Лекция 11. Электромагнитные волны

1. Волновое уравнение для электромагнитного поля, его общее решение.
2. Скорость распространения электромагнитных волн.
3. Энергия и импульс электромагнитного поля.
4. Вектор Пойнтинга.
5. Теорема Пойнтинга.

Мы знаем действия многих причин, но не знаем причин многих действий.

К. Колтон

Мысли философов – как звезды, они не дают света, потому что слишком возвышенны.

Ф. Бэкон

Уравнение волны

Уравнение волны – математическое выражение, описывающее смещение колеблющейся частицы в виде функции, зависящей от координат и времени.

$$\xi = \xi(x, y, z, t)$$

Для одномерного случая возможное общее решение:

$$\boxed{\xi = \xi(x,t) = f(x-ct) = F(t-\frac{x}{c}) = F(-\frac{x-ct}{c})}$$

Гармоническая волна:

$$\xi(x,t) = a\cos\omega(t - x/v),$$

где a — амплитуда волны, ω — циклическая (круговая) частота колебаний частиц среды (c^{-1}). Эта волна периодична во времени и пространстве, поскольку сама функция периодична и ее период равен 2π. Из периодичности во времени $\omega\Delta t = 2\pi$ находим $\Delta t = 2\pi/\omega$. Этот промежуток времени называют *периодом колебаний*:

$$T = 2\pi/\omega.$$

$\omega t - \omega x/v = \omega t - kx,$ где $k = \omega/v = 2\pi/Tv$, или

$$k = 2\pi/\lambda.$$

Величину k называют *волновым числом*.

Уравнение плоской гармонической волны:

$$\xi = a\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

Уравнение плоской одномерной гармонической волны:

$$\xi = a\cos(\omega t - kx)$$

Уравнение плоской одномерной затухающей гармонической волны:

$$\xi = a_0 e^{-\gamma x}\cos(\omega t - kx)$$

Уравнение сферической гармонической волны:

$$\xi = \frac{a_0}{r}\cos(\omega t - kr)$$

$$\xi = A\cos\left(\frac{2\pi\cdot t}{T} - \frac{\omega}{v}r\right)$$

$$\boxed{k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}}$$ - волновое число

$$\boxed{\xi = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)}$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v}\vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$$ - волновой вектор

В направлении распространения волны

$$\frac{\omega}{k}$$ - Фазовая скорость

$$\left(\frac{t}{T} = \frac{r}{\lambda}\right)$$

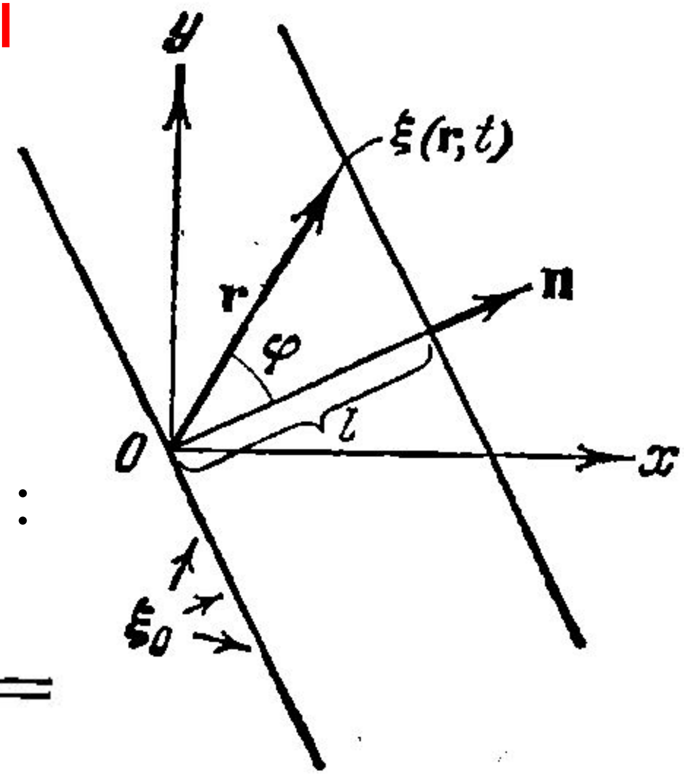
$$\xi = A\cos(\omega t - k\bar{r})$$

Если общее выражение дважды продифференцировать по времени и координатам, то получим волновое уравнение второго порядка

Уравнение плоской волны

Плоская волна при $x = 0$

$$\xi_0 = a\cos(\omega t + \alpha)$$



Амплитуда волны на расстоянии l :

$$\xi = a\cos\left[\omega\left(t - \frac{l}{v}\right) + \alpha\right] =$$

$$a\cos(\omega t - kl + \alpha)$$

где: $k = \omega/v; \quad l = r\cos\varphi = \mathbf{nr}$

Можем записать $\xi = a\cos(\omega t - k\mathbf{nr} + \alpha).$

Обозначая $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$, - волновой вектор. $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$ - волновое число.

Получим $\xi(\mathbf{r}, t) = a\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)$.

Тут $\mathbf{kr} = k_x x + k_y y + k_z z$.

Общее выражение для уравнения волны

$$\boxed{\xi(x, y, z; t) = a\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha).}$$

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha, \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\beta, \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\gamma.$$

Далее - вывод волнового уравнения из уравнения волны

Продифференцируем функцию дважды по каждой переменной

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) = -\omega^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) = -k_x^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) = -k_y^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) = -k_z^2 \xi.$$

Сложение производных по координатам дает

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\,\xi = -k^2 \xi.$$

Сопоставив эту сумму с производной по времени и заменив k^2/ω^2 через $1/v^2$, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Это и есть волновое уравнение.

Его можно написать в виде

$$\boxed{\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

где Δ — оператор Лапласа

Для одномерной плоской волны волновое уравнение имеет вид:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

волновому уравнению удовлетворяет любая функция вида

$$f(x, y, z; t) = f(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha).$$

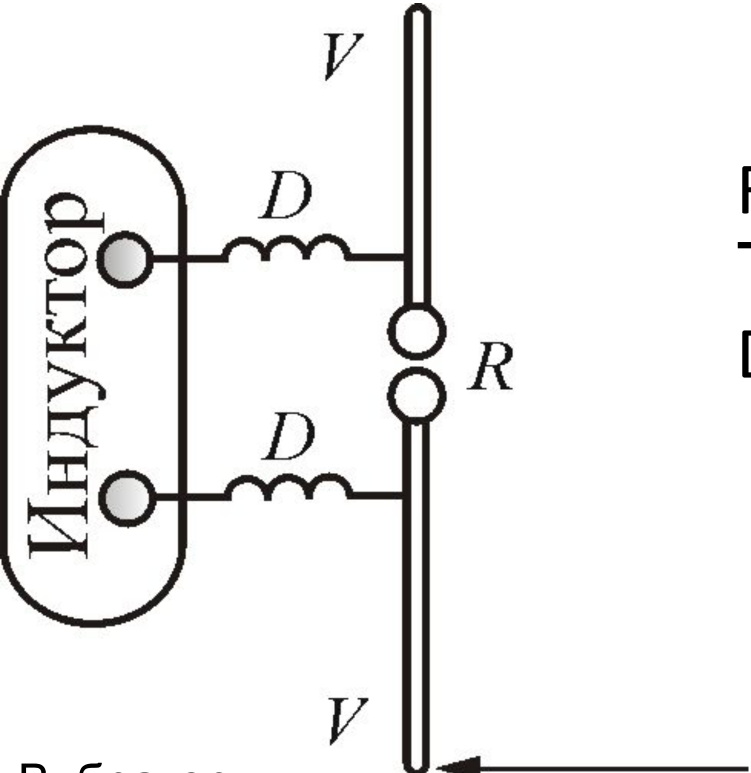
Запомнить:

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}} \qquad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Герц Генрих Рудольф (1857 – 1894) – немецкий физик.

Основные работы относятся к электродинамике, одним из основоположников которой он является, и механике. В 1888 г. экспериментально доказал существование электромагнитных волн, распространяющихся в свободном пространстве, предсказанных теорией Максвелла. В 1887 наблюдал внешний фотоэффект. Исследования Герца посвящены также катодным лучам, теории удара упругих тел и т.п.

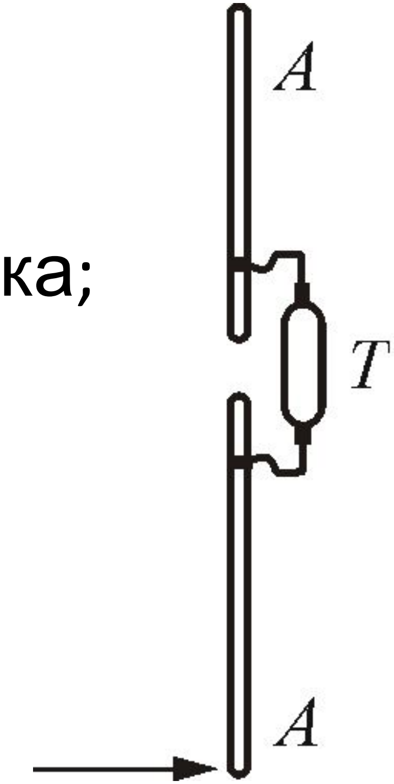
Вибратор Герца



Вибратор

R – разрядник;
T - газоразрядная трубка;
D – дроссели.

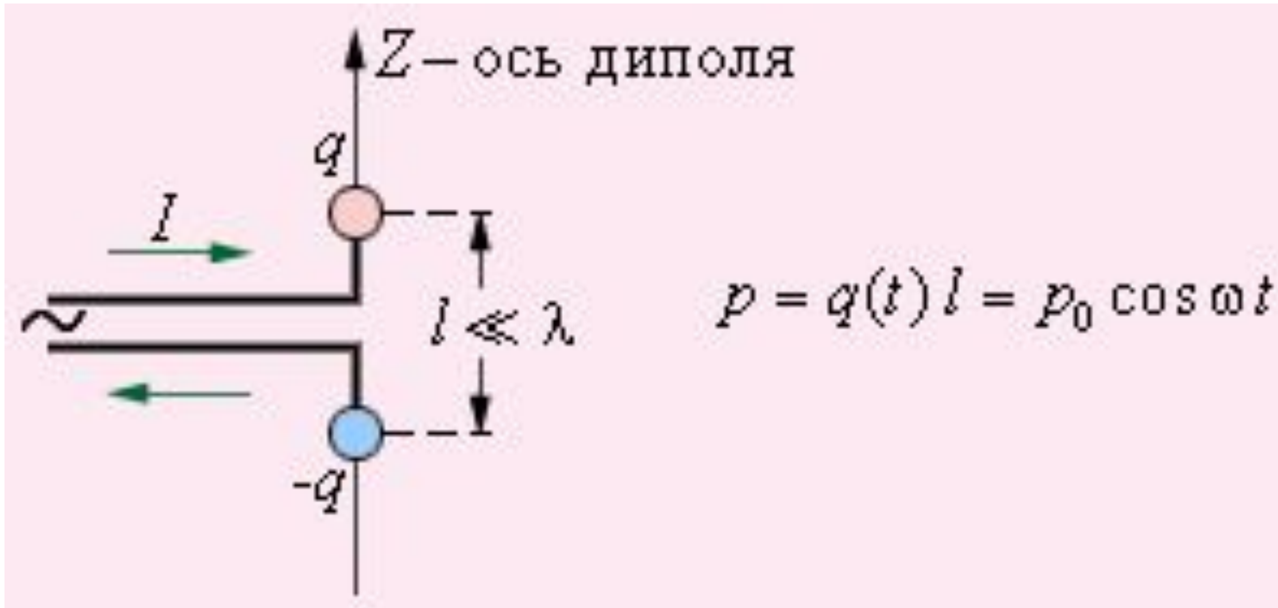
$r \leq \lambda$ – ближняя зона

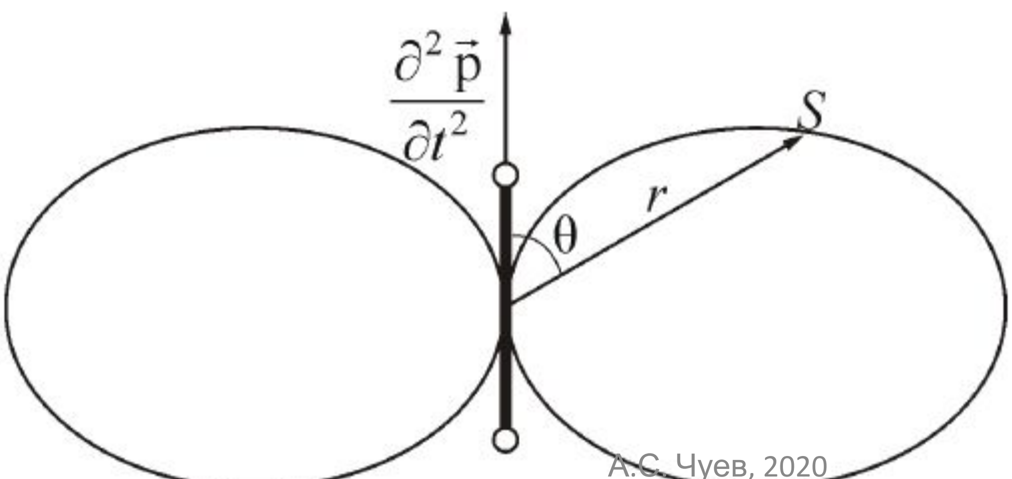


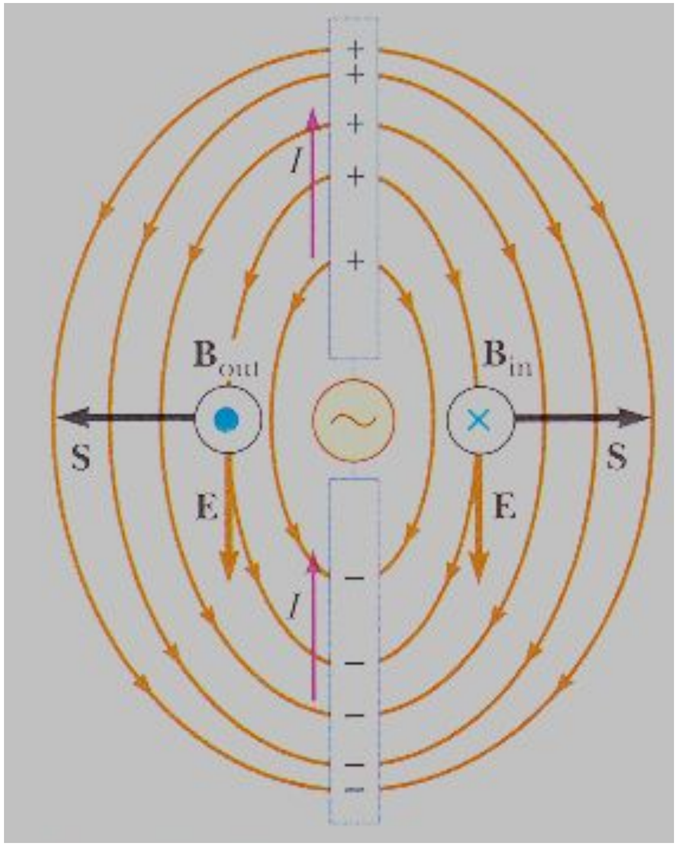
Резонатор

Движущийся с ускорением электрический заряд испускает электромагнитные волны.

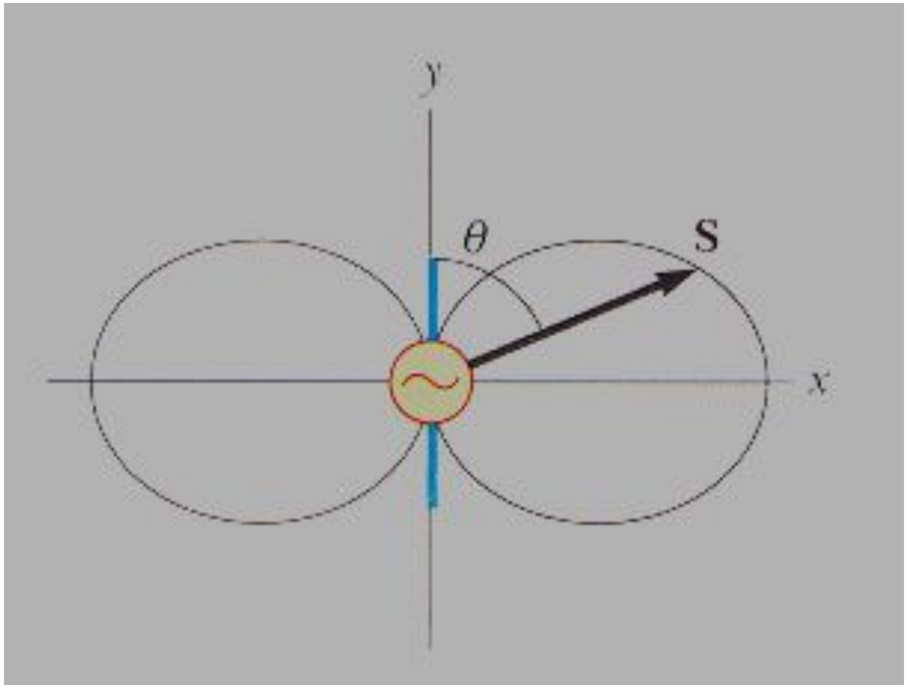
Излучение диполя



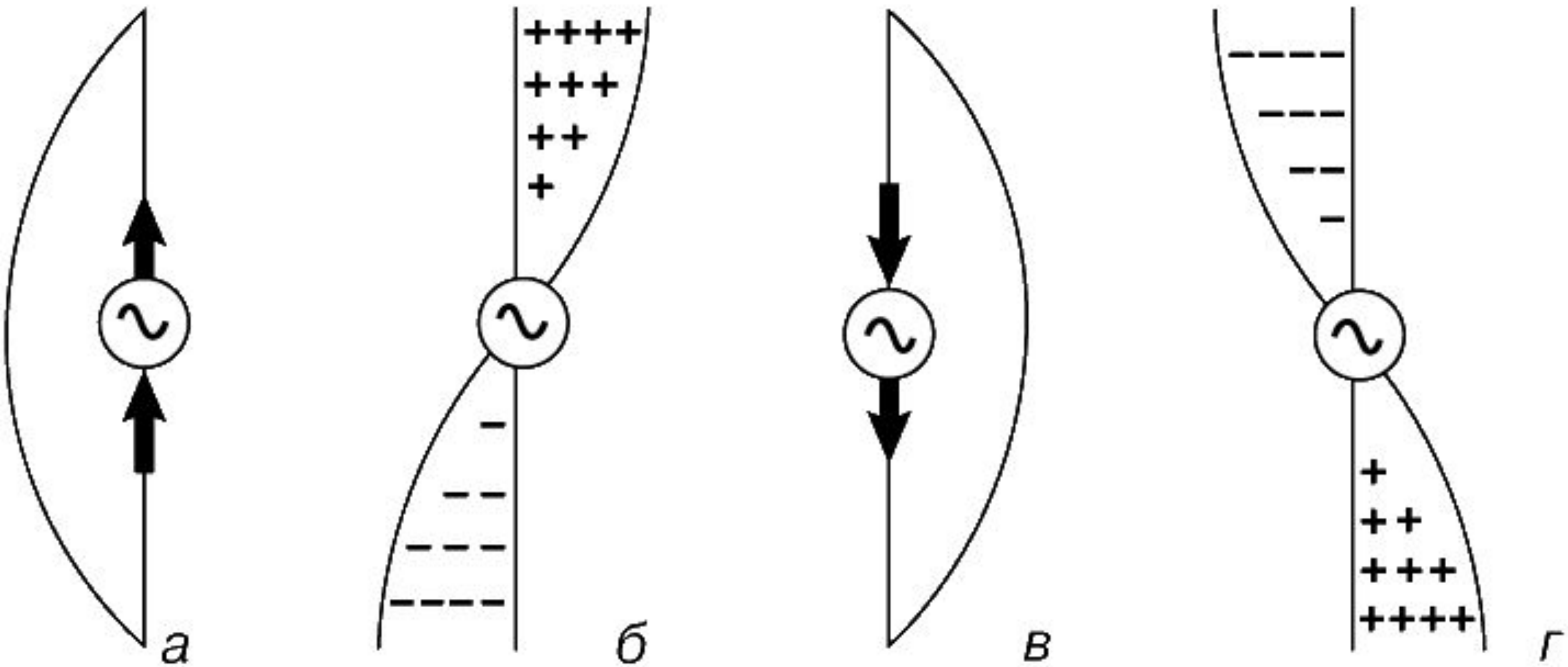




$\mathbf{B}_{\text{out}}$
$\mathbf{B}_{\text{in}}$
S
S
E
E
I
I



y
θ
S
x



$t = 0$

Ток i максимален, направлен вверх; заряд $q = 0$

$t = \mathrm{T}/4$

Ток $i = 0$, заряд q максимален

$t = \mathrm{T}/2$

Ток i максимален, направлен вниз заряд $q = 0$

$t = 3\mathrm{T}/4$

Ток $i = 0$, заряд q максимален

Рис. 3. ТОКИ И ЗАРЯДЫ в антенне типа полуволнового симметричного вибратора в разные моменты периода.

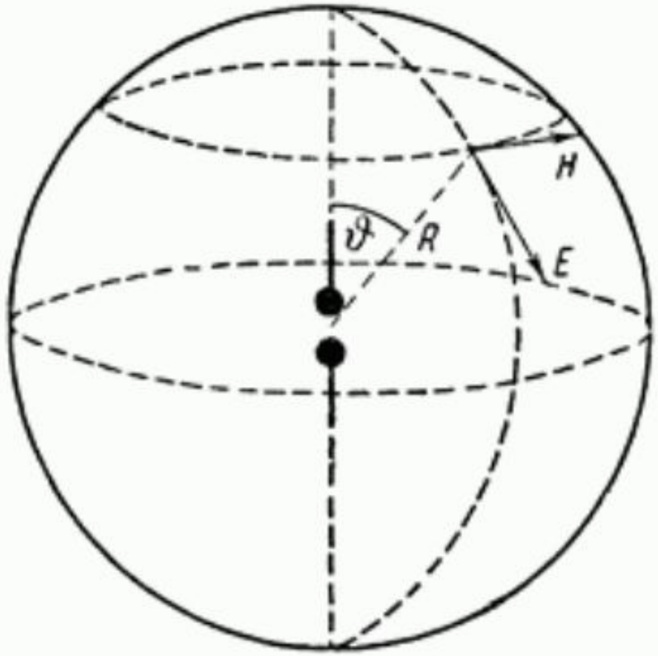
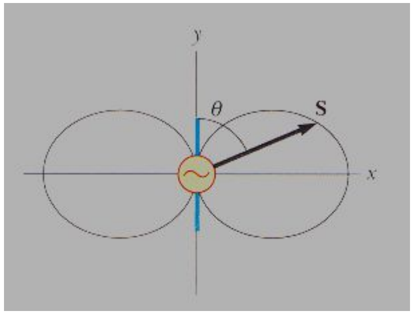


Рис. 382. В электромагнитной волне, излучаемой диполем, векторы $\boldsymbol{E}$ направлены по меридианам, а векторы $\boldsymbol{H}$ — по параллелям.

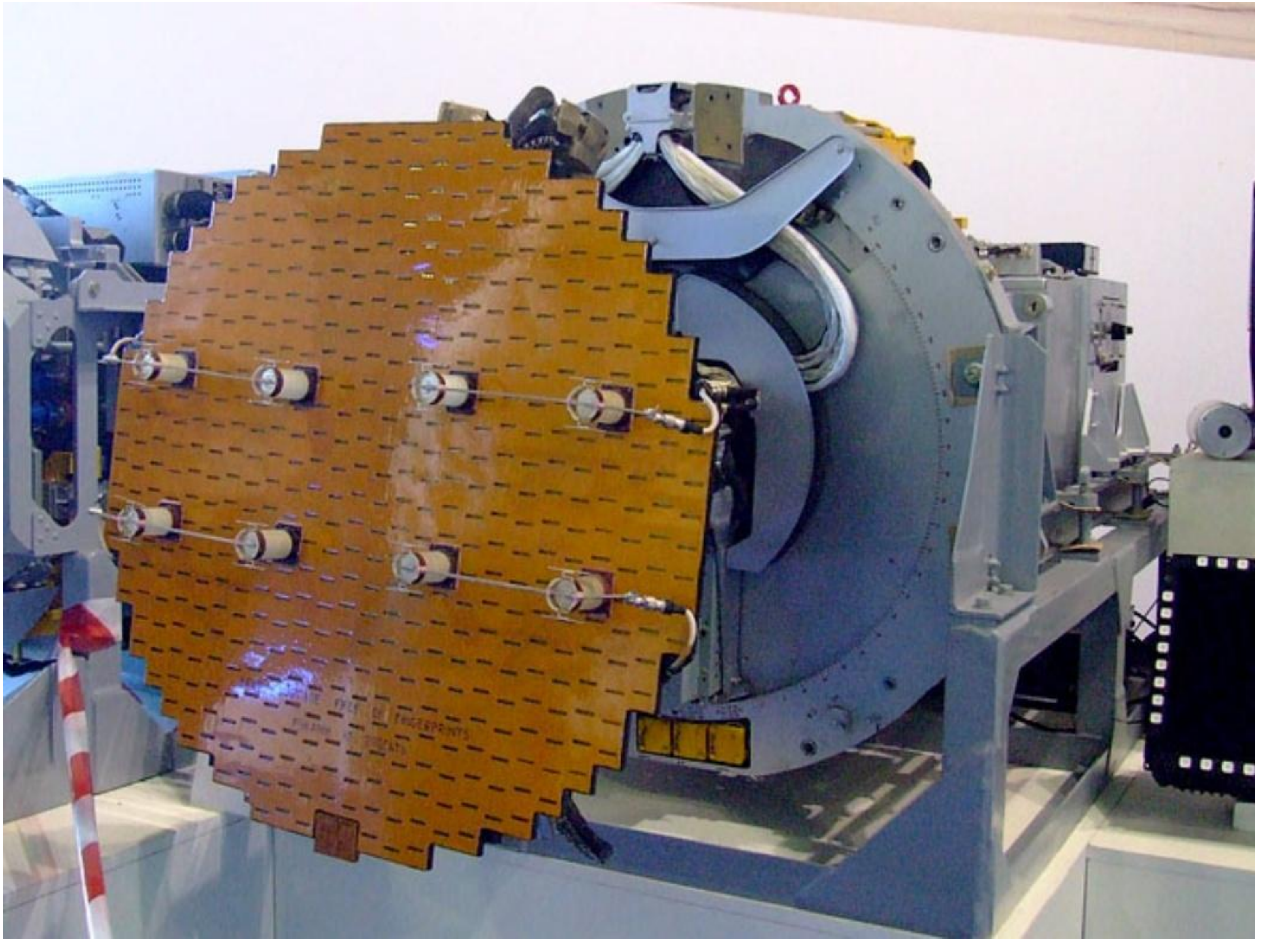
$$E_{\perp} = \frac{\ddot{P}\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r c^2}$$

$$H_{\perp} = \frac{\ddot{P}\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r c}$$

Диаграмма излучения диполя не сферическая!!!



ФАР



Электромагнитная волна

Уравнения Максвелла при отсутствии источников поля

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\nabla \mathbf{H} = 0,$$

$$[\nabla \mathbf{H}] = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\nabla \mathbf{E} = 0.$$

Возьмем ротор от обеих частей первого уравнения

$$[\nabla, [\nabla \mathbf{E}]] = -\mu\mu_0 \left[\nabla, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right]$$

Вывод волнового уравнения из уравнений Максвелла

Преобразуя векторное произведение в правой части последнего уравнения:

$$\left[\nabla, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}[\nabla \mathbf{H}].$$

И использовав для rot **H**, выражение из ур-ий Максвелла $[\nabla \mathbf{H}] = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ получим:

$$[\nabla, [\nabla \mathbf{E}]] = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

В левой части: $$[\nabla, [\nabla \mathbf{E}]] = \cancel{\nabla(\nabla \mathbf{E})} - \Delta \mathbf{E}.$$

В итоге: $$\boxed{\Delta \mathbf{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}}$$

С учетом $$\boxed{\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2}$$

$$\boxed{\Delta \mathbf{E} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}}$$

Раскрыв оператор Лапласа, получим

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Аналогичным путем можно получить

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

Второй вариант вывода волнового уравнения

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}$$ дифференцируем по *x*

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$ дифференцируем по *t*

Исключая из полученных уравнений смешанную производную, получаем:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Используя соотношение $\varepsilon_0\mu_0 = \dfrac{1}{c^2}$ получим

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Аналогично можно получить волновое уравнение и для вектора ***H*.**

Другой вид волновых формул для электромагнитных волн

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{\upsilon^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{\upsilon^2} \frac{d^2 \vec{H}}{dt^2}}$$

где $\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$ – оператор Лапласа,

υ – фазовая скорость.

Еще один вариант записи волновых уравнений для электромагнитных волн

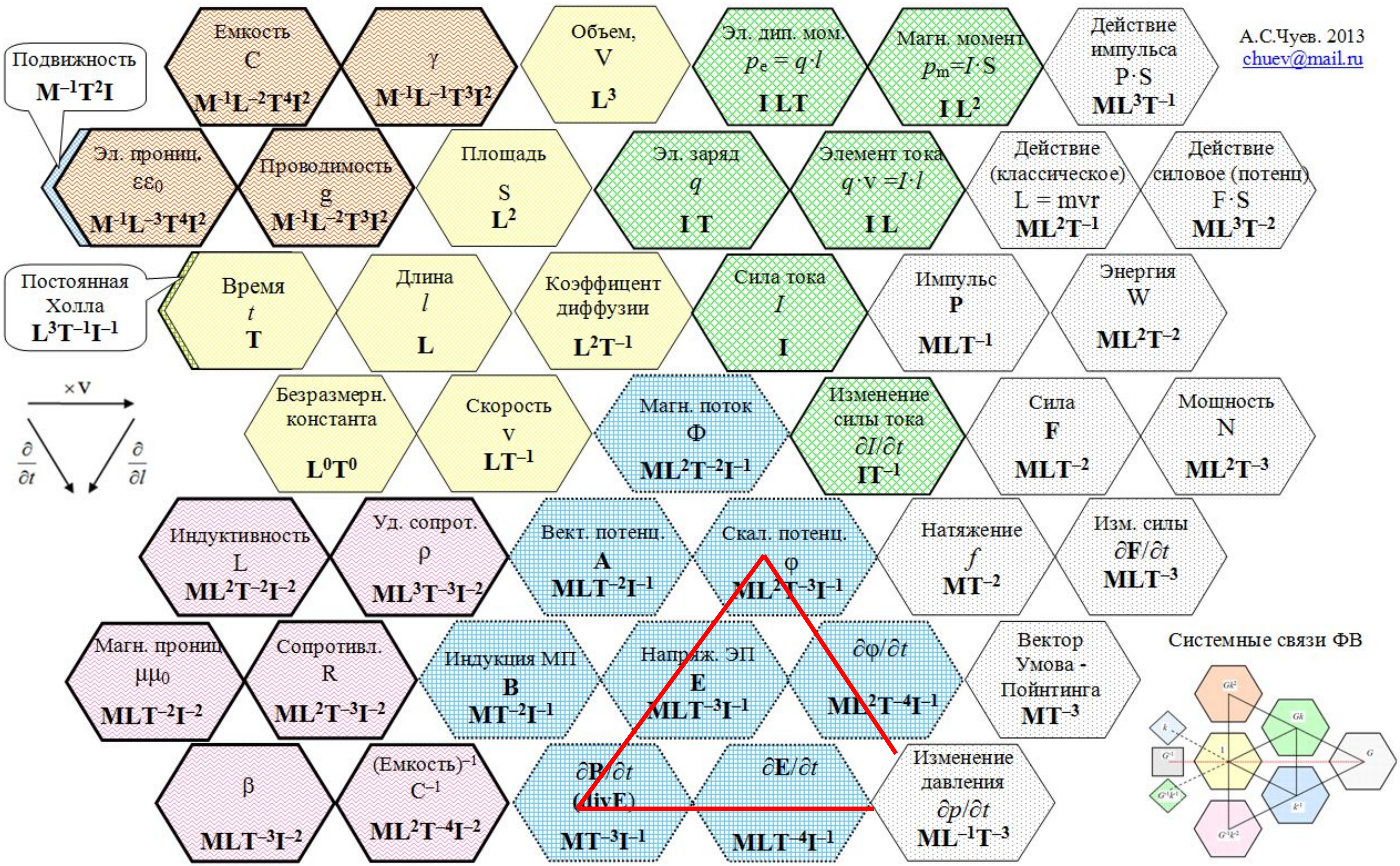
$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \ddot{\mathbf{E}}\ .}$$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \ddot{\mathbf{H}}\ .}$$

$$\upsilon = c/\sqrt{\varepsilon\mu}\ , \quad c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\ .$$

Оказалось, что $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, т. е. совпадает со скоростью света в вакууме. Это и дало основание Максвеллу предположить задолго до экспериментального подтверждения, что свет представляет собой электромагнитные волны.

СИСТЕМА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ



Соотношение E и B в плоской электромагнитной волне

$$E = E_{\max}\cos(kx - \omega t) \qquad B = B_{\max}\cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -kE_{\max}\sin(kx - \omega t) \qquad \frac{\partial B}{\partial t} = \omega B_{\max}\sin(kx - \omega t)$$

Из условия синфазности векторов E и B в волне

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}}$$

$$kE_{\max} = \omega B_{\max}$$

$$\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = \frac{\omega}{k} = c \qquad \frac{E_{\max}}{B_{\max}} = \frac{E}{B} = c$$

В любой момент времени отношение напряженности электрического поля к величине магнитной индукции в электромагнитной волне равно скорости света в вакууме

Скорость распространения электромагнитных волн в среде зависит от ее электрической и магнитной проницаемостей. Величину

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}$$

называют

абсолютным показателем преломления.

$$\boxed{n = \frac{c}{\upsilon}}$$

и

$$\boxed{\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n}}$$

Показатель преломления есть *физическая величина, равная отношению скорости электромагнитных волн в вакууме к их скорости в среде.*

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\, E_y = \sqrt{\mu\mu_0}\, H_z .$$

Электромагнитные волны – поперечные волны

Изменения ***E*** и ***H*** синфазны!!!

Для плоской гармонической волны:

$$E = E_m \cos(\omega t - kx), \qquad H = H_m \cos(\omega t - kx),$$

ω — круговая ~~(циклическая)~~ частота колебаний,

k — волновое число ($k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны).

Соотношение E/H

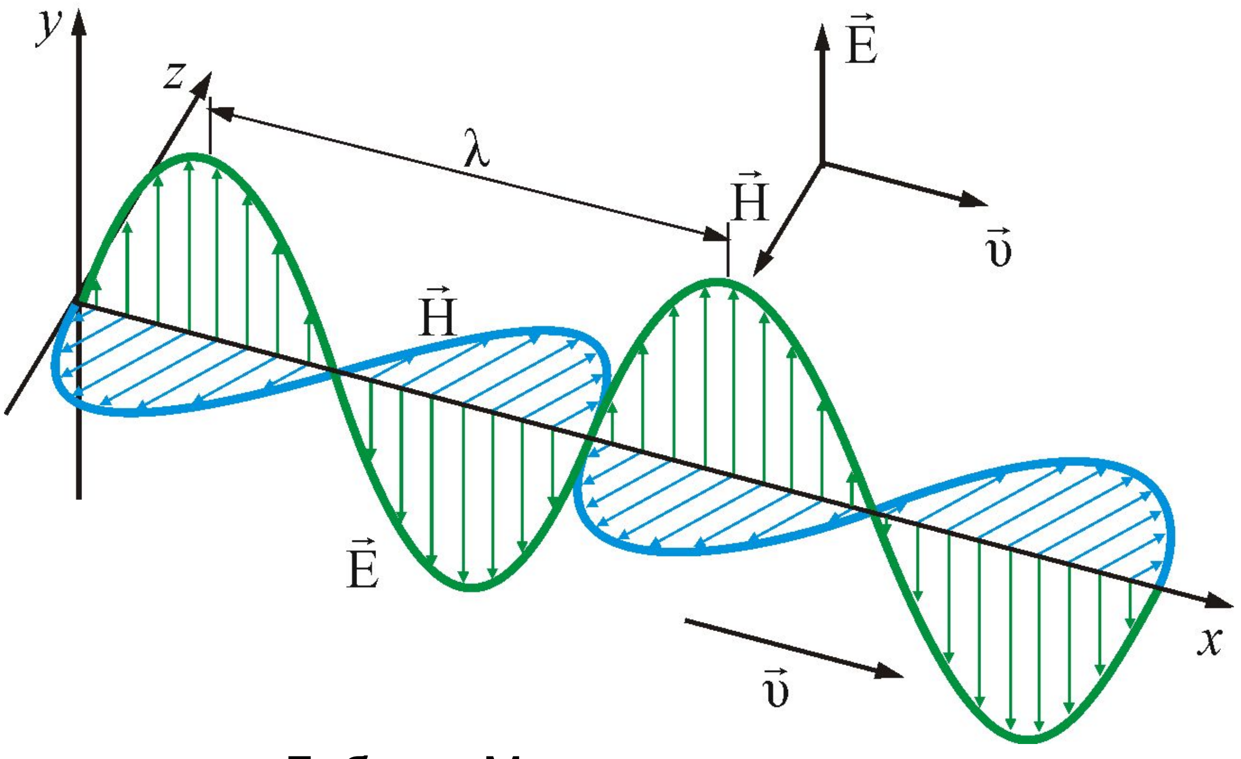
$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$$

Для вакуума

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = R_{\text{ВАК}} \approx 377 \ \text{Ом}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_y E_m \cos(\omega t - \mathbf{kr}).$$

Для ***H*** будет аналогичная запись.



Бабочка Максвелла

Стоячая электромагнитная волна

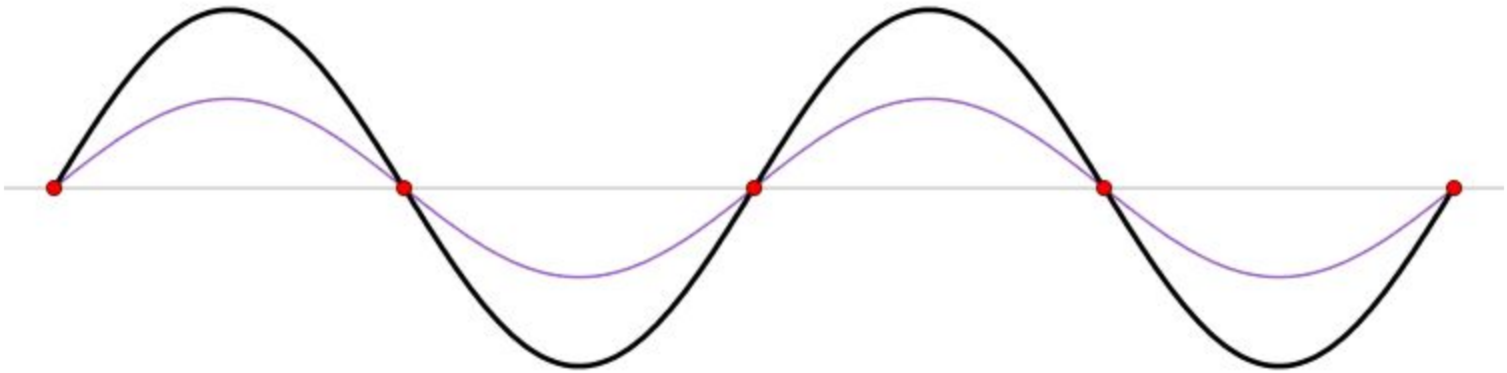
Уравнение встречной волны:

$$E_y = E_m \cos(\omega t + kx), \quad H_z = -H_m \cos(\omega t + kx).$$

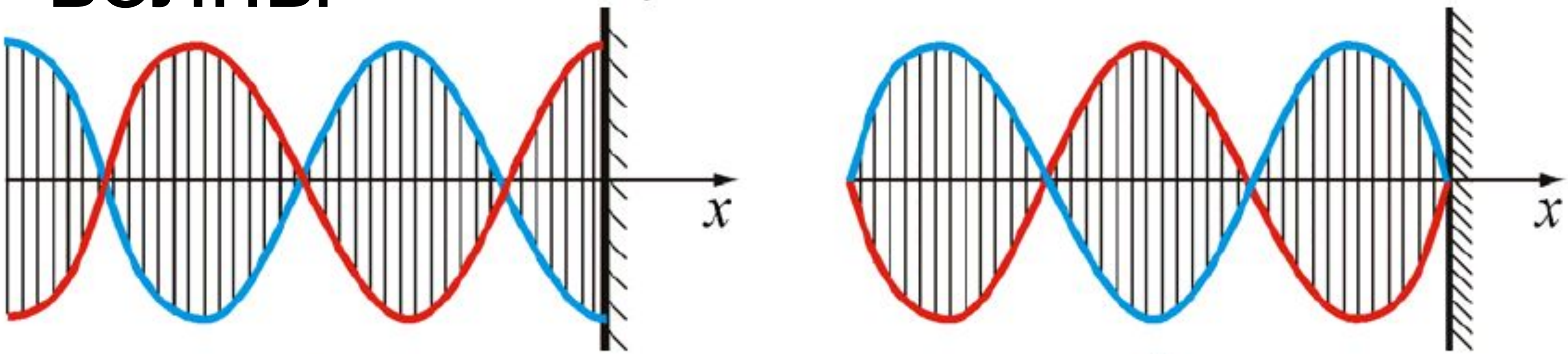
Результат наложения прямой и встречной волн:

$$E_y = 2E_m \cos kx \cdot \cos \omega t, \quad H_z = 2H_m \sin kx \cdot \sin \omega t.$$

Схема образования стоячей волны



Узлы и пучности стоячей волны



а б

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= A\cos(\omega t - kx)\\ \xi_2 &= A\cos(\omega t + kx)\end{aligned}\right\},$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2}\right)$$

$$\xi = 2A\cos\omega t\ \cos kx = 2A\cos kx\ \cos\omega t$$

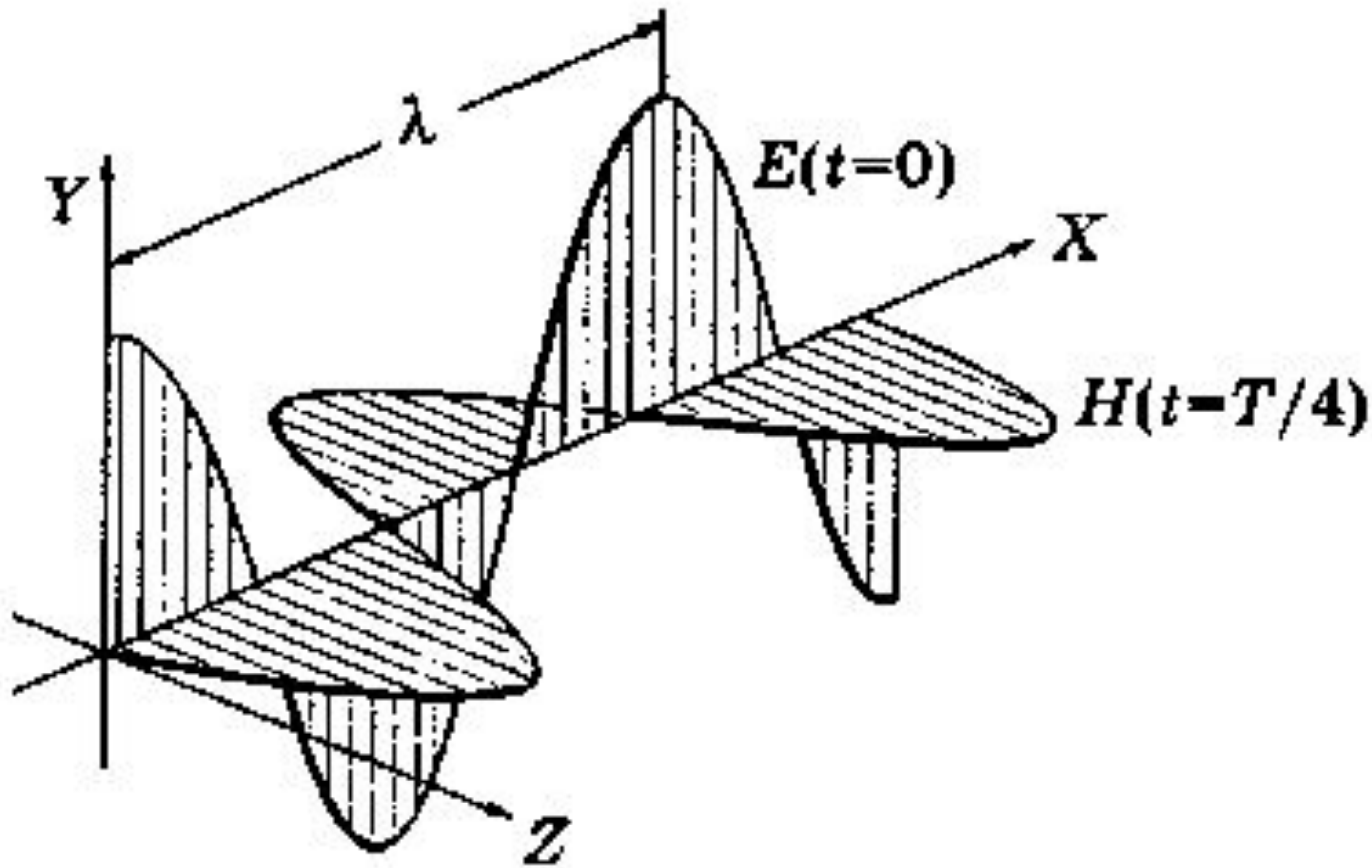
С учетом, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$,

Уравнение стоячей волны имеет вид:

$$\boxed{\xi = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t\ .}$$

Стоячие волны не переносят энергию !!!

Изображение стоячей ЭМ волны



Энергия электромагнитной волны

$$\boxed{w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.}$$

Используя соотношения *E* с *H*, можно получить

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\, EH = EH/v,$$

Умножив w на v, получим плотность потока энергии:

$$S = wv = EH.$$

$$\boxed{\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}].}$$

Вектор **S** называют *вектором Пойнтинга.*

В случае бегущей гармонической электромагнитной волны

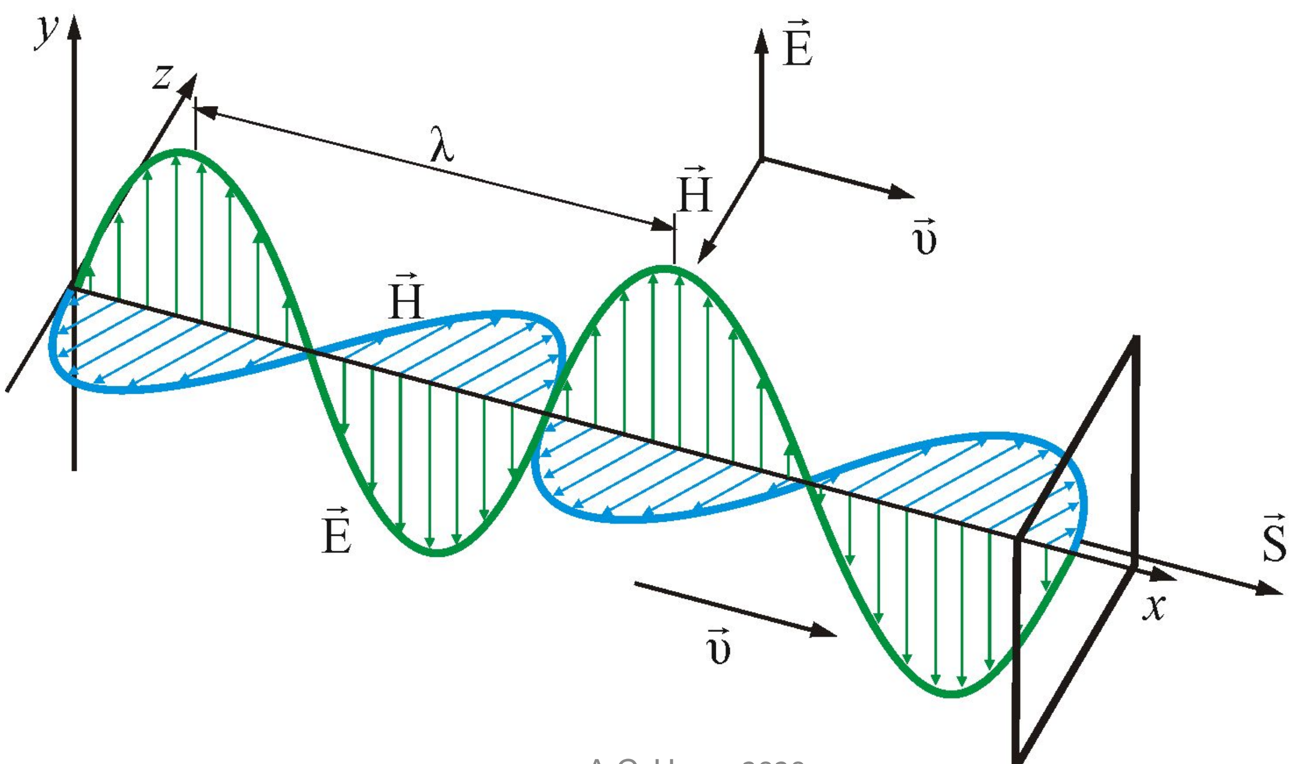
$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

$$S = wv = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0/\mu\mu_0}\, E_m^2 \cos^2(\omega t - kx),$$

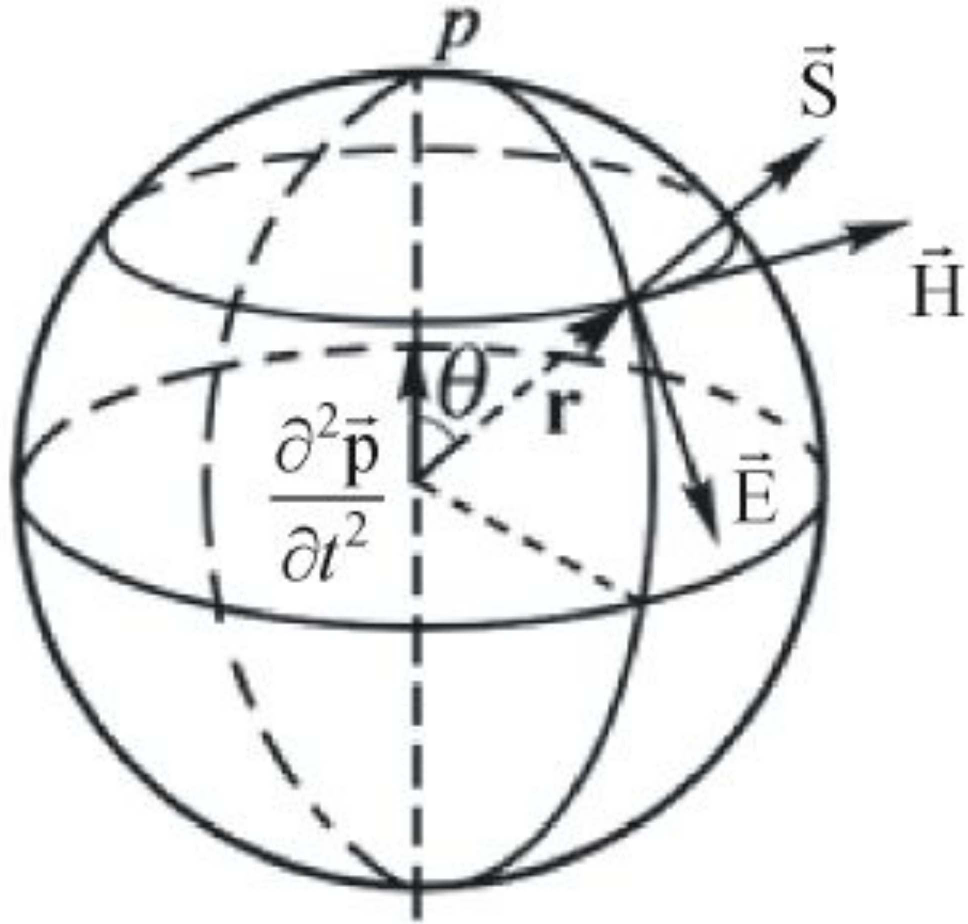
Квадрат косинуса = 1/2 Интенсивность: $I = \langle S \rangle.$

В результате: $\boxed{I = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0/\mu\mu_0}\, E_m^2/2.}$

Вектор Пойнтинга направлен в сторону распространения электромагнитной волны, а его модуль равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.



Для сферической волны:



Теорема Пойнтинга

Из уравнений Максвелла можно получить:

$$\left(\bar{E},\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)+\left(\vec{H},\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)=(\vec{E},\mathrm{rot}\vec{H})-(\vec{H},\mathrm{rot}\vec{E})$$

Преобразуем левую часть:

$$\left(\bar{E},\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)+\left(\vec{H},\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}(\vec{E},\vec{E})+\frac{\mu\mu_0}{2}(\vec{H},\vec{H})\right)=\frac{\partial w}{\partial t}$$

Используя векторное тождество:

$$\mathrm{div}\left[\vec{E},\vec{H}\right]=(\vec{H},\mathrm{rot}\vec{E})-(\vec{E},\mathrm{rot}\vec{H})$$ и $$\vec{S}=\left[\vec{E},\vec{H}\right]$$

Получим уравнение баланса ЭМ энергии, переносимой ЭМ волной:

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t}+\mathrm{div}\vec{S}=0}$$

Это уравнение похоже на уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0$$

где ρ - *объемная плотность электрического заряда*.

Применяя формулу Гаусса-Остроградского уравнение баланса энергии можно выразить в интегральной форме:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V w dV\right) = -\oint_\Sigma S_N d\Sigma}$$

Σ - обозначена площадь.

S_N - нормальная составляющая вектора Пойнтинга.

Это соотношение называют теоремой Умова-Пойнтинга.

Теорема Умова-Пойнтинга

Теорема Умова - Пойнтинга характеризует баланс энергии электромагнитного поля.

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV = \int\limits_S [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]\, d\mathbf{S} + \int\limits_V \sigma E^2\, dV$$

σ- удельная проводимость

Левая часть этого выражения характеризует расход электромагнитной энергии за единицу времени, правая часть показывает, на что расходуется за единицу времени заключенная в объеме энергия.

Импульс электромагнитной волны

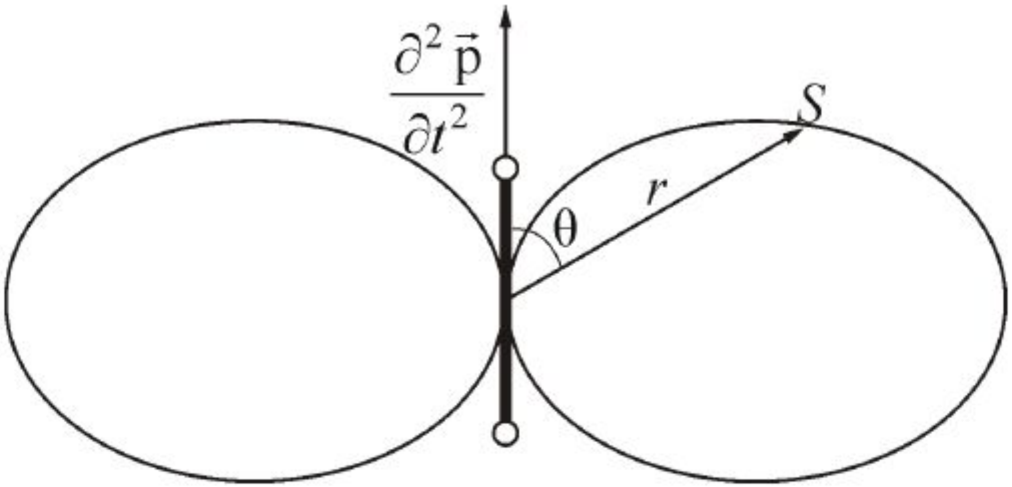
$$\boxed{p = w/c,}$$

где p и w — *плотности* импульса и энергии,

Умножив числитель и знаменатель на скорость света, получим:

$$\boxed{\mathbf{p} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]/c^2.}$$

Излучение диполя



Как показывает теория, мощность излучения P диполя определяется формулой

$$P = \alpha \ddot{\mathbf{p}}^2 ,$$

где $\alpha = \mu_0/6\pi c$ (СИ). Зная зависимость $\mathbf{p}$ от t, получим:

$$P = \alpha\omega^4 p_m^2 \cos^2 \omega t.$$

средняя по времени мощность излучения диполя

$$\boxed{\langle P \rangle = (\alpha/2)\,\omega^4 p_m^2 .}$$

Далее
Факультативный материал

Выражение полевых электромагнитных величин через «материальные»

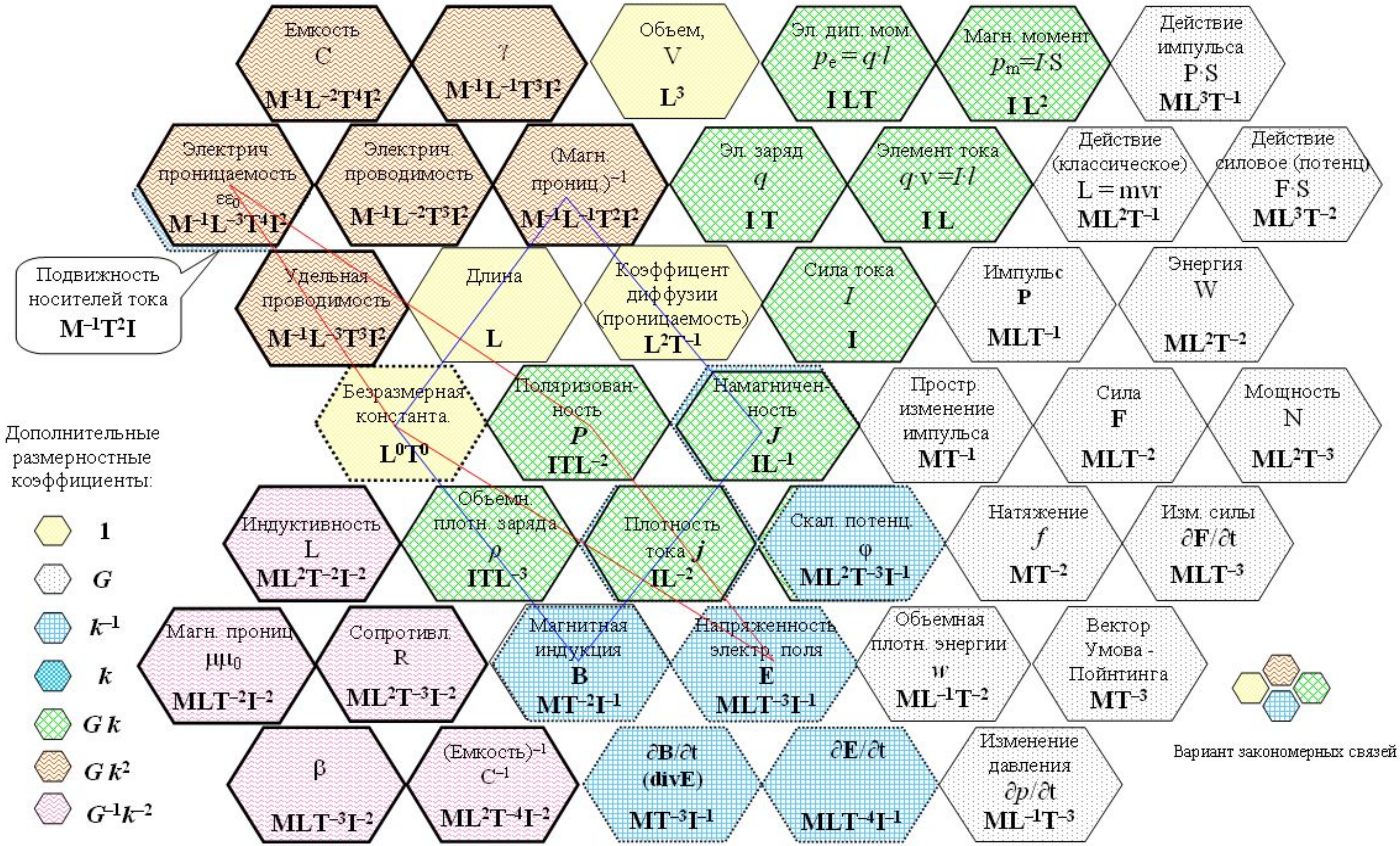
$$\vec{E} = \frac{\vec{P}_B}{\varepsilon_0}; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_B$$

$$\vec{s} = \frac{\vec{J}_{\text{в}} \times \vec{P}_{\text{в}}}{\varepsilon_0}.$$

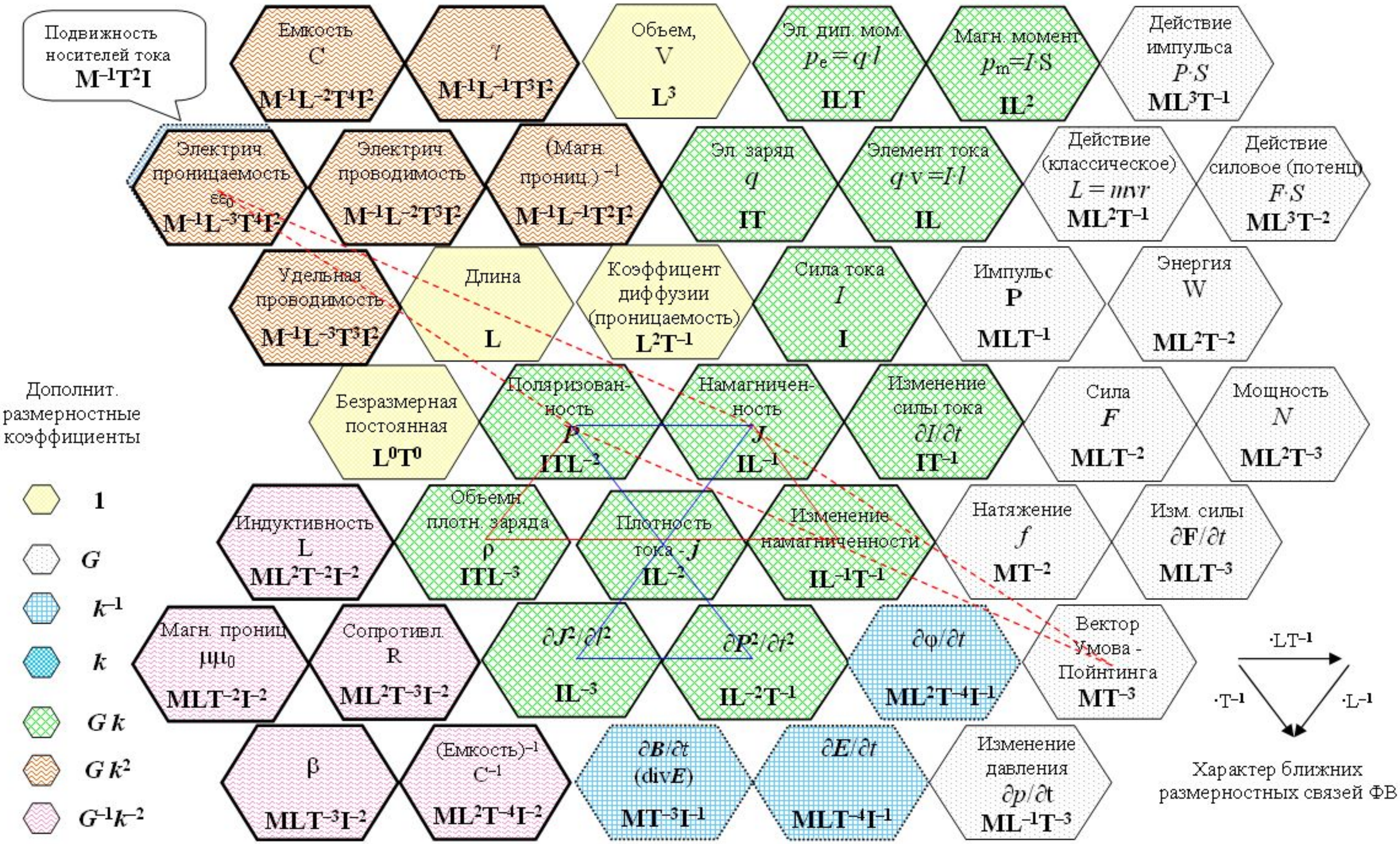
$$\Delta \vec{J}_B = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{P}_B}{\partial t^2},$$

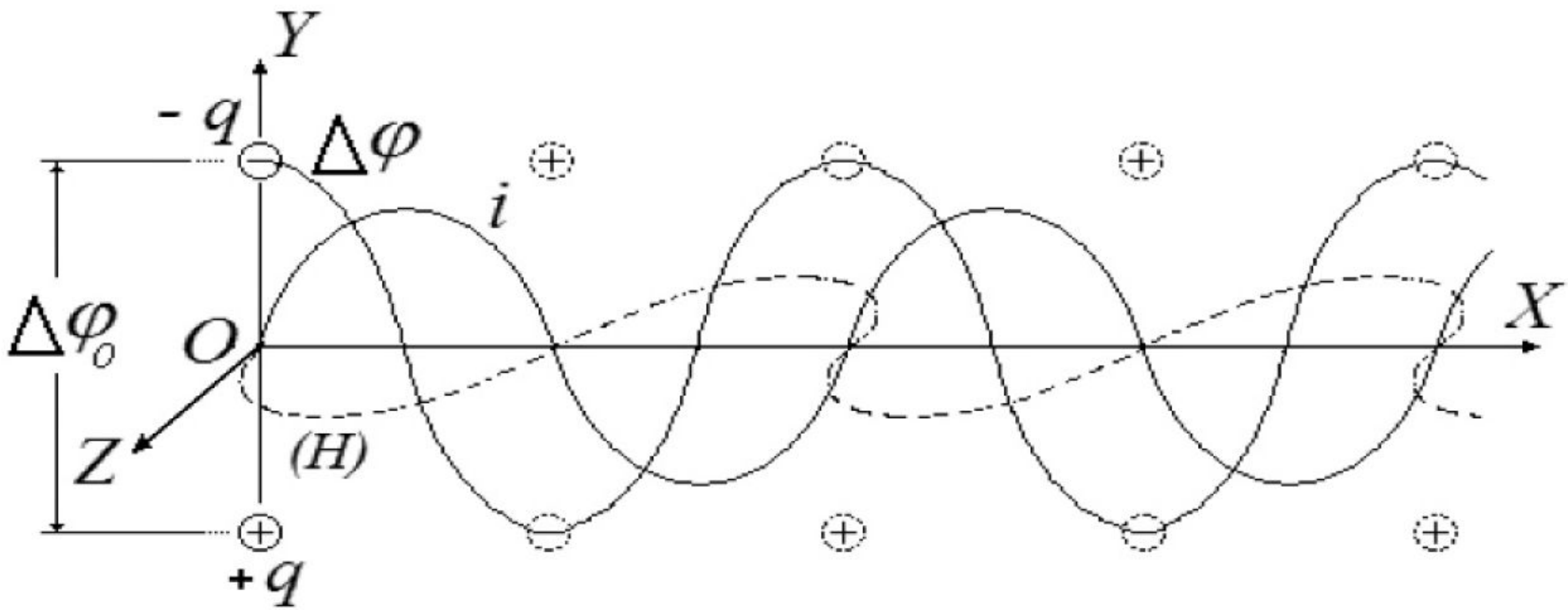
где: Δ - оператор Лапласа.

Схема образования полевых электромагнитных величин из соотношения материальных



Системные соотношения с участием физических величин
поляризованность и *намагниченность*





Изображение электромагнитной волны по Канну

Наименование параметра или соотношения	Полевая форма представления	Возможные соотношения с участием «материальных» ФВ
Взаимосвязь полевых ФВ с «материальными» электромагнитными величинами	$\vec{E} = \dfrac{\vec{P}_B}{\varepsilon_0}; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_B$	
Объемная плотность электрической энергии	$w = \dfrac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2}$	$w = \dfrac{\vec{P}_{\text{в}}^2}{2\varepsilon_0}$
Объемная плотность магнитной энергии	$w = \dfrac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$	$w = \dfrac{\mu_0 \vec{J}_{\text{в}}^2}{2}$
Объемная плотность электромагнитной энергии	От 0 до $\dfrac{\varepsilon_0 \vec{E}_{\max}^2}{2} + \dfrac{\vec{B}^2{}_{\max}}{2\mu_0}$	$w = \dfrac{J_{\text{в}} \cdot P_{\text{в}}}{R_{\text{в}}^{-1}}$
Вектор Умова-Пойнтинга	$\vec{s} = \dfrac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$	$\vec{s} = \dfrac{\vec{J}_{\text{в}} \times \vec{P}_{\text{в}}}{\varepsilon_0}$

Соотношения между разнотипными изменяющимися величинами	$div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$; для волн в вакууме $= 0$	$div\vec{P} = \rho'_q = -\dfrac{1}{c}\left\|\vec{j}_{\text{см}}\right\|$; для волн в вакууме $\neq 0$
	$rot\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$rot\vec{P}_{\text{в}} = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{J}_{\text{в}}}{\partial t}$
	$div\vec{B} = 0$	$div\vec{J}_{\text{в}} = -\dfrac{\partial\left\|\vec{P}_{\text{в}}\right\|}{\partial t} = \left\|\vec{j}'_{\text{см}}\right\|$
	$rot\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$	$rot\vec{J}_{\text{в}} = \vec{\omega}\times\vec{P}_{\text{в}} = \vec{j}''_{\text{см}}$
	$\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = c^2 rot\vec{B}$	$\dfrac{\partial\vec{P}_{\text{в}}}{\partial t} = rot\vec{J}_{\text{в}}$
	$\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -rot\vec{E}$	$\dfrac{\partial\vec{J}}{\partial t} = -c^2 rot\vec{P}_{\text{в}}$
Одномерное волновое уравнение с первыми производными	$\dfrac{\partial E}{\partial x} = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$	$\dfrac{\partial P_B}{\partial x} = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial J_B}{\partial t}$
Одномерные волновые уравнения с вторыми производными	$\dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ $\dfrac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 B}{\partial t^2}$	$\dfrac{\partial^2 P_B}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 P_B}{\partial t^2}$ $\dfrac{\partial^2 J_B}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 J_B}{\partial t^2}$

СИСТЕМА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ