Геодезические измерения

Погрешности измерений

Измерения и их погрешности

Измерения играют весьма важную роль во всех областях науки и техники; они дают количественную информацию об объектах и явлениях, происходящих в природе, позволяют устанавливать происходящие в ней закономерности. Основным содержанием геодезических работ является измерение физических величин (горизонтальных и вертикальных углов, линий и др.).

В общем смысле *физическая величина* является характеристикой одного из свойств физического объекта (явления, процесса), общей в качественном отношении для ряда физических объектов, но в количественном выражении индивидуальной для каждого из них.

Измерение физических величин представляет собой познавательный процесс, заключающийся в сравнении данной величины с другой известной величиной, принятой за единицу меры (эталон). В Рекомендациях по межгосударственной стандартизации 29-99 «ГСИ. Метрология. Основные термины и определения» дается следующее определение измерения: *«Измерение — совокупность операций по применению технического средства, хранящего единицу физической величины, обеспечивающих нахождение соотношения (в явном или неявном виде) измеряемой величины с ее единицей и получение значения этой величины».*

Погрешности измерений можно классифицировать по двум признакам: *по источнику происхождения; по характеру их действия на результаты измерений и свойствам.*

По источнику происхождения различают погрешности *средства измерения* (приборные), *личные* (субъективные), *внешние* и *метода измерений*. ***Погрешности средства измерения*** возникают от несовершенства применяемых приборов и вследствие невозможности их точной юстировки. ***Личные погрешности*** являются следствием физиологических особенностей наблюдателя. ***К внешним*** относятся погрешности, вызываемые воздействием внешних условий измерений (температуры, давления, влажности, скорости ветра, освещенности, рефракции и т. п.) на объект измерения, на измерительный комплекс и на самого наблюдателя. ***Погрешности метода измерения*** вызываются несовершенством принятого метода измерения величины.

По характеру действия погрешностей на результаты измерений их разделяют на *грубые*, *систематические* и *случайные*.

Погрешностью измерения называется разность между результатом измерения l и истинным значением измеренной величины L:

$$\Delta = l - L. \tag{22}$$

Истинное (абсолютно точное) значение измеряемой величины получить невозможно, даже используя приборы самой высокой точности и самую совершенную методику измерений. Лишь в отдельных случаях может быть известно теоретическое значение величины. Накопление погрешностей приводит к образованию расхождений между результатами измерений и действительными их значениями.

*Разность суммы практически измеренных (или вычисленных) величин и теоретического ее значения называется **невязкой**.* Например, теоретическая сумма углов в плоском треугольнике равна 180°, а сумма измеренных углов оказалась равной 180°02′; тогда погрешность суммы измеренных углов составит +0°02′. Эта погрешность будет *угловой невязкой* треугольника.

Одно значение погрешности Δ не может характеризовать точность измерений, поскольку при повторных измерениях будут получены различные значения измеряемой величины l_i, а следовательно, и погрешности Δ_i. Поэтому в качестве обобщенной характеристики точности многократных измерений величины принимают ***среднюю квадратическую погрешность***, определяемую по формуле Гаусса

$$m = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2}{n}}, \tag{23}$$

где n — число измерений.

Погрешности Δ и m называются *абсолютными* и используются для оценки точности измерений, не зависящих от значения измеряемой величины (например, от величины измеряемого угла). Однако абсолютные погрешности не всегда наглядно характеризуют точность измерений, особенно результатов измерений линейных величин, погрешности которых зависят от длин линий. В таких случаях используют понятие *относительной погрешности*.

Относительной погрешностью *называется отношение абсолютной погрешности к измеренной величине*. Она выражается правильной (аликвотной) дробью, числитель которой равен единице. Например, линия длиной $l = 165{,}12$ м измерена с абсолютной погрешностью $m_l = 0{,}11$ м. Тогда относительная погрешность

$$f_{отн} = \frac{m_l}{l} = \frac{1}{l : m_l} = \frac{0{,}11\ м}{165{,}12\ м} = \frac{1}{1500}.$$

Для определения допустимости расхождений между значениями неоднократно измеренной величины либо невязок используют понятие *предельной погрешности*.

Предельной погрешностью *называется такое значение случайной погрешности, появление которого при данных условиях измерений маловероятно.* Установлено, что случайная погрешность измерения может превысить среднюю квадратическую примерно в 32 случаях из 100, удвоенную среднюю квадратическую погрешность — в 4 случаях из 100, утроенную — в 3 случаях из 1000. Следовательно, достаточно маловероятно, что случайная погрешность измерения превысит утроенную среднюю квадратическую. Поэтому при топографо-геодезических работах за предельную допустимую величину погрешности обычно принимают утроенную среднюю квадратическую погрешность, т. е.

$$m_{пред} = 3m.$$

При выполнении особо ответственных измерений предельную допустимую величину погрешности ограничивают величиной

$$m_{пред} = 2m.$$

Любое геодезическое измерение выполняется при наличии и взаимодействии пяти необходимых факторов: объекта измерений, исполнителя, прибора, метода измерения и внешней среды. Под внешней средой понимают совокупность всех внешних условий измерений: рельеф и грунт местности, растительный покров, температура, влажность и запыленность воздуха, освещение, ветер, облачность и др. Конкретное содержание этих факторов в процессе измерения определяет так называемые ***условия измерения***.

С условиями измерений связаны понятия *равноточных* и *неравноточных* измерений. Измерения, выполняемые при неизменных условиях, позволяющих считать результаты измерений одинаково надежными, называют ***равноточными***. Если хотя бы один из факторов, определяющих содержание условий измерений, будет изменяться, то такие измерения называют ***неравноточными***.

При вычислительной обработке результатов измерений выделяют *необходимые* и *избыточные* (добавочные) измерения. ***Необходимыми*** называют такие измерения, которые позволяют получить единственный результат прямого или косвенного измерения данной величины. ***Избыточные*** измерения позволяют получить два и более значений определяемой величины. Если одна и та же величина измерена n раз, то одно из этих измерений будет необходимым, а остальные $(n - 1)$ измерения — избыточные. Например, длина линии местности измерена в прямом и обратном направлениях; в этом случае второе измерение является избыточным. В геодезической практике избыточные измерения являются средством контроля и повышения точности результатов измерений и позволяют судить о качестве измерений.

Внешние условия измерений, методы и средства измерений обуславливают разделение измерений на независимые и зависимые. ***Независимыми*** считают измерения, в которых отсутствуют погрешности, одинаково искажающие результаты этих измерений. Геодезические измерения, выполненные разными наблюдателями, приборами и методами, в различных внешних условиях являются независимыми.

Погрешности равноточных измерений

Пусть имеется ряд равноточных измерений $l_1, l_2, ..., l_n$, в каждом из которых присутствуют случайные погрешности $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$. Как показывает опыт обработки результатов геодезических наблюдений, случайные погрешности равноточных измерений обладают рядом свойств, которые проявляются в достаточно большом ряде измерений.

1. *Свойство ограниченности* — по абсолютной величине погрешности не превосходят некоторого предела.

2. *Свойство симметричности* — положительные и отрицательные погрешности, равные по абсолютной величине, встречаются в ряду измерений одинаково часто.

3. *Свойство унимодальности* — погрешности, большие по абсолютной величине, встречаются в ряду измерений реже, чем погрешности меньшие.

4. *Свойство компенсации* — среднее арифметическое из значений случайных погрешностей при неограниченном возрастании ряда измерений стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{[\Delta]}{n} = 0, \qquad (2)$$

где [ ] — знак суммы, введенный Гауссом.

Средней погрешностью называется среднее арифметическое из абсолютных величин случайных погрешностей:

$$\theta = \frac{[|\Delta|]}{n}. \qquad (3)$$

Необходимо отметить, что средняя погрешность сглаживает влияние больших по абсолютной величине погрешностей, т. е. точность измерений оказывается несколько преувеличенной.

Вероятной погрешностью r называется величина, больше и меньше которой по абсолютной величине погрешности в ряду измерений равновозможны. Иными словами, вероятная погрешность делит пополам ряд случайных погрешностей, расположенных в порядке возрастания их абсолютных значений.

Основным критерием точности измерений является ***средняя квадратическая погрешность***, определяемая по формуле Гаусса

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}. \qquad (4)$$

Кривая погрешностей, представленная графически на рис. 1, обладает следующими свойствами.

1. Ордината $y = f(\Delta)$ при любых значениях Δ не принимает отрицательных значений и не обращается в нуль, т. е. $y > 0$.

2. Кривая погрешностей симметрична относительно оси Oy, так как значения ординат для одинаковых по абсолютной величине положительных и отрицательных Δ равны.

3. При $\Delta = 0$ ордината y принимает максимальное значение, равное

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}.$$

4. Кривая погрешностей имеет две точки перегиба (слева и справа от оси Oy) при $|\Delta| = m$.

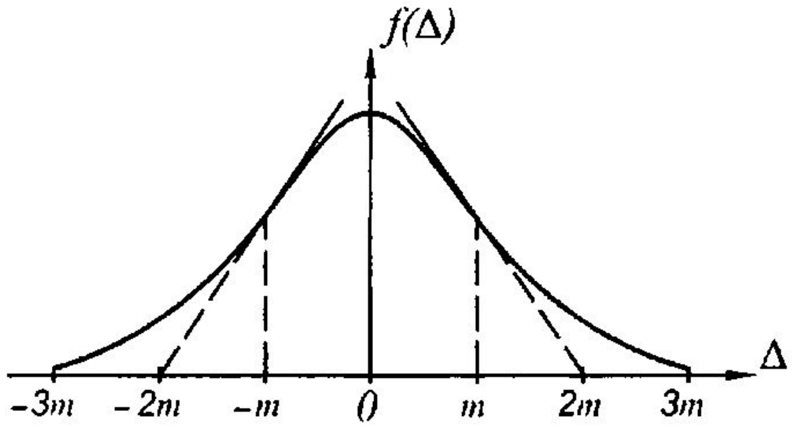

Рис. 1. *Кривая нормального распределения случайных погрешностей*

5. Касательные к кривой в точках перегиба пересекаются с осью абсцисс в точках $|\Delta| = 2m$.

Принципиальное отличие средней квадратической погрешности m от среднего квадратического отклонения σ состоит в том, что σ — постоянная теоретическая величина, характеризующая бесконечную совокупность данного вида измерений, а погрешность m является величиной эмпирической, получаемой при ограниченном числе испытаний. С увеличением числа испытаний $m \to \sigma$. Следовательно, средняя квадратическая погрешность m является оценкой (приближенным значением) неизвестного среднего квадратического отклонения σ.

Поскольку ряд измерений, из которого находится средняя квадратическая погрешность m, является конечным, значение самой этой погрешности определится с некоторой погрешностью

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}. \tag{7}$$

Величина m_m является оценкой точности определения средней квадратической погрешности m.

При большом числе измерений существуют устойчивые зависимости между рассмотренными критериями точности:

$$m = 1{,}23\theta; \tag{8}$$

$$m = 1{,}48r. \tag{9}$$

По форме числового выражения все погрешности разделяют на *абсолютные* и *относительные*.

Абсолютные (средние, средние квадратические, вероятные и предельные) ***погрешности*** выражаются в тех же единицах, что и измеряемые величины; обычно они используются для оценки точности измерений, не зависящих от значения измеряемой величины (например, от величины измеряемого угла). Однако абсолютные погрешности не всегда наглядно характеризуют точность измерений, особенно результатов непосредственных измерений линейных величин, погрешности которых зависят от длин линий. В таких случаях используют понятие относительной погрешности.

Относительной погрешностью называется отношение абсолютной погрешности к измеренной величине. Она выражается правильной дробью, числитель которой равен единице. Например, если линия длиной l измерена с абсолютной средней квадратической погрешностью m_l, то относительная погрешность

$$f_{отн} = \frac{m_l}{l} = \frac{1}{l : m_l} = \frac{1}{N}. \tag{10}$$

Средние квадратические погрешности функций измеренных величин

Пусть задана функция общего вида $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, аргументы которой независимо измерены со средними квадратическими погрешностями $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Выразим величины функции и аргументов через их истинные значения и погрешности в виде

$$Y + \Delta y = f\left(X_1 + \Delta x_1,\quad X_2 + \Delta x_2, \ldots, X_n + \Delta x_n\right). \tag{11}$$

Поскольку погрешности $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ малы по сравнению с измеренными величинами, то, разложив выражение (11) в ряд Тейлора, можно ограничиться при разложении членами, содержащими только первые степени погрешностей, т. е.

$$Y + \Delta y = f\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n, \tag{12}$$

где $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ — частные производные функции по аргументам x_i.

Переход от соотношения (11) к выражению (12) называется приведением функции к линейному виду.

Поскольку $Y = f\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$, то из уравнения (12) имеем

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n. \tag{13}$$

Переходим от истинных погрешностей к средним квадратическим погрешностям, учитывая, что согласно формуле Гаусса (4)

$$\frac{[\Delta y^2]}{n} = M_y^2, \quad \frac{[\Delta x_i^2]}{n} = m_i^2.$$

Тогда уравнение (16) в окончательном виде запишется как

$$M_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot m_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \cdot m_n^2, \tag{17}$$

т. е. квадрат средней квадратической погрешности функции общего вида независимых аргументов равен сумме квадратов произведений частных производных по каждому аргументу на среднее квадратическое погрешности соответствующих аргументов.

1. *Алгебраическая сумма измеренных величин* $y = x_1 \pm x_2 \pm ... \pm x_{n+k}$, причем $x_1, x_2, ..., x_n$ определены со средними квадратическими погрешностями m_1, m_2, ..., m_n, а $k = const$.

Согласно формуле (17) имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1 \text{ и т. д., а } \frac{\partial f}{\partial k} = 0.$$

Тогда

$$M_y^2 = m_1^2 + m_2^2 + ... + m_n^2. \tag{18}$$

В частном случае, если $m_1 = m_2 = ... = m_n$,

$$M_y = m\sqrt{n}. \tag{19}$$

2. *Произведение двух независимых величин* $y = x \cdot z$, где величины x и z определены соответственно с погрешностями m_x и m_z.

Согласно формуле (17)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z; \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = x.$$

Тогда

$$M_y^2 = x^2 \cdot m_z^2 + z \cdot m_x^2. \tag{20}$$

Для произведения постоянного числа k на измеренную величину x, т. е. для функции $y = k \cdot x$,

$$M_y = k \cdot m_x. \tag{21}$$

3. *Частное двух независимых величин* $y=\frac{x}{z}$, где величины x и z определены соответственно с погрешностями m_x и m_z.

В общем виде

$$M_y^2=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\cdot m_x^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2\cdot m_z^2.$$

Частные производные

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{z};\quad \frac{\partial y}{\partial z}=\frac{x}{z^2}.$$

Тогда

$$M_y^2=\frac{1}{z^2}m_x^2+\frac{x^2}{z^4}m_z^2=\frac{z^2m_x^2+x^2m_z^2}{z^4}. \qquad (22)$$

4. *Линейная функция* $y = k_1x_1 + k_2x_2 + ... + k_nx_n$, где $k_1, k_2, ..., k_n$ — коэффициенты; $x_1, x_2, ..., x_n$ — независимые величины, измеренные с погрешностями $m_1, m_2, ..., m_n$.

Исходя из выражений (18) и (19), формулу средней квадратической погрешности линейной функции можно записать в виде

$$M_y^2 = k_1^2 \cdot m_1^2 + k_2^2 \cdot m_2^2 + ... + k_n^2 m_n^2. \tag{23}$$

Пример 1

Угол измерен двумя полуприемами, в результате чего получены значения угла $\beta_{кл}$ и $\beta_{пл}$. Средняя квадратическая погрешность измерения угла в полуприеме равна 1′, т. е. $m'_{\beta_{кл}} = m'_{\beta_{кп}} = 1'$. Требуется определить среднюю квадратическую погрешность m_β угла, измеренного полным приемом.

Выражение для вычисления среднего значения угла можно записать в виде

$$\beta = \frac{1}{2}\beta_{кл} + \frac{1}{2}\beta_{кп}.$$

Согласно формуле (23)

$$m_\beta^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 m'^2_{\beta_{кл}} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m'^2_{\beta_{кп}}.$$

Поскольку $m'_{\beta_{кл}} = m'_{\beta_{кп}} = m'_\beta$, то

$$m_\beta^2 = \frac{1}{2}m'^2_\beta \text{ и } m_\beta = \frac{m'_\beta}{\sqrt{2}} = \frac{1'}{\sqrt{2}} = 0{,}7'.$$

Пример 2

Для передачи дирекционного угла $\alpha_и$ от исходной стороны на линию съемочного обоснования проложен привязочный ход с числом станций $n=4$, т. е. измерены горизонтальные углы на четырех точках и измерены три линии. Средняя квадратическая погрешность измерения горизонтального угла одним полуприемом $m_\beta = 1'$.

Пример 3

Найти погрешность определения приращения координаты Δx, вычисленного по формуле $\Delta x = d \cdot cos\ \alpha$, если длина стороны $d = 150{,}0$ м измерена со средней квадратической погрешностью $m_d = 0{,}1$м, а дирекционный угол $\alpha = 60°02'$ определен с погрешностью $m_a = 1'$.

Исходя из выражения (17),

$$m^2_{\Delta x} = \left(\frac{\partial f}{\partial d}\right)^2 m_d^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2 = (cos\,\alpha \cdot m_d)^2 + \left(d sin\,\alpha \cdot \frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2,$$

$$m^2_{\Delta x} = (0{,}4995 \cdot 0{,}1)^2 + \left(150 \cdot 0{,}8663 \cdot \frac{1'}{3438'}\right)^2 = 0{,}00392 \text{ м}^2;$$

$$m_{\Delta x} = \sqrt{0{,}00392} = 0{,}06\text{м}.$$

Среднее арифметическое. Средняя квадратическая погрешность среднего арифметического

Пусть в результате равноточных измерений величины, истинное значение X которой известно, получен ряд измеренных значений

$$l_1,\ l_2,\ \dots,\ l_n.$$

Как отмечалось ранее, разности между каждым измеренным значением l и истинным X представляют собой истинные погрешности

$$\Delta_1 = l_1 - X; \quad \Delta_2 = l_2 - X; \quad \dots; \quad \Delta_n = l_n - X. \tag{24}$$

С учетом того, что грубые и систематические погрешности исключены из результатов измерений, истинные погрешности можно считать случайными.

Сложив почленно все левые и правые части равенства в (24), получим

$$[\Delta] = [l] - Xn.$$

Отсюда

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{[l]}{n} - X = \bar{x} - X, \tag{25}$$

Формулу среднего арифметического можно записать в виде

$$\bar{x} = \frac{1}{n} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \ldots + \frac{1}{n} l_n. \qquad (26)$$

Правая часть выражения (26) представляет собой линейную функцию независимых аргументов l_1, l_2, ..., l_n. Тогда в соответствии с формулой (23) средняя квадратическая погрешность среднего арифметического будет

$$M^2 = \frac{1}{n^2} m_1^2 + \frac{1}{n^2} m_2^2 + \ldots + \frac{1}{n^2} m_n^2. \qquad (27)$$

Следовательно, формула (27) примет вид

$$M^2 = n \frac{1}{n^2} m^2,$$

откуда

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}, \qquad (28)$$

т. е. *средняя квадратическая погрешность арифметической середины в* $\sqrt{n}$ *раз меньше средней квадратической погрешности отдельного измерения.*

Вычисление погрешности отдельных измерений по уклонениям от среднего арифметического

Уклонением u ***называется разность между результатом отдельного измерения и среднего арифметического из ряда равноточных измерений***

$$u = l - \bar{x}. \qquad (29)$$

Уклонения обладают следующими свойствами.

1. *Алгебраическая сумма уклонений равна нулю при любом числе измерений*, т. е. $[u] = 0$ (при условии, что ошибка округления равна 0).

Для ряда равноточных измерений можно записать:

$$u_1 = l_1 - \bar{x}; \;\; u_2 = l_2 - \bar{x}; \; \ldots; \; u_n = l_n - \bar{x}.$$

После сложения левых и правых частей равенств получим

$$[u] = [l] - \bar{x}n.$$

Поскольку $[l] = \bar{x}n$, то $[u] = 0$.

Это свойство уклонений используют для контроля правильности вычисления среднего арифметического и уклонений.

2. *Сумма квадратов уклонений результатов измерений от среднего арифметического всегда меньше, чем от любого другого числа*, т. е. $[u^2] = min$.

Рассмотрим функцию

$$y=\left[u'^2\right]=\left[(l-x)^2\right], \tag{30}$$

где x — переменная величина, l_i — результаты измерений, u_i' — уклонения результатов измерений от выбранной величины x.

Для проверки функции на минимум следует взять ее производную и приравнять к нулю, т. е.

$$\frac{\partial y}{\partial x}=2(l_1-x)+(l_2-x)+\ldots+2(l_n-x)=0.$$

Отсюда $[l]=xn$, $\frac{[l]}{n}=\bar{x}$, $x=\bar{x}$.

Следовательно, только при значении $x=\bar{x}$ функция (30) будет иметь минимум, т. е. $\left[u^2\right]=min$.

Для выражения средней квадратической погрешности по уклонениям отдельных измерений от среднего арифметического надо объединить значения истинной и вероятнейшей погрешностей.

Возведя в квадрат каждое из равенств системы уравнений (31) и сложив левые и правые части равенств, получим

$$\left[\Delta^2\right]=\left[u^2\right]+2s[u]+n\left[s^2\right], \tag{32}$$

где $[u]=0$.

Тогда уравнение (32) запишется как

$$\left[\Delta^2\right]=\left[u^2\right]+n\left[s^2\right]. \tag{33}$$

Откуда
$$\frac{\left[\Delta^2\right]}{n}=\frac{\left[u^2\right]}{n}+[s]^2.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = m^2,$$

и заменив истинную погрешность среднего арифметического s ее средним значением M, т. е.

$$M^2 = \frac{m^2}{n},$$

имеем

$$m^2 = \frac{[u^2]}{n} + \frac{m^2}{n}.$$

Из этого выражения получим $nm^2 - m^2 = [u^2]$.

Тогда $m^2 = \dfrac{[u^2]}{n-1}$,

$$m = \sqrt{\frac{[u^2]}{n-1}}, \qquad (34)$$

где $(n-1)$ — число избыточных измерений.

Выражение (34) называют ***формулой Бесселя***.

Величина m характеризуется средней квадратической погрешностью

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \qquad (35)$$

С учетом выражения $M = \frac{m}{\sqrt{n}}$ средняя квадратическая погрешность среднего арифметического определится как

$$M = \sqrt{\frac{[u^2]}{n(n-1)}}. \qquad (36)$$

При $n>10$ результаты оценки m по формуле Бесселя приближаются к результатам оценки по формуле Гаусса.

Для оценки точности угловых измерений на пунктах триангуляции величина m обычно вычисляется по формуле Петерса.

Формула Петерса может быть получена из формул Гаусса (4) и Бесселя (34), выражающих среднюю квадратическую погрешность результата отдельного измерения. При большом числе измерений

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} \cong \sqrt{\frac{[u^2]}{n-1}}. \tag{37}$$

Возведем в квадрат левую и правую части выражения (37) и приведем его к общему знаменателю:

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = \frac{[u^2]}{n-1}; \qquad [\Delta^2]\cdot(n-1) = [u^2]\cdot n,$$

или

$$[\Delta^2] = [u^2]\cdot\frac{n}{n-1}. \tag{38}$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей уравнения (38), получим приближенно:

— для отдельного измерения

$$|\Delta| \approx |u|\sqrt{\frac{n}{n-1}};$$

— для всего ряда измерений

$$[|\Delta|] = [|u|]\cdot\sqrt{\frac{n}{n-1}}. \tag{39}$$

Разделив уравнение (39) на число измерений n, имеем

$$\frac{[|\Delta|]}{n} = \frac{[|u|]}{\sqrt{n(n-1)}}, \tag{40}$$

где $\frac{[|\Delta|]}{n} = \theta$, т. е. средняя погрешность.

$$\theta = \frac{[|u|]}{\sqrt{n(n-1)}} \text{ — } \textbf{\textit{формула Петерса}}. \qquad (41)$$

Учитывая, что средняя погрешность θ связана со средней квадратической погрешностью m соотношением $m = 1{,}25\ \theta$, формула (41) запишется в виде

$$m = \frac{1{,}25}{\sqrt{n(n-1)}} \cdot [|u|]. \qquad (42)$$

Формулу (42) можно упростить, принимая приближенно $n(n-1) \approx (n-0{,}5)^2$; тогда

$$m = \frac{1{,}25\,[|u|]}{n-0{,}5}. \qquad (43)$$

Обработка результатов равноточных измерений

Обработка результатов измерений одной и той же величины имеет целью нахождение наиболее надежного значения измеренной величины и оценку его точности.

Обработку рядов равноточных измерений проводят в следующей последовательности.

1. Находят наиболее надежное (вероятнейшее) значение измеренной величины, т. е. ее среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{[l]}{n}.$$

Вычисления удобно выполнять с использованием «остатков» ε по формуле

$$\bar{x} = l_0 + \frac{[\varepsilon]}{n}, \tag{44}$$

где $\varepsilon_1 = l_1 - l_0$; $\varepsilon_2 = l_2 - l_0; \ldots$; $\varepsilon_n = l_n - l_0$.

В качестве l_0 рекомендуется выбирать наименьший результат из ряда измерений $l_1, l_2, \ldots, l_n$; в этом случае всегда остатки $\varepsilon \geq 0$.

2. Вычисляют уклонения результата каждого измерения от среднего арифметического

$$u_i = l_i - \bar{x}.$$

3. Найденные значения среднего арифметического $\bar{x}$ и уклонений u контролируют равенством $[u]=0$.

Если значение среднего арифметического получено с округлением, то контроль выполняют как

$$[u] = -n \cdot \omega_0,$$

где ω_0 — погрешность округления $\bar{x}$.

4. Вычисляют и контролируют величину $[u^2]$ по формуле

$$[u^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n},$$

или

$$[u^2] = [u\varepsilon] + [u] \cdot (l_0 - \bar{x}).$$

5. Вычисляют среднюю квадратическую погрешность отдельного измерения по формуле Бесселя

$$m = \sqrt{\frac{[u^2]}{n-1}}.$$

$$m = \sqrt{\frac{[u^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,54}{8-1}} = 0,28'' \approx 0,3'';$$

$$m = \frac{1,25 \cdot [|u|]}{\sqrt{n(n-1)}} = \frac{1,25 \cdot 1,8}{\sqrt{8(8-1)}} = 0,30'' \approx 0,3'';$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{0,28}{\sqrt{8}} = 0,10'' \approx 0,1'';$$

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{0,28}{\sqrt{2(8-1)}} = 0,07'' \approx 0,1'';$$

$$m_M = \frac{M}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{0,10}{\sqrt{2(8-1)}} = 0,03''.$$

Ответ: 84° 36′ 19,0″ с M ≈ 0,1″.

Оценка точности по разностям двойных равноточных измерений

В практике геодезических измерений в целях контроля и повышения точности каждую величину измеряют независимо несколько раз. При этом часто ограничиваются двумя измерениями, поэтому такие измерения называют *двойными*. Примерами двойных измерений могут служить измерения длин линий мерной лентой в прямом и обратном направлениях, измерения углов двумя полуприемами, определение превышений методом геометрического нивелирования по двум сторонам рейки или двумя нивелирами одновременно и т. п. Чем точнее выполнены двойные измерения, тем ближе будет сходимость результатов в каждой паре измерений.

Пусть имеем ряд парных равноточных измерений l_1' и l_1'', l_2' и l_2'', ..., l_n' и l_n''. Разности двойных измерений будут:

$$
\begin{aligned}
&d_1 = l_1' - l_1'';\\
&d_2 = l_2' - l_2'';\\
&\ldots\ldots\ldots;\\
&d_n = l_n' - l_n'';\\
&m_{e'} = m_{e''} = m_e = m.
\end{aligned}
$$

Если измерения были бы безошибочными, то каждая из этих разностей равнялась бы нулю. Следовательно, истинное значение каждой разности будет равно нулю, а величину d_i можно рассматривать как «измеренное значение» этой разности, т. е. $d_i - 0 = d_i$. Иными словами, истинные погрешности разностей равны самим разностям d_i.

Если $\frac{[d]}{n}=0$, то в соответствии с четвертым свойством случайных погрешностей измерений разности d_i есть погрешности случайного характера. Тогда средняя квадратическая погрешность одной такой разности определится по формуле Гаусса как

$$m_d=\sqrt{\frac{[d^2]}{n}}, \tag{45}$$

где n — число всех разностей.

Погрешность одной разности из двух равноточных измерений

$$m_d=m\sqrt{2},$$

где m — погрешность отдельного измерения.

Отсюда

$$m=\frac{m_d}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \tag{46}$$

Если $\frac{[d]}{n}$ отличается от нуля, то можно предположить, что результаты измерений содержат остаточную систематическую погрешность, которую следует исключить из разностей двойных измерений.

Средняя систематическая погрешность одной разности

$$\delta_c = \frac{[d]}{n}.$$

Величину δ_c необходимо учитывать, если соблюдается неравенство

$$|[d]| \geq 0{,}25\,[|d|]. \tag{47}$$

Исключив из каждой разности двойных измерений систематическую погрешность δ_{c}, имеем:

$$d'_1 = d_1 - \delta_c; \quad d'_2 = d_2 - \delta_c; \ \ldots; \quad d'_n = d_n - \delta_c,$$

где $d'_1, d'_2, \ldots, d'_n$ — уклонения разностей от их арифметической середины δ_{c}, следовательно, они являются вероятнейшими погрешностями этих разностей.

$$\delta_c = \frac{[d]}{n} = \frac{+14}{10} = +1,4 \text{ мм};$$

$\left|[d]\right| = 14,0 > 0,25 \cdot \left[|d|\right] = 8$, следовательно, δ_c нужно исключить из значений разностей $\boldsymbol{d}$.

$$m_{d'} = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{98,4}{10-1}} = 3,3 \text{ мм},$$

$$m_h = \frac{m_{d'}}{\sqrt{2}} = \frac{3,3}{\sqrt{2}} = 2,3 \text{ мм}; \; m_{h_{cp}} = \frac{m_h}{\sqrt{2}} = \frac{2,3}{\sqrt{2}} = 1,6 \text{ мм}.$$

Контроль: $[d'^2] = [d^2] - \frac{[d]^2}{n}$; $98,4 = 118,0 - \frac{14^2}{10} = 98,4.$

НЕРАВНОТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Измерения, выполняемые в неодинаковых условиях, характеризуются различными средними квадратическими погрешностями. Поэтому за характеристику степени доверия к результатам измерений логично принять величины, обратно пропорциональные квадратам их средних квадратических погрешностей. Такая величина, характеризующая в численном виде надежность результата, называется ***весом измерения***.

$$p_i = \frac{c}{m_i^2}, \tag{51}$$

где p_i — вес i-го измерения; c — коэффициент пропорциональности, постоянный для всех измерений ряда $c > 0$; m_i — средняя квадратическая погрешность i-го результата измерений.

Для сравнения точности нескольких рядов неравноточных измерений служит средняя квадратическая погрешность μ результата измерения, вес которого принят за единицу, или *средняя квадратическая погрешность единицы веса.*

Для ряда измерений величины l_i $(i = 1, 2, ..., n)$ со средними квадратическими погрешностями m_i примем

$$p_i = l = \frac{\mu^2}{m_l^2} = \frac{c}{m_i^2}. \tag{52}$$

Отсюда следует, что $\mu^2 = c$, что поясняет неравенство $c > 0$. Тогда веса результатов измерений запишутся как

$$p_1 = \frac{\mu^2}{m_1^2};\ p_2 = \frac{\mu^2}{m_2^2}; ...; p_n = \frac{\mu^2}{m_n^2}. \tag{53}$$

Отсюда

$$\mu = m_1\sqrt{p_1} = m_2\sqrt{p_2} = ... = m_n\sqrt{p_n}, \tag{54}$$

т. е. *средняя квадратическая погрешность измерения с весом, равным единице, равна произведению средней квадратической погрешности любого результата измеренной величины на корень квадратный из его веса.*

Веса измерений обладают следующими свойствами.

1. Для данного ряда неравноточных измерений веса можно увеличить или уменьшить в одно и то же число раз.

2. Отношение весов двух измерений обратно пропорционально квадратам их средних квадратических погрешностей.

Пусть $$p_1 = \frac{\mu^2}{m_1^2};\ p_2 = \frac{\mu^2}{m_2^2}.$$

Тогда из отношения весов можно записать

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2}. \tag{55}$$

Полученные значения $L_1, L_2, ..., L_n$ являются неравноточными, так как получены из разного числа измерений и имеют разные веса.

Наиболее надежным значением измеряемой величины из результатов измерений может быть арифметическая середина всех проведенных равноточных измерений

$$\bar{X} = \frac{[l'] + [l''] + ... + [l^{(n)}]}{p_1 + p_2 + ... + p_n},$$

или с учетом выражения (56)

$$\bar{X} = \frac{L_1 p_1 + L_2 p_2 + ... + L_n p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n} = \frac{[Lp]}{[p]}. \quad (57)$$

Величина $\bar{X}$ называется ***весовым средним***, или ***общей арифметической серединой***.

Таким образом, *весовое среднее многократно и неравноточно измеренной величины равно сумме произведений каждого результата измерения на соответствующий вес, деленной на сумму весов.*

Средняя квадратическая погрешность единицы веса, выраженная через уклонения от весового среднего. По аналогии с равноточными измерениями уклонения отдельных результатов l_i измерений от весового среднего (общей арифметической середины) $\bar{X}$ будут являться вероятнейшими погрешностями:

$$u_1 = l_1 - \bar{X}; \quad u_2 = l_2 - \bar{X}; \quad \ldots; \quad u_n = l_n - \bar{X}.$$

Умножив обе части каждого из этих равенств на соответствующий вес p, имеем

$$u_1 p_1 = l_1 p_1 - \bar{X} p_1; \quad u_2 p_2 = l_2 p_2 - \bar{X} p_2; \quad \ldots; \quad u_n p_n = l_n p_n - \bar{X} p_n.$$

Сложив эти равенства, получим

$$[pu] = [pl] - [p] \cdot \bar{X}.$$

Поскольку $[pl] = [p] \cdot \bar{X}$, то

$$[pu] = 0. \qquad (59)$$

Для каждого результата ряда неравноточных измерений можно записать значения истинных Δ погрешностей и уклонений их в виде

$$\Delta = l - X \quad \text{и} \quad u = l - \bar{X},$$

где X — истинное значение измеренной величины; $\bar{X}$ — среднее весовое.

Вычитая из первого уравнения второе, будем иметь

$$\Delta - u = \bar{X} - X = \Delta_{\bar{X}} \approx s_0,$$

где $\Delta_{\bar{X}} = s_0$ — истинная погрешность весового среднего $\bar{X}$.

Отсюда

$$\Delta = u + s_0 .$$

Составим такие равенства для всех результатов неравноточных измерений:

$$\begin{aligned} &\Delta_1 = u_1 + s_0 \qquad \text{с весом } p_1; \\ &\Delta_2 = u_2 + s_0 \qquad \text{с весом } p_2; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ &\Delta_n = u_n + s_0 \qquad \text{с весом } p_n. \end{aligned}$$

Возведем обе части каждого равенства в квадрат, умножим каждый результат на соответствующий вес и, сложив левые и правые части равенств, получим

$$\left[p\Delta^2\right]=\left[pu^2\right]+2s_0\cdot\left[pu\right]+\left[p\right]\cdot s_0^2,$$

где $[pu]=0$.

Тогда $$\left[p\Delta^2\right]=\left[pu^2\right]+s_0^2\cdot\left[p\right].$$

Разделив обе части равенства на число измерений n, получим

$$\frac{\left[p\Delta^2\right]}{n}=\frac{\left[pu^2\right]}{n}+s_0^2\cdot\frac{\left[p\right]}{n}.$$

Согласно выражению (58) $\frac{\left[p\Delta^2\right]}{n}=\mu^2$, тогда

$$\mu^2=\frac{\left[pu^2\right]}{n}+s_0^2\cdot\frac{\left[p\right]}{n}.$$

Подставляя в это выражение значение μ, найденное по формуле Бесселя, получим

$$M_0 = \frac{\sqrt{\dfrac{[pu^2]}{n-1}}}{\sqrt{[p]}} = \sqrt{\frac{[pu^2]}{[p]\cdot(n-1)}}. \qquad (62)$$

Если в формуле весового среднего $\bar{X} = \dfrac{[pl]}{[p]}$ принять все веса равными единице, то получим

$$\bar{X} = \bar{x} = \frac{[l]}{n},$$

т. е. формулу среднего арифметического для равноточных измерений.

Аналогично, если в формуле $M_0 = \dfrac{\mu}{\sqrt{[p]}}$ принять веса равными единице, получим формулу средней квадратической погрешности среднего арифметического для равноточных измерений

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

Следовательно, *формулы для равноточных измерений являются частными случаями общих формул для неравноточных измерений.*

3. Вычисляют уклонения результатов измерений от весового среднего

$$u_i = l_i - \bar{X}\ .$$

Вычисленные значения уклонений u и весового среднего $\bar{X}$ контролируют равенством $[pu] = 0$.

Если значение $\bar{X}$ дается с округлением, то контроль выполняют по формуле

$$[pu] = -[p] \cdot \omega_0 ,$$

где ω_0 — погрешность округления $\bar{X}$.

4. Вычисляют и контролируют величину $[pu^2]$ по формуле

$$[pu^2] = [p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon^2]}{[p]} .$$

5. Определяют среднюю квадратическую погрешность единицы веса и оценивают ее надежность:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pu^2]}{n-1}}\ ; \quad m_{M_0} = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}} .$$

6. Если средние квадратические погрешности отдельных измерений заранее не были известны, то их вычисляют по формуле

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}} .$$

Пример. Угол измерен различным числом приемов n_i в четырех сериях. Известны средние арифметические значения угла в каждой серии измерений $\bar{x}_i$. Произвести полную математическую обработку результатов измерений по данным, приведенным в табл. 4.

Таблица 4

Обработка результатов неравноточных измерений угла

Номер серии	Среднее арифметическое значение угла в серии $\bar{x}_i$	Число приемов n_i	Вес $p = \frac{n}{2}$	ε	$p\varepsilon$	$p\varepsilon^2$	u	pu	pu^2	m_{β_i}
1	78°25′10″	12	6	0″	0″	0	–4,0″	–24,0″	96,0	4,3″
2	16	10	5	+6	+30	180	+2,0	+10,0	20,0	4,7
3	12	6	3	+2	+6	12	–2,0	–6,0	12,0	6,0
4	24	4	2	+14	+28	392	+10,0	+20,0	200,0	7,4
$l_0 = 78^\circ 25' 10''$			16		+64	584		0	328,0	

$$\frac{[p\varepsilon]}{[p]} = \frac{+64}{16} = 4{,}0''; \qquad \omega_0 = 0.$$

$$\bar{X} = l_0 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]} = 78^\circ 25' 10'' + 4{,}0'' = 78^\circ 25' 14{,}0''.$$

$$\text{Контроль: } [pu^2] = [p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon]^2}{[p]} = 584 - \frac{64^2}{16} = 328.$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[pu^2]}{N-1}} = \sqrt{\frac{328{,}0}{4-1}} = 10{,}5'' \approx 10''; \quad m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(N-1)}} = \frac{10{,}5}{\sqrt{6}} = 4{,}3'' \approx 4'';$$

$$M_0 = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{10{,}5}{\sqrt{16}} = 2{,}6'' \approx 3''; \quad m_{M_0} = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{4}{\sqrt{16}} = 1''.$$

Ответ: $78^\circ 25' 14''$, с $M_0 \approx 3''$.

Пусть имеем ряд парных результатов измерений l_1' и l_1'', l_2' и l_2'', ..., l_n' и l_n''; в каждой паре результаты равноточны (имеют один и тот же вес p_i), но каждая пара в ряде измерений неравноточна другим парам. Разность для каждой пары измерений будет

$$d_i = l_i' - l_i'' .$$

Рассматривая разность как алгебраическую сумму измеренных величин, с учетом выражения (66) можно написать

$$\frac{1}{p_d} = \frac{1}{p_{l'}} + \frac{1}{p_{l''}} = \frac{2}{p}.$$

Поскольку разности d можно рассматривать как истинные погрешности Δ, то, применяя формулу (58) для неравноточных измерений, получим среднюю квадратическую погрешность единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}} . \qquad (71)$$

Тогда средняя квадратическая погрешность одного измерения

$$m_l = \frac{\mu}{\sqrt{p_l}}, \tag{72}$$

а средняя квадратическая погрешность среднего результата $l_{cp} = \frac{l' + l''}{2}$ определится как

$$m_{l_{cp}} = \frac{m_l}{\sqrt{2}} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_l}}. \tag{73}$$

Приведенные формулы справедливы в случаях, когда разности двойных измерений не содержат систематических погрешностей, т. е. если $\delta_c = \frac{[pd]}{[p]}$ незначима. Величина δ_c считается значимой, если соблюдается неравенство

$$\left|\left[d\sqrt{p}\right]\right| \geq 0{,}25 \cdot \left[\left|d\sqrt{p}\right|\right].$$

Исключив из каждой разности двойных измерений систематическую погрешность δ_c, получим:

$$d'_1 = d_1 - \delta_c; \quad d'_2 = d_2 - \delta_c; \quad \dots; \quad d'_n = d_n - \delta_c.$$

Полученные разности $d'_1, d'_2, \dots, d'_n$ можно рассматривать как вероятнейшие погрешности измерений с весами $\frac{p_1}{2}, \frac{p_2}{2}, \dots, \frac{p_n}{2}$. Тогда средняя квадратическая погрешность единицы веса определится по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd'^2]}{2(n-1)}}. \tag{74}$$

Формулы оценки точности по результатам двойных неравноточных (так же как и равноточных) измерений преувеличивает точность конечных результатов.