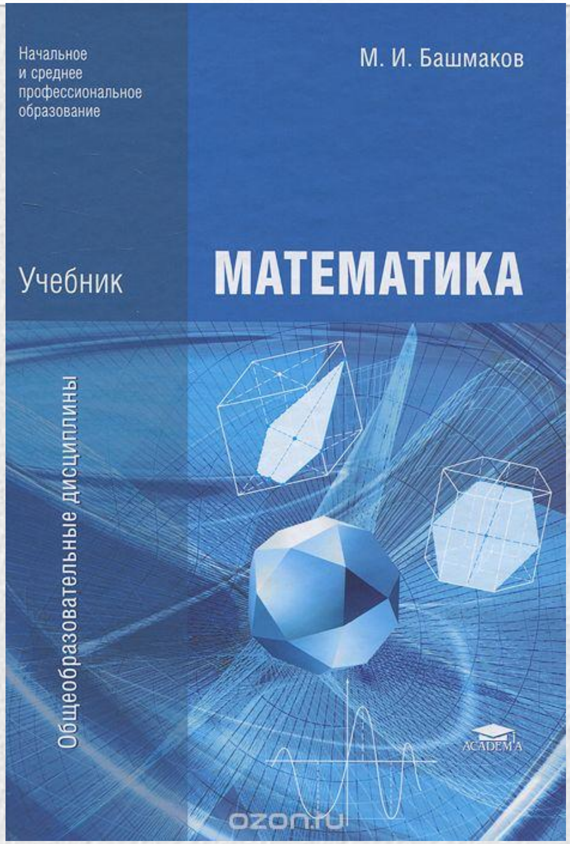
Комплексные числа



Преподаватель математики

Санкт-Петербургский политехнический колледж

Рахаева Елена Анатольевна

Определение: Числа вида ***a+bi,*** где *a и b* – действительные числа, *i* – мнимая единица, называются **комплексными**.

a – действительная часть

bi – мнимая часть

b – коэффициент при мнимой части

Запись комплексного числа в виде

a+bi

называется алгебраической формой

Действия с комплексными числами в алгебраической форме

Сложение комплексных чисел:

Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части:

$$z_1 = a_1 + b_1 i \quad \text{и} \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$\text{тогда } z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$$

<u>Пример</u> $z_1=-4+10i \quad z_2=5+3i$

$$Z = z_1 + z_2 = -4+5+10i+3i = 1+13i$$

Ответ: $Z=1+13i$

Вычитание комплексных чисел

Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:

$$z_1 = a_1 + b_1 i \text{ и } z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$\text{тогда } z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i)$$

<u>Пример</u> $z_1 = -5 + 10i \quad z_2 = 1 + 3i$

$Z = z_1 - z_2 = (-5 + 10i) - (1 + 3i) =$

$= -5 + 10i - 1 - 3i = -6 + 7i$

Ответ: $Z = -6 + 7i$

Умножение комплексных чисел

Правило умножения. Комплексные числа перемножаются как двучлены, при этом учитывается, что $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ – от перестановки множителей произведение не меняется.

$$z_1 = a_1 + b_1 i \quad \text{и} \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + b_1 i \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2$$

<u>Пример</u> $z_1 = 1 - i \quad z_2 = 3 + 6i$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 - i) \cdot (3 + 6i) = 3 + 6i - 3i - 6i^2 = 9 + 3i$$

Ответ: Z=9+3i

Деление комплексных чисел

Деление чисел осуществляется методом умножения знаменателя и числителя на выражение сопряженное знаменателю.

$$\boldsymbol{z_1 = a_1 + b_1 i} \text{ и } \boldsymbol{z_2 = a_2 + b_2 i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)\cdot(a_2 - b_2 i)}$$

Пример: $z_1 = 3 - 2i \qquad z_2 = 4 + 3i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 - 2i}{4 + 3i} = \frac{(3 - 2i)\cdot(4 - 3i)}{(4 + 3i)\cdot(4 - 3i)} = \frac{12 - 8i - 9i + 6i^2}{4^2 - (3i)^2} =$$

$$= \frac{6 - 17i}{16 + 9} = \frac{6 - 17i}{25}$$

Справедливы следующие утверждения:

а) Сумма и разность чисто мнимых чисел есть чисто мнимое число.

Для проверки возьмите числа: Z_1=2i, Z_2= -3i

б) Произведение двух чисто мнимых чисел равно действительному числу.

Для проверки возьмите числа: Z_1= -5i, Z_2=3i

в) Квадрат чисто мнимого числа равен действительному отрицательному числу.

Для проверки возьмите числа: Z_1=10i

г) Произведение чисто мнимого числа на действительное равно чисто мнимому числу.

Для проверки возьмите числа: Z_1=7i, Z_2=3

Закрепление:

Найдите значение выражения:

1) $3i^{102} + 4i^{43}$

2) $5i^{53} - 2i^{60}$

3) $2i^{12} - 3i^{13} + 5i^{14} - 4i^{15}$

4) $2i^{12} \cdot 3i^{13} \cdot 5i^{14} \cdot 4i^{15}$

5) $(4i + 7) + (2 - 6i)$

6) $(8 + 3i) - (5i - 2)$

7) $(5 + 2i) \cdot (4 - 7i)$

8) $(3i - 1) \cdot (5 + 2i)$

9) $\dfrac{3i - 1}{5 + 2i}$

10) $\dfrac{4 + 2i}{3 - i}$

Решение:

1) $3i^{102} + 4i^{43} = 3i^{2} + 4i^{3} =$

$= 3 \cdot (-1) + 4 \cdot (-i) = -3 - 4i$

2) $5i^{53} - 2i^{60} = 5i^{1} - 2i^{0} =$

$= 5 \cdot i - 2 \cdot 1 = 5i - 2$

3) $2i^{12} - 3i^{13} + 5i^{14} - 4i^{15} =$

$= 2i^{0} - 3i^{1} + 5i^{2} - 4i^{3} =$

$= 2 \cdot 1 - 3 \cdot i + 5 \cdot (-1) - 4 \cdot (-i) =$

$= 2 - 3i - 5 + 4i = -3 + i$

4) $2i^{12} \cdot 3i^{13} \cdot 5i^{14} \cdot 4i^{15} =$

$= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot i^{12+13+14+15} =$

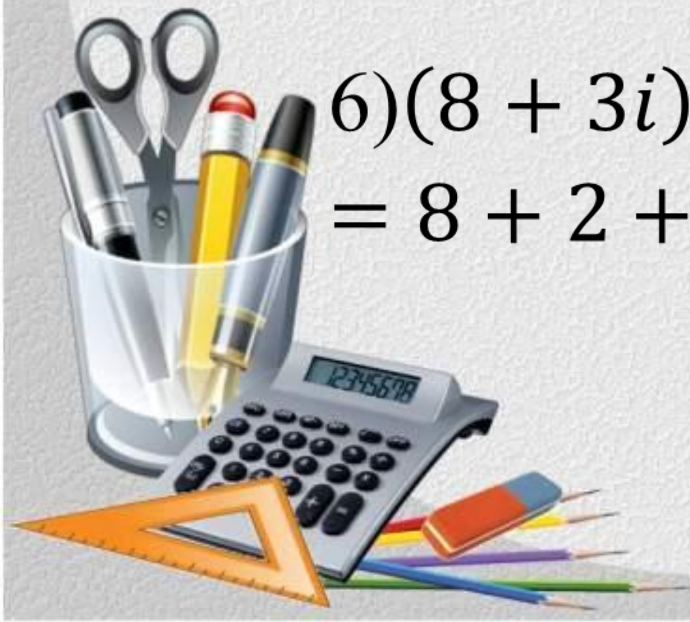
$= 120i^{54} = 120i^{2} = 120 \cdot (-1) = -120$

5)$(4i + 7) + (2 - 6i) = 4i + 7 + 2 - 6i =$

$= 4i - 6i + 7 + 2 = -2i + 9$

6)$(8 + 3i) - (5i - 2) = 8 + 3i - 5i + 2 =$

$= 8 + 2 + 3i - 5i = 10 - 2i$



$$7)(5+2i)\cdot(4-7i)=$$

$$=5\cdot4+5\cdot(-7i)+2i\cdot4+2i\cdot(-7i)=$$

$$=20-35i+8i-14i^2=$$

$$=20-35i+8i-14\cdot(-1)=$$

$$=20-35i+8i+14=34-27i$$

$$8)(3i-1)\cdot(5+2i)=$$

$$=3i\cdot5+3i\cdot2i-1\cdot5-1\cdot2i=$$

$$=15i+6i^2-5-2i=$$

$$=15i+6\cdot(-1)-5-2i=$$

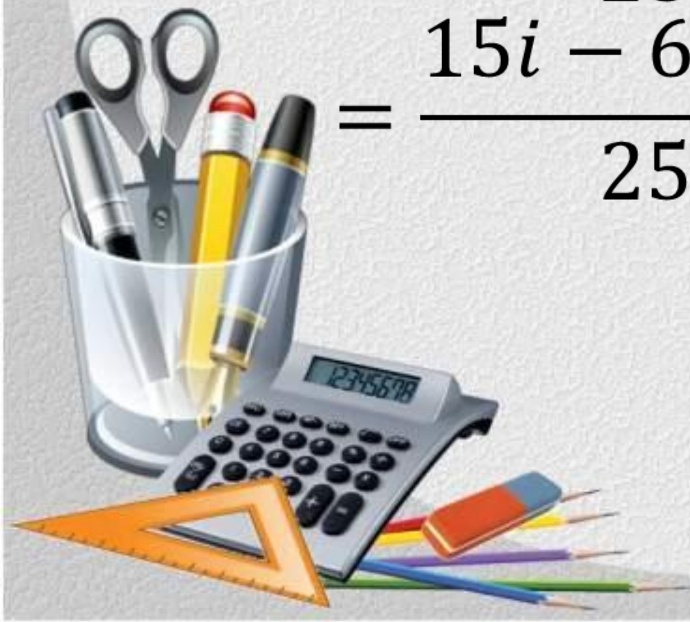
$$=15i-6-5-2i=13i-11$$

$$9)\ \frac{3i-1}{5+2i}=\frac{(3i-1)\cdot(5-2i)}{(5+2i)\cdot(5-2i)}=$$

$$=\frac{3i\cdot 5+3i\cdot(-2i)-1\cdot 5-1\cdot(-2i)}{5^2-(2i)^2}=$$

$$=\frac{15i-6i^2-5+2i}{25-4i^2}=$$

$$=\frac{15i-6\cdot(-1)-5+2i}{25-4\cdot(-1)}=\frac{17i+1}{29}$$



$$10)\ \frac{4+2i}{3-i}=\frac{(4+2i)\cdot(3+i)}{(3-i)\cdot(3+i)}=$$

$$=\frac{4\cdot 3+4\cdot i+2i\cdot 3+2i\cdot i}{3^2-i^2}=$$

$$=\frac{12+4i+6i+2i^2}{9-(-1)}=$$

$$=\frac{12+4i+6i+2\cdot(-1)}{10}=$$

$$=\frac{10i+10}{10}=\frac{10(i+1)}{10}=i+1$$

Задание для самостоятельного решения

1. *Найдите значение выражения:* $4i^{39} + 5i^{34} - 7i^{5}$

2. *Даны числа:* $z_1 = 4i - 7$ $\quad z_2 = 4 + 7i$

Найдите сумму чисел $z_1 + z_2$

3. *Даны числа:* $z_1 = 2 - 5i$ $\quad z_2 = 4i - 1$

Найдите разность чисел $z_1 - z_2$

4. *Даны числа:* $z_1 = 4 + 3i$ $\quad z_2 = 6 - 5i$

Найдите произведение чисел $z_1 \cdot z_2$

5. *Даны числа:* $z_1 = 3i - 5$ $\quad z_2 = 4 + 9i$

Найдите частное чисел $\dfrac{z_1}{z_2}$