

$$P(X < a) > 1 - \frac{M(X)}{a}.$$

Неравенство Маркова

Пример.

Среднее количество вызовов, поступающих на коммутатор завода в течение часа, равно 300.

Оценить вероятность того, что в течение следующего часа число вызовов на коммутатор:

- а) превысит 400;
- б) будет не более 500.

Неравенство Маркова

Решение.

По условию $M(X)=300$.

а) Воспользуемся формулой (неравенством Маркова)

$$P(x > A) \leq \frac{M(X)}{A} .$$

Тогда $P(x > 400) \leq \frac{300}{400} = 0,75$, т.е. вероятность того,

что число вызовов превысит 400, будет не более 0,75.

Неравенство Маркова

Решение.

б) воспользуемся неравенством Маркова в альтернативном виде:

$$P(x \leq A) \geq 1 - \frac{M(X)}{A} .$$

Тогда $P(x \leq 500) \geq 1 - \frac{300}{500} = 0,4$, т.е. вероятность того,

что число вызовов не более 500, будет не менее 0,4.

Задание 2.

Количество потребляемой за сутки электроэнергии предприятием является случайной величиной с математическим ожиданием 8 мегаватт.

Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки потребление электроэнергии окажется:

- а) более 10 мегаватт,
- б) не более 12 мегаватт.

Неравенство Чебышева

Когда известны не только математическое ожидание, но и дисперсия для случайной величины, можно применять следствие неравенства Маркова — **неравенство Чебышева**, которое дает оценку вида:

$$P(|X - M(X)| \geq a) \leq \frac{D(X)}{a^2}, \quad a > 0.$$

Также его можно записать в другой форме:

$$P(|X - M(X)| < a) > 1 - \frac{D(X)}{a^2}, \quad a > 0.$$

Неравенство Чебышева показывает, что случайная величина принимает значения близкие к среднему (математическому ожиданию) и дает оценку вероятности больших отклонений.

Неравенство Чебышева

Пример.

Генератор обеспечивает выходное напряжение, которое может отклоняться от номинального значения, не превышающее 1 В, с вероятностью 0,95. Какие значения дисперсии выходного напряжения можно ожидать?

Решение.

Пусть X - величина выходного напряжения. Применим неравенство Чебышева

$$P(|X - MX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышева

Подставляя наши данные $\varepsilon=1$, $P=0,95P$, имеем:

$$0,95 = P(|X - MX| < 1) \geq 1 - \frac{D(X)}{1^2},$$

$$1 - D(X) \leq 0,95,$$

$$D(X) \geq 0,05.$$

Ответ: дисперсия не менее $0,05 \text{ В}^2$.

Задание 3.

Завод каждый день выпускает определённое количество изделий.

Количество выпускаемых изделий может отклоняться от номинального на 250 штук с вероятностью 0,93.

Определите величину дисперсии количества выпускаемых изделий в день.