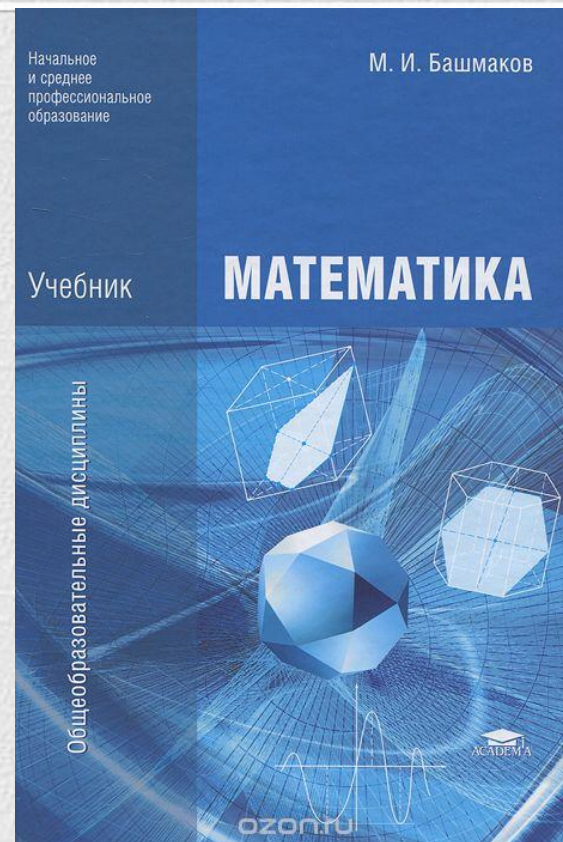


Комплексные числа



Преподаватель математики
Санкт-Петербургский политехнический колледж
Рахаева Елена Анатольевна



Определение: Числа вида $a+bi$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, называются **КОМПЛЕКСНЫМИ**.

a – действительная часть

bi – мнимая часть

b – коэффициент при мнимой части

Запись комплексного числа в виде

$$a+bi$$

называется алгебраической формой



Действия с комплексными числами в алгебраической форме

Сложение комплексных чисел:

Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части:

$$z_1 = a_1 + b_1 i \quad \text{и} \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$
$$\text{тогда} \quad z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2) i$$

Пример $z_1 = -4 + 10i$ $z_2 = 5 + 3i$

$$Z = z_1 + z_2 = -4 + 5 + 10i + 3i = 1 + 13i$$

Ответ: $Z = 1 + 13i$



Вычитание комплексных чисел

Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:

$$z_1 = a_1 + b_1i \text{ и } z_2 = a_2 + b_2i$$

$$\text{тогда } z_1 - z_2 = (a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i)$$

Пример $z_1 = -5 + 10i$ $z_2 = 1 + 3i$

$$\begin{aligned} Z &= z_1 - z_2 = (-5 + 10i) - (1 + 3i) = \\ &= -5 + 10i - 1 - 3i = -6 + 7i \end{aligned}$$

Ответ: $Z = -6 + 7i$



Умножение комплексных чисел

Правило умножения. Комплексные числа перемножаются как двучлены, при этом учитывается, что $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ – от перестановки множителей произведение не меняется.

$$z_1 = a_1 + b_1 i \text{ и } z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 \cdot z_2$$

$$= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + b_1 i \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2$$

Пример $z_1 = 1 - i$ $z_2 = 3 + 6i$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 - i) \cdot (3 + 6i)$$

$$= 3 + 6i - 3i - 6i^2$$

$$= 9 + 3i$$

Ответ: $Z = 9 + 3i$



Деление комплексных чисел

Деление чисел осуществляется методом умножения знаменателя и числителя на выражение сопряженное знаменателю.

$$z_1 = a_1 + b_1i \quad \text{и} \quad z_2 = a_2 + b_2i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i) \cdot (a_2 - b_2i)}$$

Пример: $z_1 = 3 - 2i$ $z_2 = 4 + 3i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 - 2i}{4 + 3i} = \frac{(3 - 2i) \cdot (4 - 3i)}{(4 + 3i) \cdot (4 - 3i)} = \frac{12 - 8i - 9i + 6i^2}{4^2 - (3i)^2} =$$

$$= \frac{6 - 17i}{16 + 9} = \frac{6 - 17i}{25}$$



Справедливы следующие утверждения:

а) Сумма и разность чисто мнимых чисел есть чисто мнимое число.

Для проверки возьмите числа: $Z_1=2i$, $Z_2=-3i$

б) Произведение двух чисто мнимых чисел равно действительному числу.

Для проверки возьмите числа: $Z_1=-5i$, $Z_2=3i$

в) Квадрат чисто мнимого числа равен действительному отрицательному числу.

Для проверки возьмите числа: $Z_1=10i$

г) Произведение чисто мнимого числа на действительное равно чисто мнимому числу.

Для проверки возьмите числа: $Z_1=7i$, $Z_2=3$



Закрепление:

Найдите значение выражения:

1) $3i^{102} + 4i^{43}$

2) $5i^{53} - 2i^{60}$

3) $2i^{12} - 3i^{13} + 5i^{14} - 4i^{15}$

4) $2i^{12} \cdot 3i^{13} \cdot 5i^{14} \cdot 4i^{15}$

5) $(4i + 7) + (2 - 6i)$

6) $(8 + 3i) - (5i - 2)$

7) $(5 + 2i) \cdot (4 - 7i)$

8) $(3i - 1) \cdot (5 + 2i)$

9) $\frac{3i - 1}{5 + 2i}$

10) $\frac{4 + 2i}{3 - i}$



Решение:

$$\begin{aligned} 1) \quad 3i^{102} + 4i^{43} &= 3i^2 + 4i^3 = \\ &= 3 \cdot (-1) + 4 \cdot (-i) = -3 - 4i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 5i^{53} - 2i^{60} &= 5i^1 - 2i^0 = \\ &= 5 \cdot i - 2 \cdot 1 = 5i - 2 \end{aligned}$$

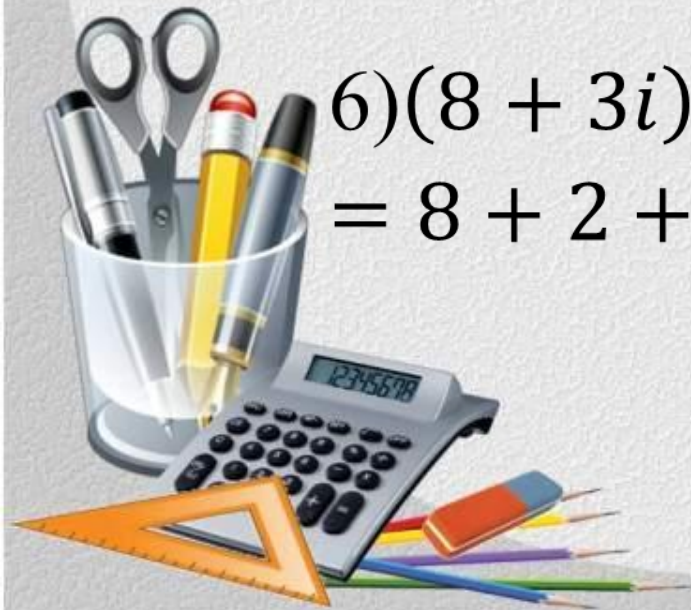
$$\begin{aligned} 3) \quad 2i^{12} - 3i^{13} + 5i^{14} - 4i^{15} &= \\ &= 2i^0 - 3i^1 + 5i^2 - 4i^3 = \\ &= 2 \cdot 1 - 3 \cdot i + 5 \cdot (-1) - 4 \cdot (-i) = \\ &= 2 - 3i - 5 + 4i = -3 + i \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 4) \quad & 2i^{12} \cdot 3i^{13} \cdot 5i^{14} \cdot 4i^{15} = \\ & = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot i^{12+13+14+15} = \\ & = 120i^{54} = 120i^2 = 120 \cdot (-1) = -120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad & (4i + 7) + (2 - 6i) = 4i + 7 + 2 - 6i = \\ & = 4i - 6i + 7 + 2 = -2i + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & (8 + 3i) - (5i - 2) = 8 + 3i - 5i + 2 = \\ & = 8 + 2 + 3i - 5i = 10 - 2i \end{aligned}$$

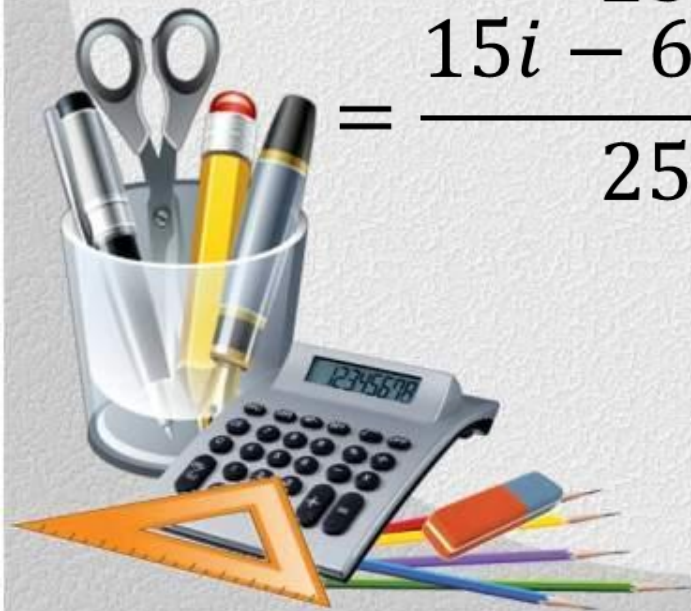


$$\begin{aligned} 7)(5 + 2i) \cdot (4 - 7i) &= \\ &= 5 \cdot 4 + 5 \cdot (-7i) + 2i \cdot 4 + 2i \cdot (-7i) = \\ &= 20 - 35i + 8i - 14i^2 = \\ &= 20 - 35i + 8i - 14 \cdot (-1) = \\ &= 20 - 35i + 8i + 14 = 34 - 27i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8)(3i - 1) \cdot (5 + 2i) &= \\ &= 3i \cdot 5 + 3i \cdot 2i - 1 \cdot 5 - 1 \cdot 2i = \\ &= 15i + 6i^2 - 5 - 2i = \\ &= 15i + 6 \cdot (-1) - 5 - 2i = \\ &= 15i - 6 - 5 - 2i = 13i - 11 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 9) \quad \frac{3i - 1}{5 + 2i} &= \frac{(3i - 1) \cdot (5 - 2i)}{(5 + 2i) \cdot (5 - 2i)} = \\
 &= \frac{3i \cdot 5 + 3i \cdot (-2i) - 1 \cdot 5 - 1 \cdot (-2i)}{5^2 - (2i)^2} = \\
 &= \frac{15i - 6i^2 - 5 + 2i}{25 - 4i^2} = \\
 &= \frac{15i - 6 \cdot (-1) - 5 + 2i}{25 - 4 \cdot (-1)} = \frac{17i + 1}{29}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
10) \frac{4 + 2i}{3 - i} &= \frac{(4 + 2i) \cdot (3 + i)}{(3 - i) \cdot (3 + i)} = \\
&= \frac{4 \cdot 3 + 4 \cdot i + 2i \cdot 3 + 2i \cdot i}{3^2 - i^2} = \\
&= \frac{12 + 4i + 6i + 2i^2}{9 - (-1)} = \\
&= \frac{12 + 4i + 6i + 2 \cdot (-1)}{10} = \\
&= \frac{10i + 10}{10} = \frac{10(i + 1)}{10} = i + 1
\end{aligned}$$



Задание для самостоятельного

1. Найдите значение выражения. **решения** $4i^{39} + 5i^{34} - 7i^5$

2. Даны числа: $z_1 = 4i - 7$ $z_2 = 4 + 7i$

Найдите сумму чисел $z_1 + z_2$

3. Даны числа: $z_1 = 2 - 5i$ $z_2 = 4i - 1$

Найдите разность чисел $z_1 - z_2$

4. Даны числа: $z_1 = 4 + 3i$ $z_2 = 6 - 5i$

Найдите произведение чисел $z_1 \cdot z_2$

5. Даны числа: $z_1 = 3i - 5$ $z_2 = 4 + 9i$

Найдите частное чисел $\frac{z_1}{z_2}$

