Свойства оптимальных смешанных стратегий матричных игр

Теорема 1. Для матричной игры с платёжной матрицей *H* имеют место соотношения

$$I = \max_p \min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i = \min_q \max_i \sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j \ ,$$

причём внешние экстремумы достигаются на оптимальных смешанных стратегиях игроков.

Доказательство. По определению значения игры и теоремы фон Неймана

$$I = \max_p \min_q \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} h_{ij} p_i q_j = \min_q \max_p \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i q_j \ ,$$

Имеем $$\min_q \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} h_{ij} p_i q_j \le \min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i = R(p), \ \forall \ p \ .$$

$$R(p) = \min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i \le \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i \ , \ \ R(p) = \sum_{j=1}^{m} R(p) q_j \le \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i\right) q_j \ , \forall \ q.$$

Отсюда $$\min_q \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} h_{ij} p_i q_j \le \min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i = R(p) \le \min_q \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} h_{ij} p_i q_j \quad .$$

Следовательно, $$\min_q \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} h_{ij} p_i q_j = \min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i \quad .$$

Окончательно, $$I = \max_p \min_q \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i q_j = \max_p \min_j \sum_{j=1}^{m} h_{ij} p_i \ .$$

Аналогично доказывается второе равенство формулировки теоремы.

Теорема 2. Для матричной игры с платёжной матрицей *H* имеют место соотношения

$$\max_i \min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} \le I \le \min_j \max_i \sum_{j=1}^{m} h_{ij} .$$

Доказательство. По теореме 1 .

$$I = \max_p \min_j \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} h_{ij} p_i \ge \max_i \min_j h_{ij} .$$

Аналогично

$$I = \min_q \max_i \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j \le \min_j \max_i h_{ij} .$$

Теорема 3. Если *p* и *q* стратегии игроков, а *v* некоторое число, причём

$$\max_i \sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j \le v \le \min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i ,$$

то *p* и *q* оптимальные стратегии игроков и *I=v*.

Доказательство. Из теоремы 1 имеем

$$\min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i \le I \le \max_i \sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j .$$

Из неравенства в формулировке теоремы получим

$$\min_i \sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j = v = I = \min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i .$$

Следствие 1. Если *p* и *q* стратегии игроков, а *v* – число, причём

$$\sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j \le v \le \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i, \forall i, j.$$

то *p* и *q* оптимальные стратегии и *v=I*.

Следствие 2. Если *p* и *q* стратегии игроков, то для их оптимальности достаточно выполнения неравенства

$$\max_i \sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j \le \min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i.$$

Теорема 4. Каждая пара оптимальных смешанных стратегий игры с платёжной матрицей $H = \left\| h_{ij} \right\|_{m \times n}$ является парой оптимальных смешанных стратегий игры с платёжной матрицей $H' = \left\| h_{ij} + k \right\|_{m \times n}$, где *k* – произвольная константа.

Доказательство. Пусть *p*,q** -пара оптимальных стратегий для игры с платёжной матрицей *H*. Тогда по определению значения игры получим

$$I' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (h_{ij} + k) p_i^* q_j^* = I + k, \quad \sum_{i=1}^{n} (h_{ij} + k) p_i^* = \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i^* + k, \quad \sum_{j=1}^{m} (h_{ij} + k) q_j^* = \sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j^* + k.$$

Получим

$$\sum_{j=1}^{m} (h_{ij} + k) q_j^* \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (h_{ij} + k) p_i^* q_j^* \le \sum_{i=1}^{n} (h_{ij} + k) p_i^*,$$

что по следствию 1 доказывает теорему.

Доминирование стратегий

Пусть конечная игра представлена платёжной матрицей *H*. Говорим, что для первого игрока стратегия p' *доминирует* стратегию p'', если

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ij} p'_i \ge \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p''_i \,, \ j=\overline{1,m} \,.$$

Иными словами для любой чистой стратегии второго игрока выигрыш первого игрока при применении им стратегии p' не меньше выигрыша при применении им стратегии p''. Если все неравенства в системе строгие, то говорим о строгом доминировании, а при наличии хотя бы одного равенства – о нестрогом доминировании.

Аналогично, для второго игрока стратегия q' доминирует стратегию q'', если

$$\sum_{j=1}^{m} h_{ij} q'_j \le \sum_{j=1}^{m} h_{ij} q''_j \,, i=\overline{1,n} \,.$$

При этом говорят о строгом доминировании, если все неравенства строгие, и о нестрогом доминировании в противном случае.

В частности, чистая стратегия A_{i_1} первого игрока доминирует его чистую стратегию A_{i_2}, если

$$h_{i_1 j} \ge h_{i_2 j} \,, \ j=\overline{1,m} \,.$$

Чистая стратегия второго игрока B_{j_1} доминирует чистую стратегию B_{j_2}, если

$$h_{ij_1} \le h_{ij_2} \,, \ i=\overline{1,n} \,.$$

Теорема 1. Если для первого игрока стратегия p' доминирует стратегию p'' и стратегия p'' оптимальна, то стратегия p' также оптимальна.

Доказательство. В силу доминирования выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ij} p'_i \ge \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p''_i \,, \; j = \overline{1,m} \,.$$

Откуда получим

$$\min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p'_i \ge \min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p''_i \;.$$

В силу оптимальности p'' получим $I = \min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p'_i \,.$ Поэтому p' также оптимальна.

Аналогичное утверждение справедливо для стратегий второго игрока.

Лемма 1. Если чистая стратегия A_{i_0} первого игрока строго (нестрого) доминируется его стратегией *p*, отличной от стратегии A_{i_0}, то для стратегии A_{i_0} существует строго (нестрого) доминирующая стратегия p' с вероятностью $p'_{i_0} = 0$.

Доказательство. Так как стратегия *p* отлична от чистой стратегии A_{i_0}, то $p_{i_0} < 1$. По вектору *p* составим вектор p' с компонентами $p'_{i_0} = 0, \; p'_i = \dfrac{p_i}{1 - p_{i_0}}, \; i \ne i_0$. Очевидно, p' является стратегией первого игрока с нулевой вероятностью применения чистой стратегии A_{i_0}.

Из условия строгого доминирования получим $\sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i > \sum_{i=1}^{n} h_{i_0 j} p_i \,, \; \forall j \,.$ Разделив обе части на $1 - p_{i_0} > 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ij} p'_i > h_{i_0 j} \;, \; \forall j \;.$$

.

Теорема 2. Если чистая стратегия A_{i_0} первого игрока строго доминируется его стратегией

p, то A_{i_0} входит с нулевой вероятностью в любую оптимальную стратегию.

Если чистая стратегия A_{i_0} нестрого доминируется его стратегией *p*, отличной от стратегии A_{i_0}, то существует оптимальная стратегия первого игрока, в которую входит с

нулевой вероятностью.

Доказательство. Рассмотрим случай строгого доминирования. Пусть игра задаётся

платёжной матрицей *H*. Предположим, что существует оптимальная стратегия p^* первого

игрока, причём $p^*_{i_0} > 0$. В соответствии с леммой 1 мы можем считать, что в стратегии *p*

Вероятность $p_{i_0} = 0$. В силу строгого доминирования $\sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i > h_{i_0 j}, \ \forall j$.

$$I \le \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i^* < \sum_{i \ne i_0} h_{ij} p_i^* + \left(\sum_{i \ne i_0} h_{ij} p_i\right) p_{i_0}^* = \sum_{i \ne i_0} h_{ij} (p_i^* + p_i p_{i_0}^*), \ \forall j.$$

Получим

Так как $z_i = p_i^* + p_i p_{i_0}^* \ge 0$ при всех $i \ne i_0$ и $\sum_{i=1}^{n} z_i = 1$, то положив $z_{i_0} = 0$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ij} z_i > I, \ \forall j,$$

что противоречит оптимальности p^*. Следовательно, у любой

оптимальной

стратегии первого игрока p^* координата $p^*_{i_0} = 0$.

Следствие 1. Пусть игра задана платёжной матрицей *H* и чистая стратегия A_{i_0} первого игрока доминируется некоторой его стратегией *p,* отличной от A_{i_0}. Положим, что *H′* – матрица, полученная из *H* отбрасыванием её строки с номером i_0 и p' стратегия оптимальная в игре с платёжной матрицей *H′*. Тогда стратегия *p**, полученная из p' вставкой нуля на место i_0-ой компоненты, является оптимальной для исходной игры. Причём значения игр совпадают.

Доказательство. Пусть *q** - оптимальная стратегия второго игрока в игре с платёжной матрицей H'. Тогда

$$\sum_{j=1} h_{ij} q_j^* \le I' \le \sum_{i=1}^{n-1} h'_{ij} p'_i$$

при всех $i \ne i_0$ и $\forall$ *j*. Здесь I' – значение игры с платёжной матрицей H'. С другой стороны, так как A_{i_0} доминируется *p*, то

$$\sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j^* \le \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i \ne i_0} h_{ij} p_i\Big) q_j^* = \sum_{i \ne i_0} p_i \sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j^* \le \sum_{i \ne i_0} p_i I' = I', \ \forall i.$$

Далее

$$I' \le \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i^* = \sum_{i=1}^{n-1} h'_{ij} p'_i, \ \forall \ j.$$

Следовательно *p**, *q** является парой оптимальных стратегий в игре с платёжной матрицей *H*, со значением игры I'.

Связь матричных игр с линейным программированием.

Рассмотрим матричную игру с матрицей выигрышей $H = \left| h_{ij} \right|_{n\times m}$. Не нарушая общности будем считать, что $h_{ij} > 0, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}.$ Построим две двойственные задач ЛП:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \to \min, \quad \sum_{i=1}^{n} h_{ij} x_i \ge 1, \; j = \overline{1,m}, \quad x_i \ge 0, \; i = \overline{1,n}. \qquad (З1)$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j \to \max, \quad \sum_{j=1}^{m} h_{ij} y_j \le 1, \; i = \overline{1,n}, \quad y_j \ge 0, \; j = \overline{1,m}. \qquad (З2)$$

Все элементы матрицы *H* по предположению положительны, поэтому многогранные множества задач (З1) и (З2) ограничены соответственно снизу и сверху. Многогранник задачи (З2) не пуст, так как *y* = 0 является допустимым планом. Следовательно, задача (З2), а с ней (по первой теореме двойственности) и задача (З1) разрешимы, и их функционалы в оптимальных планах *x** , *y** совпадают (вторая теорема двойственности): $\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{j=1}^{m} y_j^*$.

Из условий задачи 1 следует, что $\sum_{i=1}^{n} x_i^* > 0$. Обозначим

$$\gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^*} > 0, \; p_i^* = x_i^* \gamma, \; i = \overline{1,n}, \; q_j^* = y_j^* \gamma, \; j = \overline{1,m}.$$

Получим

$$p_i^* \ge 0, \; i = \overline{1,n}, \; \sum_{i=1}^{n} p_i^* = 1, \; q_j^* \ge 0, \; j = \overline{1,m}, \; \sum_{j=1}^{m} q_j^* = 1,$$

т.е. p^*, q^* являются смешанными

Имеем, $$\sum_{i=1}^{n} h_{ij} x_i^* = \sum_{i=1}^{n} h_{ij} \frac{p_i^*}{\gamma} \geq 1,\ j=\overline{1,m}, \qquad \sum_{j=1}^{m} h_{ij} y_j^* = \sum_{j=1}^{m} h_{ij} \frac{q_j^*}{\gamma} \leq 1,\ i=\overline{1,n}.$$

Или

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i^* \geq \gamma,\ j=\overline{1,m}, \qquad \sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j^* \leq \gamma,\ i=\overline{1,n}.$$

Умножим каждое из неравенств первой (второй) группы на компоненты произвольной смешанной стратегии $q_j\ (p_i)$ второго (первого) игрока и сложим результаты.

Получим

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_{ij} p_i^* q_j \leq \gamma \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_{ij} p_i q_j^*,\ \forall p, q.$$

Следовательно p^*, q^* оптимальные стратегии игроков, а γ - значение игры.

Таким образом, чтобы найти решение матричной игры надо перейти к задаче с тем же
оптимальным решением, что и у исходной задачи, но с положительными элементами,
затем построить пару двойственных задач линейного программирования и найти их
решение (например симплекс-методом). По полученному решению вычислить значения
компонент оптимальных стратегий игроков и найти значение игры.

Пример.

$$H = \begin{vmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Переходим к матрице

$$H = \begin{vmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}.$$

Строим пару двойственных задач ЛП:

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 \to \min, \\ & 25\,x_1 + x_2 \geq 1, \\ & x_1 + 9\,x_2 \geq 1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & y_1 + y_2 \to \max, \\ & 25\,y_1 + y_2 \leq 1, \\ & y_1 + 9\,y_2 \leq 1, \\ & y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Получим:

$$x_1^* = 0{,}0357, \qquad y_1^* = 0{,}0357,$$

$$x_2^* = 0{,}107, \qquad y_2^* = 0{,}107,$$

$$\gamma = 0{,}1427.$$

Перейдём к оптимальным стратегиям игроков:

$$p_1^* = 0{,}0357 / 0{,}1427 = 0{,}2502, \qquad q_1^* = 0{,}2502,$$

$$p_2^* = 0{,}107 / 0{,}1427 = 0{,}7498, \qquad q_2^* = 0{,}7498,$$

$$I = 1/0{,}1427 - 1 = 6{,}008.$$