Свойства оптимальных смешанных стратегий матричных игр

Теорема 1. Для матричной игры с платёжной матрицей *H* имеют место соотношения

$$I = \max_p \min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i = \min_q \max_i \sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j \ ,$$

причём внешние экстремумы достигаются на оптимальных смешанных стратегиях игроков.

Доказательство. По определению значения игры и теоремы фон Неймана

$$I = \max_p \min_q \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_{ij} p_i q_j = \min_q \max_p \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i q_j \ ,$$

Имеем $\min\limits_q \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_{ij} p_i q_j \le \min\limits_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i = R(p), \ \forall\ p \ .$

$$R(p) = \min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i \le \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i \,, \ \ R(p) = \sum_{j=1}^{m} R(p) q_j \le \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i\right) q_j \,, \forall\ q.$$

Отсюда $\min\limits_q \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_{ij} p_i q_j \le \min\limits_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i = R(p) \le \min\limits_q \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_{ij} p_i q_j \ .$

Следовательно, $\min\limits_q \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_{ij} p_i q_j = \min\limits_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i \ .$

Окончательно, $I = \max\limits_p \min\limits_q \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i q_j = \max\limits_p \min\limits_j \sum_{j=1}^{m} h_{ij} p_i \ .$

Аналогично доказывается второе равенство формулировки теоремы.

Теорема 2. Для матричной игры с платёжной матрицей *H* имеют место соотношения

$$\max_i \min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} \le I \le \min_j \max_i \sum_{j=1}^{m} h_{ij} .$$

Доказательство. По теореме 1 .

$$I = \max_p \min_j \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \ h_{ij} p_i \ge \max_i \min_j h_{ij} .$$

Аналогично

$$I = \min_q \max_i \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \ h_{ij} q_j \le \min_j \max_i h_{ij} .$$

Теорема 3. Если *p* и *q* стратегии игроков, а *v* некоторое число, причём

$$\max_i \sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j \le v \ \le \min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i \ ,$$

то *p* и *q* оптимальные стратегии игроков и *I=v*.

Доказательство. Из теоремы 1 имеем

$$\min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i \le I \le \max_i \sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j .$$

Из неравенства в формулировке теоремы получим

$$\min_i \sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j = v = I = \min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i .$$

Следствие 1. Если *p* и *q* стратегии игроков, а *v* – число, причём

$$\sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j \le v \le \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i \,, \forall\, i\,, j\,.$$

то *p* и *q* оптимальные стратегии и *v=I*.

Следствие 2. Если *p* и *q* стратегии игроков, то для их оптимальности достаточно выполнения неравенства

$$\max_i \sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j \le \min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i \,.$$

Теорема 4. Каждая пара оптимальных смешанных стратегий игры с платёжной матрицей $H = \left\| h_{ij} \right\|_{m \times n}$ является парой оптимальных смешанных стратегий игры с платёжной матрицей $H' = \left\| h_{ij} + k \right\|_{m \times n}$, где *k* – произвольная константа.

Доказательство. Пусть *p**,*q** -пара оптимальных стратегий для игры с платёжной матрицей *H*. Тогда по определению значения игры получим

$$I' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (h_{ij} + k) p_i^* q_j^* = I + k\,, \quad \sum_{i=1}^{n} (h_{ij} + k) p_i^* = \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i^* + k\,, \quad \sum_{j=1}^{m} (h_{ij} + k) q_j^* = \sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j^* + k\,.$$

Получим

$$\sum_{j=1}^{m} (h_{ij} + k) q_j^* \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (h_{ij} + k)\, p_i^* q_j^* \le \sum_{i=1}^{n} (h_{ij} + k) p_i^* \,,$$

что по следствию 1 доказывает теорему.

Доминирование стратегий

Пусть конечная игра представлена платёжной матрицей *H*. Говорим, что для первого игрока

стратегия p' *доминирует* стратегию p'', если

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ij} p'_i \ge \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p''_i, \; j=\overline{1,m}.$$

Иными словами для любой чистой стратегии второго игрока выигрыш первого игрока при

применении им стратегии p' не меньше выигрыша при применении им стратегии p''. Если

все неравенства в системе строгие, то говорим о строгом доминировании, а при наличии

хотя бы одного равенства – о нестрогом доминировании.

Аналогично, для второго игрока стратегия q' доминирует стратегию q'', если

$$\sum_{j=1}^{m} h_{ij} q'_j \le \sum_{j=1}^{m} h_{ij} q''_j, \; i=\overline{1,n}.$$

При этом говорят о строгом доминировании, если все неравенства строгие, и о нестрогом

доминировании в противном случае.

В частности, чистая стратегия A_{i_1} первого игрока доминирует его чистую стратегию A_{i_2}, если

$$h_{i_1 j} \ge h_{i_2 j}, \; j=\overline{1,m}.$$

Чистая стратегия второго игрока B_{j_1} доминирует чистую стратегию B_{j_2}, если

$$h_{ij_1} \le h_{ij_2}, \; i=\overline{1,n}.$$

Теорема 1. Если для первого игрока стратегия p' доминирует стратегию p'' и стратегия p'' оптимальна, то стратегия p' также оптимальна.

Доказательство. В силу доминирования выполняются неравенства $\sum_{i=1}^{n} h_{ij} p'_i \ge \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p''_i$, $j=\overline{1,m}$.

Откуда получим $\min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p'_i \ge \min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p''_i$.

В силу оптимальности p'' получим $I=\min_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p'_i$. Поэтому p' также оптимальна.

Аналогичное утверждение справедливо для стратегий второго игрока.

Лемма 1. Если чистая стратегия A_{i_0} первого игрока строго (нестрого) доминируется его стратегией *p*, отличной от стратегии A_{i_0}, то для стратегии A_{i_0} существует строго (нестрого) доминирующая стратегия p' с вероятностью $p'_{i_0}=0$.

Доказательство. Так как стратегия *p* отлична от чистой стратегии A_{i_0}, то $p_{i_0}<1$. По вектору *p* составим вектор p' с компонентами $p'_{i_0}=0,\ p'_i=\frac{p_i}{1-p_{i_0}},\ i\neq i_0$. Очевидно p' является стратегией первого игрока с нулевой вероятностью применения чистой стратегии A_{i_0}.

Из условия строгого доминирования получим $\sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i > \sum_{i=1}^{n} h_{i_0 j} p_i,\ \forall j$. Разделив обе части на $1-p_{i_0}>0$, получим $\sum_{i=1}^{n} h_{ij} p'_i > h_{i_0 j}$, $\forall j$.

Теорема 2. Если чистая стратегия A_{i_0} первого игрока строго доминируется его стратегией

p, то A_{i_0} входит с нулевой вероятностью в любую оптимальную стратегию.

Если чистая стратегия A_{i_0} нестрого доминируется его стратегией p, отличной от стратегии A_{i_0}, то существует оптимальная стратегия первого игрока, в которую входит с

нулевой вероятностью.

Доказательство. Рассмотрим случай строгого доминирования. Пусть игра задаётся платёжной матрицей *H.* Предположим, что существует оптимальная стратегия p^* первого

игрока, причём $p^*_{i_0} > 0$. В соответствии с леммой 1 мы можем считать, что в стратегии p $p_{i_0} = 0$.

В силу строгого доминирования $\sum_{i=1}^{n} h_{ij} p'_i > h_{i_0 j}, \forall j$.

Вероятность

$$I \le \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p^*_i < \sum_{i \ne i_0} h_{ij} p^*_i + \Big(\sum_{i \ne i_0} h_{ij} p_i\Big) p^*_{i_0} = \sum_{i \ne i_0} h_{ij} (p^*_i + p_i p^*_{i_0}), \forall j.$$

Получим

Так как $z_i = p^*_i + p_i p^*_{i_0} \ge 0$ при всех $i \ne i_0$ и $\sum_{i=1}^{n} z_i = 1$, то положив $z_{i_0} = 0$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ij} z_i > I, \forall j,$$

что противоречит оптимальности p^*. Следовательно, у любой

оптимальной

стратегии первого игрока p^* координата $p^*_{i_0} = 0$.

Следствие 1. Пусть игра задана платёжной матрицей *H* и чистая стратегия A_{i_0} первого игрока доминируется некоторой его стратегией *p,* отличной от A_{i_0}. Положим, что *H′* – матрица, полученная из *H* отбрасыванием её строки с номером i_0 и p' стратегия оптимальная в игре с платёжной матрицей *H′*. Тогда стратегия *p**, полученная из p' вставкой нуля на место i_0-ой компоненты, является оптимальной для исходной игры. Причём значения игр совпадают.

Доказательство. Пусть *q** - оптимальная стратегия второго игрока в игре с платёжной матрицей H'. Тогда

$$\sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j^* \le I' \le \sum_{i=1}^{n-1} h'_{ij} p'_i$$

при всех $i \ne i_0$ и $\forall$ *j*. Здесь I' – значение игры с платёжной матрицей H'. С другой стороны, так как A_{i_0} доминируется *p*, то

$$\sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j^* \le \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i \ne i_0} h_{ij} p_i\Big) q_j^* = \sum_{i \ne i_0} p_i \sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j^* \le \sum_{i \ne i_0} p_i I' = I', \ \forall i.$$

Далее

$$I' \le \sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i^* = \sum_{i=1}^{n-1} h'_{ij} p'_i, \ \forall \ j.$$

Следовательно *p**, *q** является парой оптимальных стратегий в игре с платёжной матрицей *H*, со значением игры I'.

Связь матричных игр с линейным программированием.

Рассмотрим матричную игру с матрицей выигрышей $H = \left| h_{ij} \right|_{n \times m}$. Не нарушая общности будем считать, что $h_{ij} > 0, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$. Построим две двойственные задач ЛП:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \to \min, \quad \sum_{i=1}^{n} h_{ij} x_i \ge 1, \; j = \overline{1,m}, \quad x_i \ge 0, \; i = \overline{1,n}. \qquad (З1)$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j \to \max, \quad \sum_{j=1}^{m} h_{ij} y_j \le 1, \; i = \overline{1,n}, \quad y_j \ge 0, \; j = \overline{1,m}. \qquad (З2)$$

Все элементы матрицы *H* по предположению положительны, поэтому многогранные множества задач (З1) и (З2) ограничены соответственно снизу и сверху. Многогранник задачи (З2) не пуст, так как *y* = 0 является допустимым планом. Следовательно, задача (З2), а с ней (по первой теореме двойственности) и задача (З1) разрешимы, и их функционалы в оптимальных планах *x** , *y** совпадают (вторая теорема двойственности): $\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{j=1}^{m} y_j^*$.

Из условий задачи 1 следует, что $\sum_{i=1}^{n} x_i^* > 0$. Обозначим $\gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^*} > 0$, $p_i^* = x_i^* \gamma$, $i = \overline{1,n}$, $q_j^* = y_j^* \gamma$, $j = \overline{1,m}$.

Получим $p_i^* \ge 0, i = \overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n} p_i^* = 1, q_j^* \ge 0, j = \overline{1,m}, \sum_{j=1}^{m} q_j^* = 1$, т.е. p^*, q^* являются смешанными

Имеем, $\sum_{i=1}^{n} h_{ij} x_i^* = \sum_{i=1}^{n} h_{ij} \frac{p_i^*}{\gamma} \ge 1,\ j = \overline{1,m},$ $\sum_{j=1}^{m} h_{ij} y_j^* = \sum_{j=1}^{m} h_{ij} \frac{q_j^*}{\gamma} \le 1,\ i = \overline{1,n}$.

Или

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ij} p_i^* \ge \gamma,\ j = \overline{1,m}, \qquad \sum_{j=1}^{m} h_{ij} q_j^* \le \gamma,\ i = \overline{1,n}.$$

Умножим каждое из неравенств первой (второй) группы на компоненты произвольной смешанной стратегии $q_j\ (p_i)$ второго (первого) игрока и сложим результаты.

Получим
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_{ij} p_i^* q_j \le \gamma \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_{ij} p_i q_j^*,\ \forall p, q.$$

Следовательно p^*, q^* оптимальные стратегии игроков, а γ - значение игры.

Таким образом, чтобы найти решение матричной игры надо перейти к задаче с тем же
оптимальным решением, что и у исходной задачи, но с положительными элементами,
затем построить пару двойственных задач линейного программирования и найти их
решение (например симплекс-методом). По полученному решению вычислить значения
компонент оптимальных стратегий игроков и найти значение игры.

Пример.

$$H = \begin{vmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Переходим к матрице

$$H = \begin{vmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}.$$

Строим пару двойственных задач ЛП:

$$x_1 + x_2 \to \min, \qquad y_1 + y_2 \to \max,$$
$$25x_1 + x_2 \ge 1, \qquad 25y_1 + y_2 \le 1,$$
$$x_1 + 9x_2 \ge 1, \qquad y_1 + 9y_2 \le 1,$$
$$x_1, x_2 \ge 0. \qquad y_1, y_2 \ge 0.$$

Получим:

$$x_1^* = 0{,}0357\ , \qquad y_1^* = 0{,}0357\ ,$$
$$x_2^* = 0{,}107\ , \qquad y_2^* = 0{,}107,$$
$$\gamma = 0{,}1427.$$

Перейдём к оптимальным стратегиям игроков:

$$p_1^* = 0{,}0357 / 0{,}1427 = 0{,}2502, \qquad q_1^* = 0{,}2502,$$
$$p_2^* = 0{,}107 / 0{,}1427 = 0{,}7498, \qquad q_2^* = 0{,}7498,$$
$$I = 1/0{,}1427 - 1 = 6{,}008\ .$$