

Свойства оптимальных смешанных стратегий матричных игр

Теорема 1. Для матричной игры с платёжной матрицей H имеют место соотношения

$$I = \max_p \min_j \sum_{i=1}^n h_{ij} p_i = \min_q \max_i \sum_{j=1}^m h_{ij} q_j,$$

причём внешние экстремумы достигаются на оптимальных смешанных стратегиях игроков.

Доказательство. По определению значения игры и теоремы фон Неймана

$$I = \max_p \min_q \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_{ij} p_i q_j = \min_q \max_p \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n h_{ij} p_i q_j,$$

Имеем
$$\min_q \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_{ij} p_i q_j \leq \min_j \sum_{i=1}^n h_{ij} p_i = R(p), \forall p.$$

$$R(p) = \min_j \sum_{i=1}^n h_{ij} p_i \leq \sum_{i=1}^n h_{ij} p_i, \quad R(p) = \sum_{j=1}^m R(p) q_j \leq \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n h_{ij} p_i \right) q_j, \forall q.$$

Отсюда
$$\min_q \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_{ij} p_i q_j \leq \min_j \sum_{i=1}^n h_{ij} p_i = R(p) \leq \min_q \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_{ij} p_i q_j.$$

Следовательно,
$$\min_q \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_{ij} p_i q_j = \min_j \sum_{i=1}^n h_{ij} p_i.$$

Окончательно,
$$I = \max_p \min_q \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_{ij} p_i q_j = \max_p \min_j \sum_{i=1}^n h_{ij} p_i.$$

Аналогично доказывается второе равенство формулировки теоремы.

Теорема 2. Для матричной игры с платёжной матрицей H имеют место соотношения

$$\max_i \min_j \sum_{i=1}^n h_{ij} \leq I \leq \min_j \max_i \sum_{j=1}^m h_{ij}.$$

Доказательство. По теореме 1 .

$$I = \max_p \min_j \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_{ij} p_i \geq \max_i \min_j h_{ij}.$$

Аналогично

$$I = \min_q \max_i \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_{ij} q_j \leq \min_j \max_i h_{ij}.$$

Теорема 3. Если p и q стратегии игроков, а v некоторое число, причём

$$\max_i \sum_{j=1}^m h_{ij} q_j \leq v \leq \min_j \sum_{i=1}^n h_{ij} p_i,$$

то p и q оптимальные стратегии игроков и $I=v$.

Доказательство. Из теоремы 1 имеем

$$\min_j \sum_{i=1}^n h_{ij} p_i \leq I \leq \max_i \sum_{j=1}^m h_{ij} q_j.$$

Из неравенства в формулировке теоремы получим

$$\min_i \sum_{j=1}^m h_{ij} q_j = v = I = \min_j \sum_{i=1}^n h_{ij} p_i.$$

Следствие 1. Если p и q стратегии игроков, а v – число, причём

$$\sum_{j=1}^m h_{ij} q_j \leq v \leq \sum_{i=1}^n h_{ij} p_i, \forall i, j.$$

то p и q оптимальные стратегии и $v=l$.

Следствие 2. Если p и q стратегии игроков, то для их оптимальности достаточно выполнения

неравенства

$$\max_i \sum_{j=1}^m h_{ij} q_j \leq \min_j \sum_{i=1}^n h_{ij} p_i.$$

Теорема 4. Каждая пара оптимальных смешанных стратегий игры с платёжной

матрицей

$$H' = |h_{ij} + k|$$

является парой оптимальных смешанных стратегий игры с

платёжной

матрицей

, где k – произвольная константа.

Доказательство. Пусть p^*, q^* – пара оптимальных стратегий для игры с платёжной матрицей $H = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (h_{ij} + k) p_i q_j = I + k$, $\sum_{i=1}^n (h_{ij} + k) p_i = \sum_{i=1}^n h_{ij} p_i + k$, $\sum_{j=1}^m (h_{ij} + k) q_j = \sum_{j=1}^m h_{ij} q_j + k$.

Получим

$$\sum_{j=1}^m (h_{ij} + k) q_j^* \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (h_{ij} + k) p_i^* q_j^* \leq \sum_{i=1}^n (h_{ij} + k) p_i^*,$$

что по следствию 1 доказывает теорему.

Доминирование стратегий

Пусть конечная игра представлена платёжной матрицей H . Говорим, что для первого игрока

стратегия p' доминирует стратегию p'' , если

$$\sum_{i=1}^m h_{ij} p'_i \geq \sum_{i=1}^m h_{ij} p''_i, j = \overline{1, m}.$$

Иными словами для любой чистой стратегии второго игрока выигрыш первого игрока при

применении им стратегии p' не меньше выигрыша при применении им стратегии p'' .

Если

все неравенства в системе строгие, то говорим о строгом доминировании, а при

наличии

$$\sum_{i=1}^m h_{ij} q'_i \leq \sum_{i=1}^m h_{ij} q''_i, i = \overline{1, n}.$$

хотя бы одного равенства – о нестрогом доминировании.

Аналогично, для второго игрока стратегия q' доминирует стратегию q'' , если

 A_{i_1}
 $A_{i_2},$

При этом говорим о строгом доминировании, если все неравенства строгие, и о

нестрогом

 B_{j_1}
 B_{j_2}

доминирования в противном случае.

В частности, чистая стратегия

первого игрока доминирует его чистую стратегию

если

Чистая стратегия второго игрока доминирует чистую стратегию, если

Теорема 1. Если для первого игрока стратегия p' доминирует стратегию p'' и стратегия p''

оптимальна, то стратегия p' также оптимальна.

Доказательство. В силу доминирования выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^n h_{ij} p'_i \geq \sum_{i=1}^n h_{ij} p''_i, j=1, m.$$

Откуда получим

$$\min_j \sum_{i=1}^n h_{ij} p'_i \geq \min_j \sum_{i=1}^n h_{ij} p''_i.$$

В силу оптимальности p'' получим $I = \min_j \sum_{i=1}^n h_{ij} p''_i$. Поэтому p' также оптимальна.

Аналогичное утверждение справедливо для стратегий второго игрока.

Лемма 1. Если чистая стратегия A_{i_0} первого игрока строго (нестрого) доминируется его

стратегией p , отличной от стратегии A_{i_0} , то для стратегии $p'_{i_0} = 0$ существует строго (нестрого) доминирующая стратегия p' с вероятностью $p_{i_0} < 1$.

Доказательство. Так как стратегия p отлична от чистой стратегии A_{i_0} , то $p_{i_0} < 1$. По вектору p составим вектор p' с компонентами $p'_i = \frac{p_i}{1 - p_{i_0}}$ для $i \neq i_0$ и $p'_{i_0} = 0$. Очевидно p' является

стратегией первого игрока с нулевой вероятностью применения чистой стратегии A_{i_0} . Полагая $p'_i = \frac{p_i}{1 - p_{i_0}}$ для $i \neq i_0$ и $p'_{i_0} = 0$, имеем $\sum_{i=1}^n h_{ij} p'_i > \sum_{i=1}^n h_{ij} p_i, \forall j$.

Теорема 2. Если чистая стратегия p_{i_0} первого игрока строго доминируется его стратегией p , то

p_{i_0} входит с нулевой вероятностью в любую оптимальную стратегию.

Если чистая стратегия p_{i_0} не строго доминируется его стратегией p , отличной от стратегии p_{i_0} , то существует оптимальная стратегия первого игрока, в которую входит с нулевой вероятностью.

Доказательство. Рассмотрим случай строгого доминирования. Пусть игра задаётся платёжной матрицей H . Предположим, что существует оптимальная стратегия p^* первого игрока, причём $p_{i_0}^* > 0$.

В соответствии с леммой 1 мы можем считать, что в стратегии p

Вероятность $I \leq \sum_{i=1}^n h_{ij} p_i^* < \sum_{i \neq i_0} h_{ij} p_i^* + p_{i_0} p_{i_0}^* = \sum_{i \neq i_0} h_{ij} (p_i^* + p_i p_{i_0}^*)$, $\forall j$.

Получим $z_i = p_i^* + p_i p_{i_0}^* \geq 0$ $i \neq i_0$ $\sum_{i=1}^n z_i = 1$ $z_{i_0} = 0$

$\sum_{i=1}^n h_{ij} z_i > I, \forall j$,

Так как при всех $p_{i_0}^* = 0$, то положив $p_{i_0} = 0$, получим что противоречит оптимальности p^* . Следовательно, у любой

оптимальной

Следствие 1. Пусть игра задана платёжной матрицей H и чистая стратегия первого игрока доминируется некоторой его стратегией p , отличной от A_{i_0} .

Положим, что H' –

матрица, полученная из H отбрасыванием её строки с номером i_0 и p' стратегия оптимальная в игре с платёжной матрицей H' . Тогда стратегия p^* , полученная из p' вставкой

нуля на место i_0 -ой компоненты, является оптимальной для исходной игры. Причём значения игр совпадают.

Доказательство. Пусть q^* – оптимальная стратегия второго игрока в игре с платёжной

матрицей H' . Тогда

$$\sum_{j=1}^m h_{ij} q_j^* \leq \sum_{j=1}^m (\sum_{i \neq i_0} h_{ij} p_i) q_j^* = \sum_{i \neq i_0} p_i \sum_{j=1}^m h_{ij} q_j^* \leq \sum_{i \neq i_0} p_i I' = I', \forall i.$$

при всех $i \neq i_0$ и $\forall j$. Здесь I' – значение игры с платёжной матрицей H' . С другой

стороны, так $I' \leq \sum_{i=1}^n h_{ij} p_i^* = \sum_{i=1}^{n-1} h'_{ij} p'_i, \forall j.$

как доминируется p , то

Далее

Следовательно p^*, q^* является парой оптимальных стратегий в игре с платёжной матрицей

Связь матричных игр с линейным программированием.

Рассмотрим матричную игру с матрицей выигрышей $H = \|h_{ij}\|_{n \times m}$. Не нарушая общности будем считать, что $h_{ij} > 0, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$.

Построим две двойственные задачи ЛП:

$$\sum_{i=1}^n x_i \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^m y_j \rightarrow \max,$$

$$\sum_{i=1}^n h_{ij} x_i \geq 1, \quad j = \overline{1, m},$$

(31)

$$\sum_{j=1}^m h_{ij} y_j \leq 1, \quad i = \overline{1, n},$$

(32)

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

$$y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Все элементы матрицы H по предположению положительны, поэтому многогранные множества задач (31) и (32) ограничены соответственно снизу и сверху. Многогранник задачи (32) не пуст, так как $y = 0$ является допустимым планом. Следовательно, задача (32),

а с ней (по первой теореме двойственности) и задача (31) разрешимы, $\sum_{i=1}^n x_i^* = \sum_{j=1}^m y_j^*$.

функционалы в оптимальных планах x^*, y^* совпадают (вторая теорема двойственности):

Из условий задачи 1 следует, что $\gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i} > 0, p_i^* = x_i^* \gamma, i = \overline{1, n}, q_j^* = y_j^* \gamma, j = \overline{1, m}$. Обозначим

$$p_i^* \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^n p_i^* = 1, \quad q_j^* \geq 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad \sum_{j=1}^m q_j^* = 1, \quad p^*, q^*$$

Имеем,

$$\sum_{i=1}^n h_{ij} x_i^* = \sum_{i=1}^n h_{ij} \frac{p_i^*}{\gamma} \geq 1, j = \overline{1, m}, \quad \sum_{j=1}^m h_{ij} y_j^* = \sum_{j=1}^m h_{ij} \frac{q_j^*}{\gamma} \leq 1, i = \overline{1, n}.$$

Или

$$\sum_{i=1}^n h_{ij} p_i^* \geq \gamma, j = \overline{1, m}, \quad \sum_{j=1}^m h_{ij} q_j^* \leq \gamma, i = \overline{1, n}.$$

Умножим каждое из неравенств первой (второй) группы на компоненты произвольной смешанной стратегии q_j (p_i) второго (первого) игрока и сложим результаты.

Получим

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_{ij} p_i^* q_j \leq \gamma \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_{ij} p_i q_j^*, \forall p, q.$$

Следовательно p^*, q^* оптимальные стратегии игроков, а γ - значение игры.

Таким образом, чтобы найти решение матричной игры надо перейти к задаче с тем же

оптимальным решением, что и у исходной задачи, но с положительными элементами,

затем построить пару двойственных задач линейного программирования и найти их решение (например симплекс-методом). По полученному решению вычислить значения

компонент оптимальных стратегий игроков и найти значение игры.

Пример.

$$H = \begin{vmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Переходим к матрице

$$H = \begin{vmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}.$$

Строим пару двойственных задач ЛП:

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 \rightarrow \min, & y_1 + y_2 \rightarrow \max, \\ 25x_1 + x_2 \geq 1, & 25y_1 + y_2 \leq 1, \\ x_1 + 9x_2 \geq 1, & y_1 + 9y_2 \leq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0. & y_1, y_2 \geq 0. \end{array}$$

Получим:

$$\begin{array}{ll} x_1^* = 0,0357, & y_1^* = 0,0357, \\ x_2^* = 0,107, & y_2^* = 0,107, \\ \gamma = 0,1427. & \end{array}$$

Перейдём к оптимальным стратегиям игроков:

$$\begin{array}{ll} p_1^* = 0,0357 / 0,1427 = 0,2502, & q_1^* = 0,2502, \\ p_2^* = 0,107 / 0,1427 = 0,7498, & q_2^* = 0,7498, \\ I = 1 / 0,1427 - 1 = 6,008. & \end{array}$$