

§1. МНОЖЕСТВА

1.1 Основные понятия

► **Множество это** совокупность (собрание, класс, семейство...) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку.

► Объекты, образующие множество, называются **его элементами**.

Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита A, B, \dots, X, Y, \dots , а их элементы — малыми буквами a, b, \dots, x, y, \dots

Если элемент x принадлежит множеству X , то записывают $x \in X$; запись $x \notin X$ означает, что элемент x не принадлежит множеству X .

► Множество, не содержащее ни одного элемента, **называется пустым**, обозначается символом \emptyset .

► множество A **называется подмножеством** множества B , если каждый элемент множества A является элементом множества B . Символически это обозначают так $A \subset B$ (« A включено в B »).

► Говорят, что множества A и B равны или совпадают, и пишут $A=B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Другими словами, множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными.

1.2. Числовые множества.

Множество действительных чисел

► Множества, элементами которых являются числа, называются **числовыми**.

Примерами числовых множеств являются:

$N = \{1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$ —

— множество натуральных чисел;

$Z_0 = \{0; 1; 2; \dots; n; \dots\}$ —

— множество целых неотрицательных чисел;

$Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots; \pm n; \dots\}$ —

— множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \{m/n: m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ —

— множество рациональных чисел;

\mathbb{R} — множество действительных

чисел.
Между этими множествами существует
соотношение

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
Множество \mathbb{R} содержит рациональные и
иррациональные числа.

► Действительные числа, не являющиеся
рациональными, называются **иррациональными**

(\mathbb{I})
 $\mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

1.3 Числовые промежутки.

Окрестность точки.

Пусть a и b — действительные числа, причем $a < b$.
► **Числовыми промежутками** (интервалами) называют подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

$[a; b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ — отрезок (замкнутый

промежуток);
 $(a; b) = \{x : a < x < b\}$ — интервал (открытый

промежуток);
 $[a; b) = \{x : a \leq x < b\}$ или $(a; b] = \{x : a < x \leq b\}$ —

полуоткрытые интервалы (или полуоткрытые

отрезки);
 $(-\infty; b] = \{x : x \leq b\}$;

$[a; +\infty) = \{x : x \geq a\}$;

$(-\infty; b) = \{x : x < b\}$;

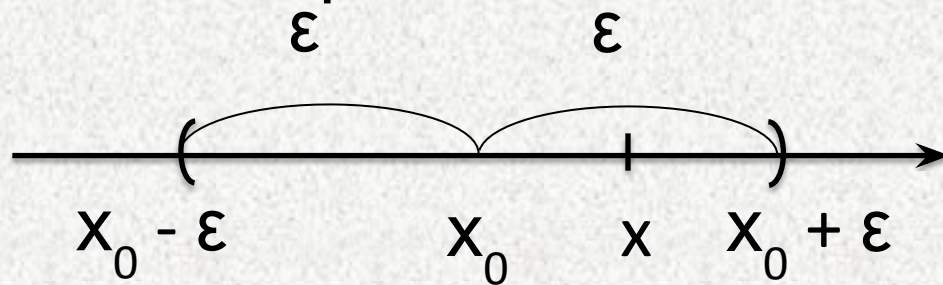
$(a; +\infty) = \{x : x > a\}$;

$(-\infty, \infty) = \{x : -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$ — бесконечные интервалы (промежутки).

Пусть x_0 — любое действительное число (точка на числовой прямой).

► **Окрестностью точки x_0** называется **любой интервал $(a; b)$** , содержащий точку x_0 .

В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ε -окрестностью точки x_0 . Число x_0 называется центром.



Если $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, то выполняется неравенство $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, или, что то же, $|x - x_0| < \varepsilon$. Выполнение последнего неравенства означает попадание точки x в ε -окрестность точки x_0 .

§2. ФУНКЦИЯ

2.1. Понятие функции.

Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости (связи) между элементами двух множеств.

Пусть даны два непустых множества X и Y .

► Если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие один и только один элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана **однозначная функция $y=f(x)$** .

Пример. $y = \sin x$, $y = x^3$, $y = \ln x$.

► x называется **независимой переменной** или аргументом, y называется **зависимой переменной**.

► Множество X называется **областью определения** функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется **множеством значений** функции f и обозначается $E(f)$.

► Если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие два или более значений $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана **многозначная функция** $f(x, y) = 0$.

Пример. $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 1$, $y^2 = 8x$.

2.2 Числовые функции. График функции. Способы задания функций

Пусть задана функция $y=f(x)$.

► Если элементами множеств X и Y являются действительные числа (т. е. $X \in \mathbb{R}$ и $Y \in \mathbb{R}$), то функцию f называют **числовой функцией**.

► **Графиком функции $y=f(x)$** называется множество всех точек плоскости Oxy , для каждой из которых x является значением аргумента, а y — соответствующим значением функции.

Чтобы задать функцию $y=f(x)$, необходимо указать правило, позволяющее, зная x , находить соответствующее значение y .

Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, табличный, графический.

Аналитический способ: функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.

Например: 1) $y = 9 - x^2$;

2) $x^2 - y^2 = 1$;

3) $y = \begin{cases} 8x, & \text{если } x < 1; \\ x^3 - 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию $y = f(x)$.

Графический способ: задается график функции.

Часто графики вычерчиваются автоматически самопишущими приборами или изображаются на экране дисплея.

Значения функции y , соответствующие тем или иным значениям аргумента x , непосредственно находятся из этого графика.

Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком — его неточность.

Табличный способ: функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции.

Например, известные таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы.

На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных опытным путем или в результате наблюдений.

2.3. Основные свойства функции

1. Четность и нечетность функции.

► Функция $y=f(x)$, заданная на множестве X , называется **четной(нечетной)**, если выполнены следующие условия:

а) множество X симметрично относительно нуля;

б) для любого $x \in X$ справедливо равенство $f(-x)=f(x)$ для четной функции ($f(-x)=-f(x)$ для нечетной функции).

График четной функции симметричен относительно оси Oy .

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

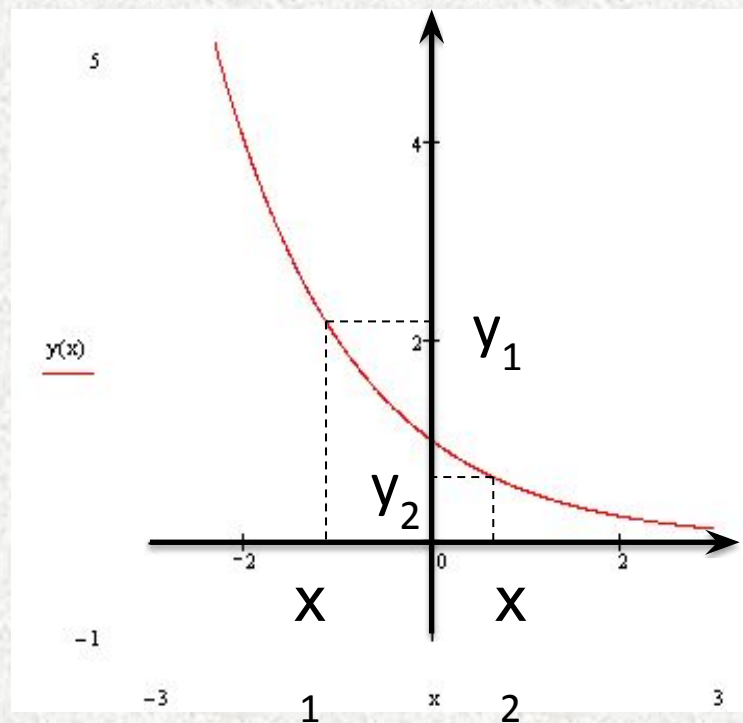
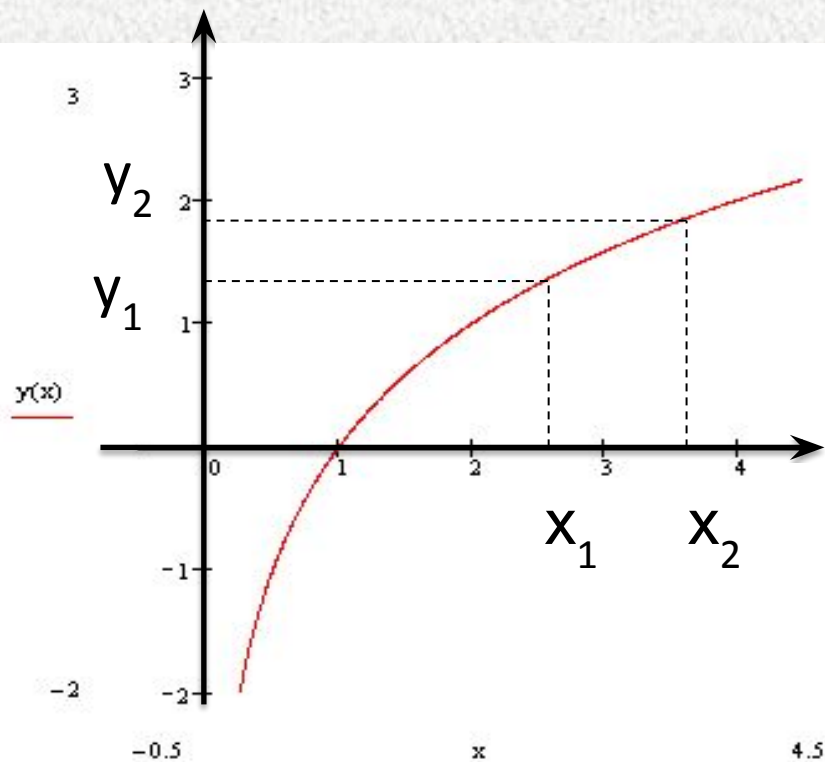
Пример

- $y=x^2$, $y=\sqrt{(1+x^2)}$, $y=\ln|x|$ — четные функции;
- $y=\sin x$, $y=x^3$ — нечетные функции;
- $y=x-1$, $y=\sqrt{x}$, $y=\ln x$ — функции общего вида, т. е. не четные и не нечетные.

2. Монотонность функции.

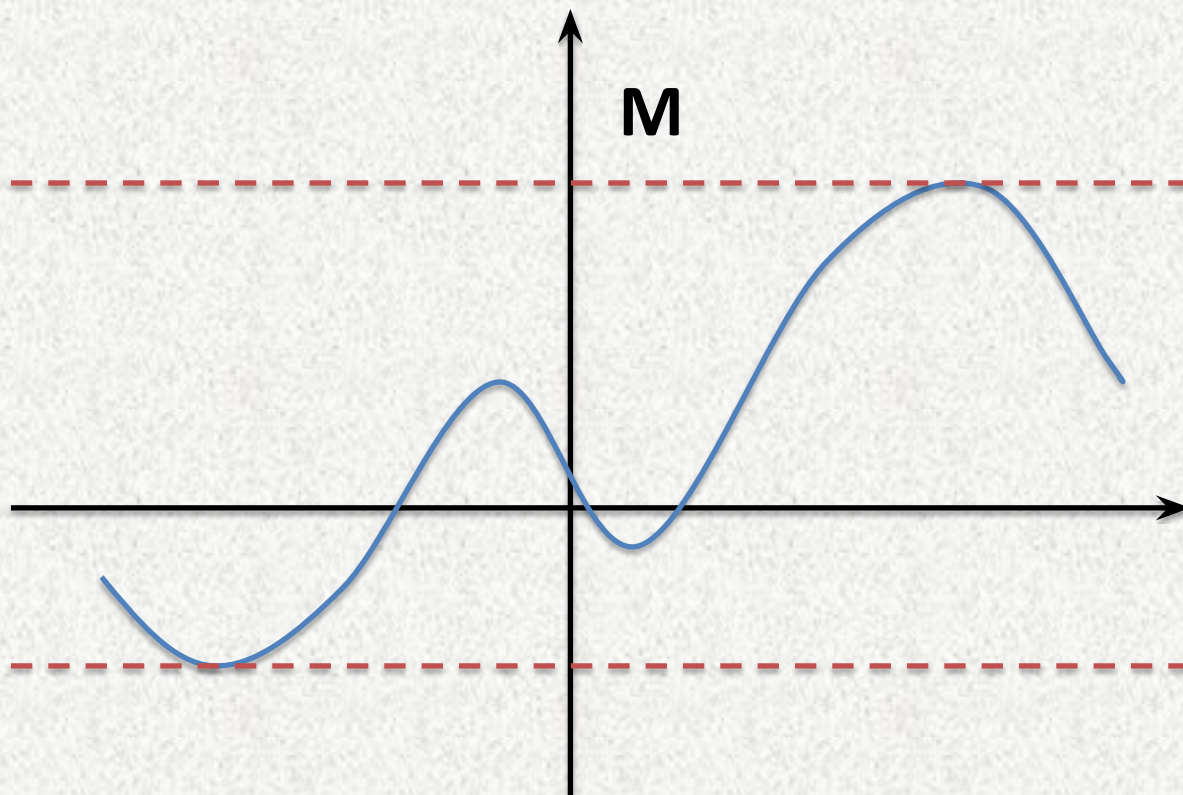
► Функция $y=f(x)$, заданная на множестве X , называется **возрастающей (убывающей)**,

если для любых значений x_1 и x_2 таких, что $x_1 < x_2$ справедливо неравенство: $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).



3. Ограниченность функции.

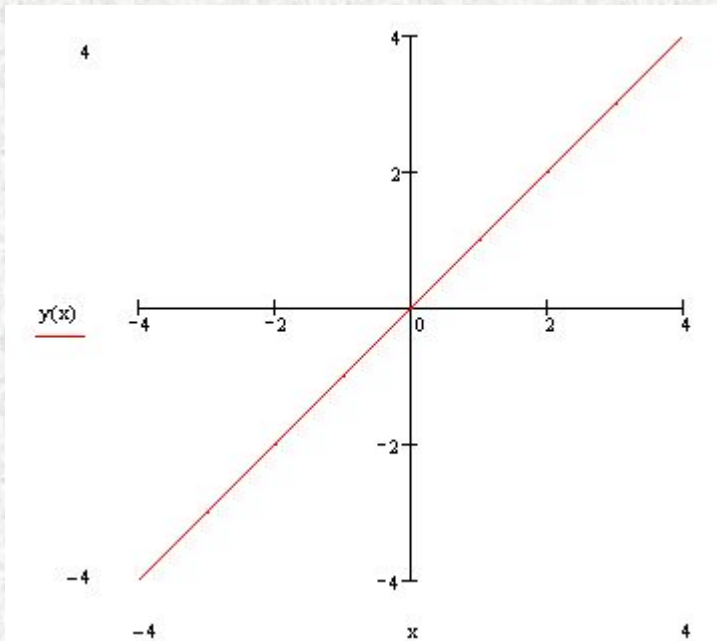
► Функция $y=f(x)$, заданная на множестве X , называется **ограниченной** на этом множестве, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.



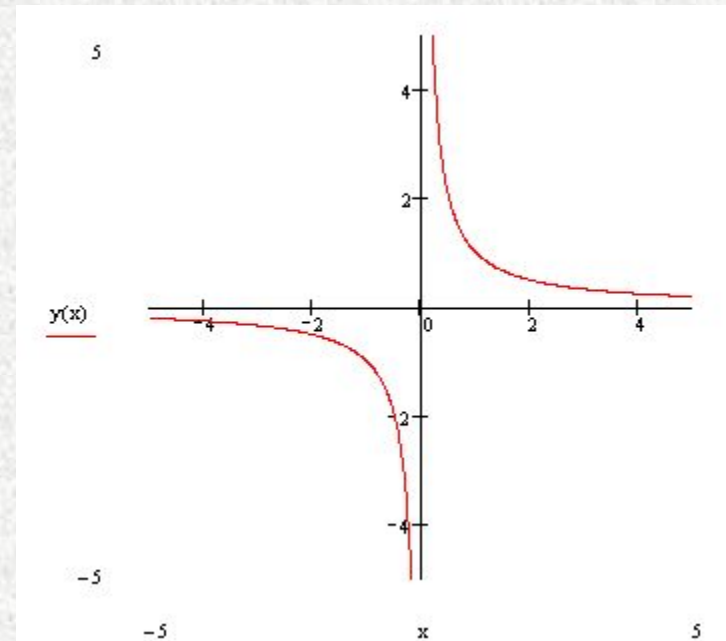
2.4 Основные элементарные функции и их графики.

Основными элементарными функциями называют следующие функции.

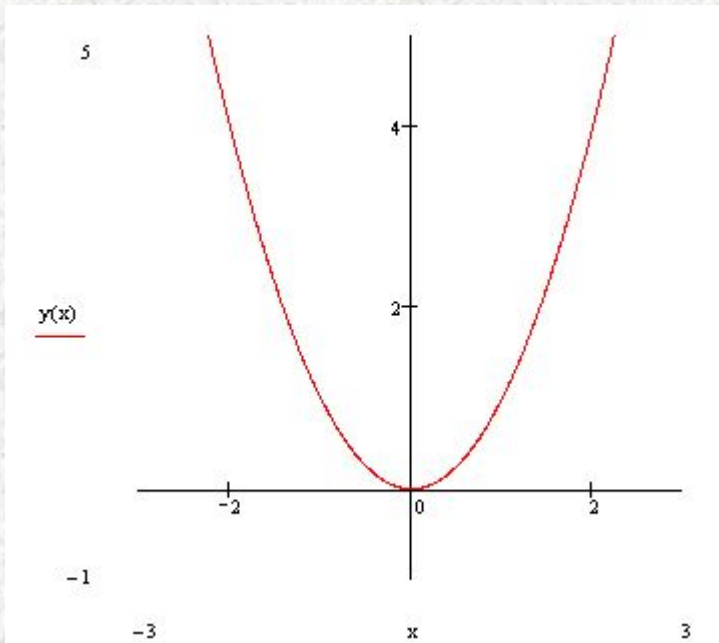
1) Степенная функция $y=x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.



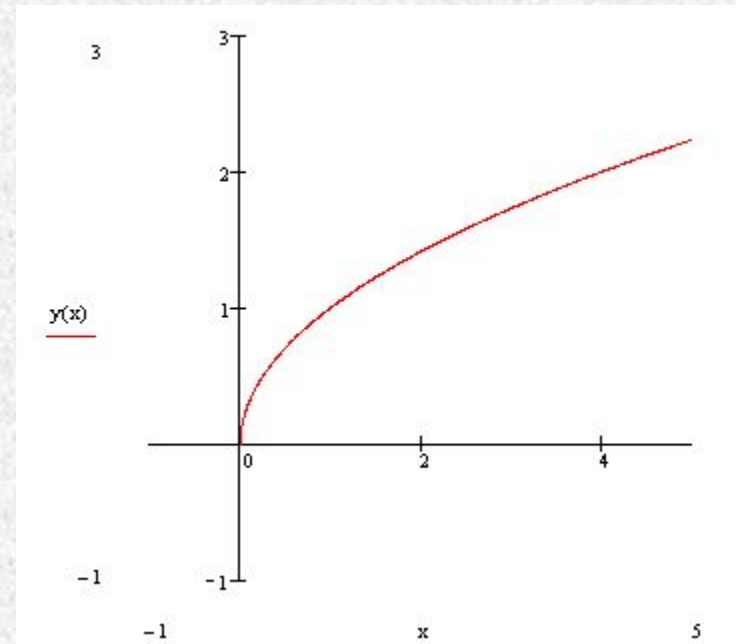
$$y = x$$



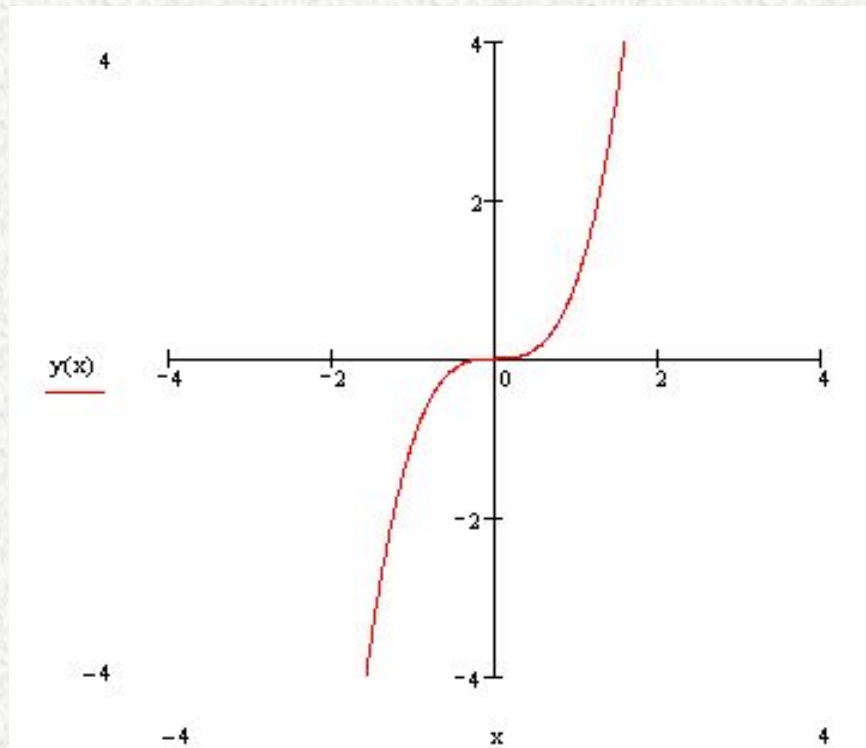
$$y = 1/x$$



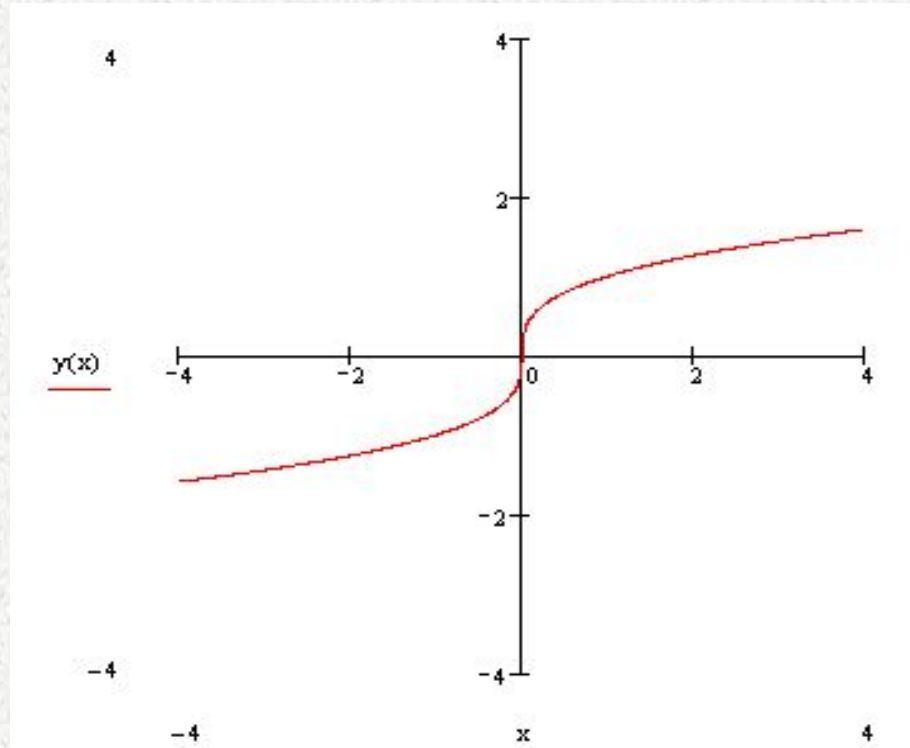
$$y = x^2$$



$$y = \sqrt{x}$$

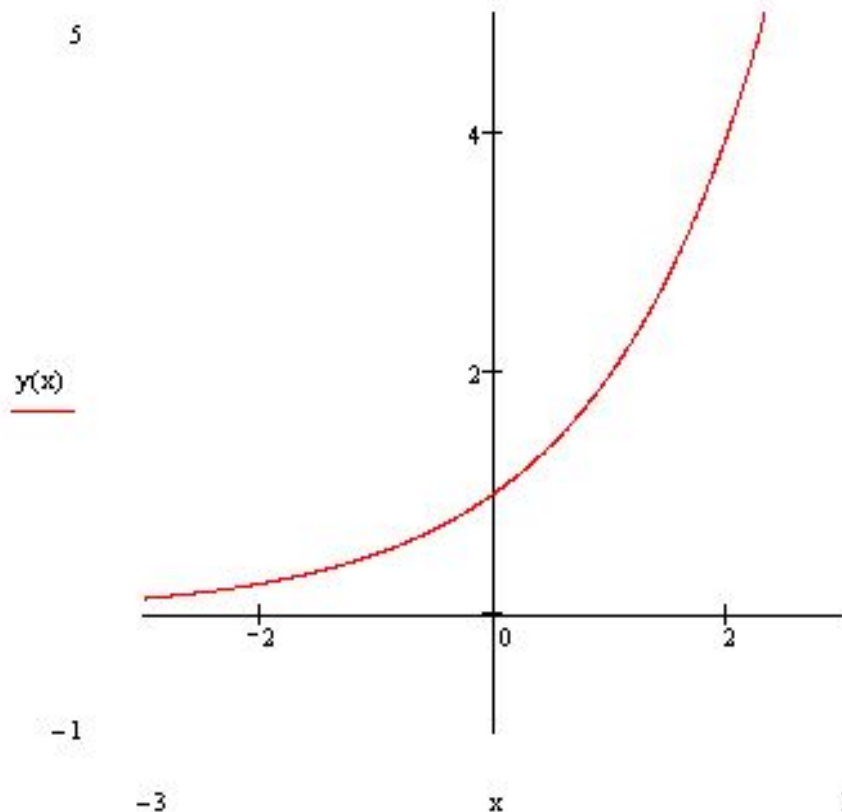


$$y = x^3$$

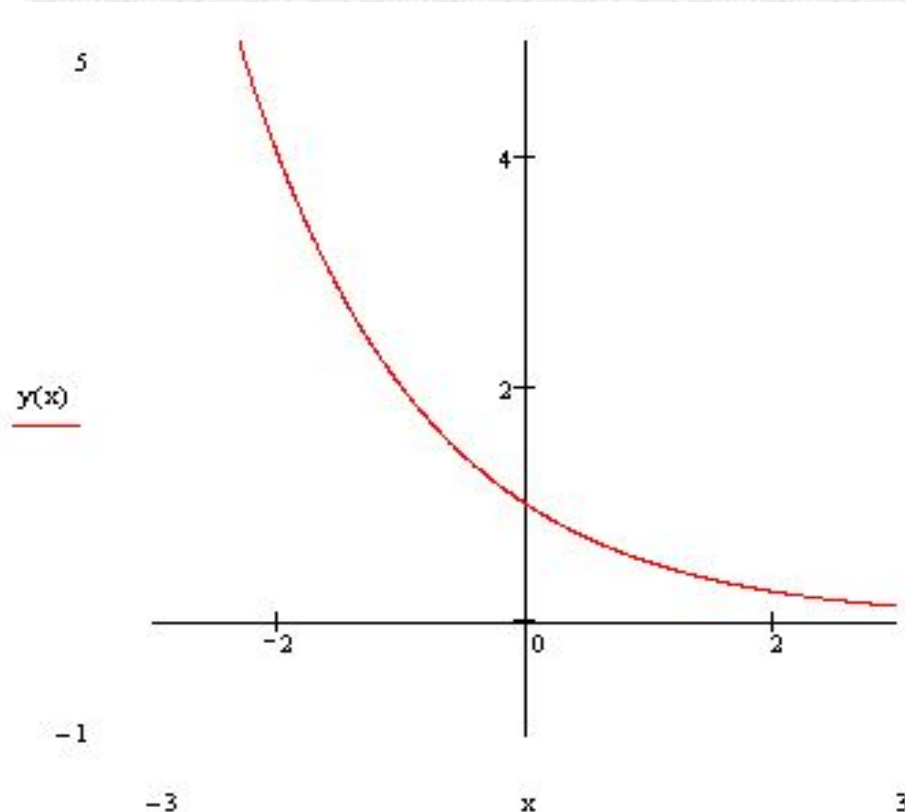


$$y = \sqrt[3]{x}$$

2) Показательная функция $y=a^x, a>0, a \neq 1$.

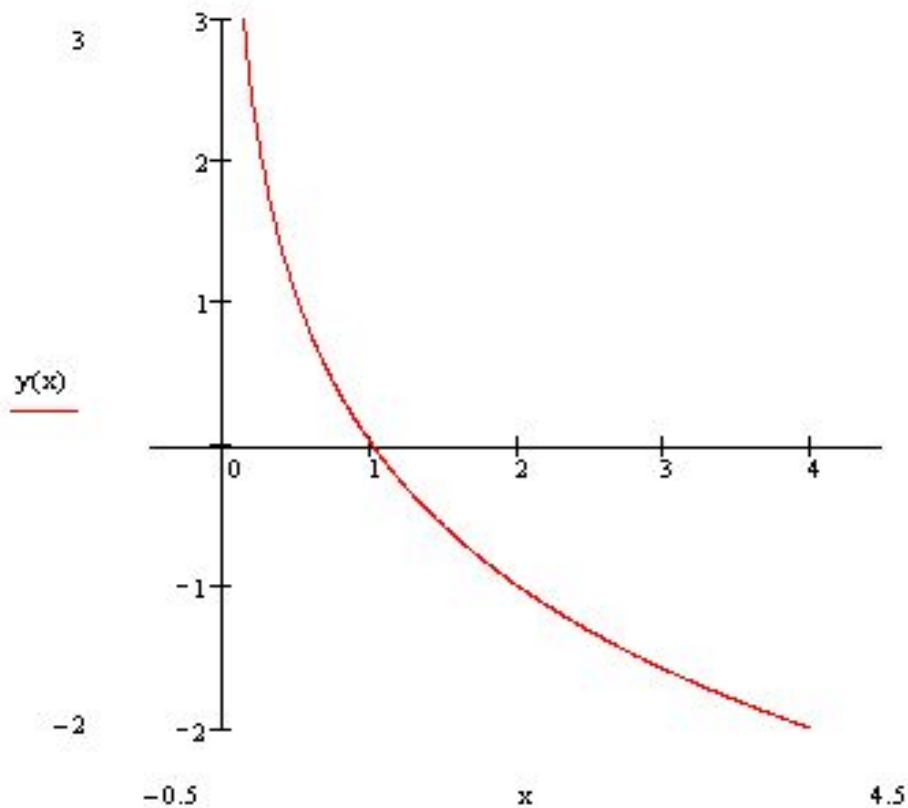
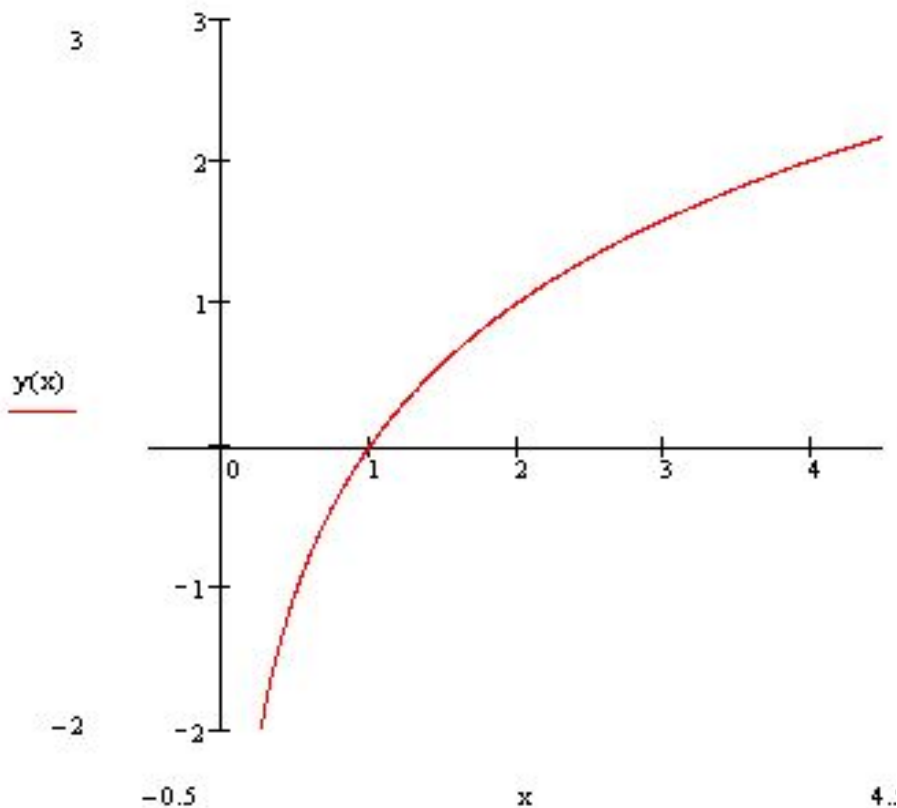


$$y = a^x, \quad a > 1$$



$$y = a^x, \quad 0 < a < 1$$

3) Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$.

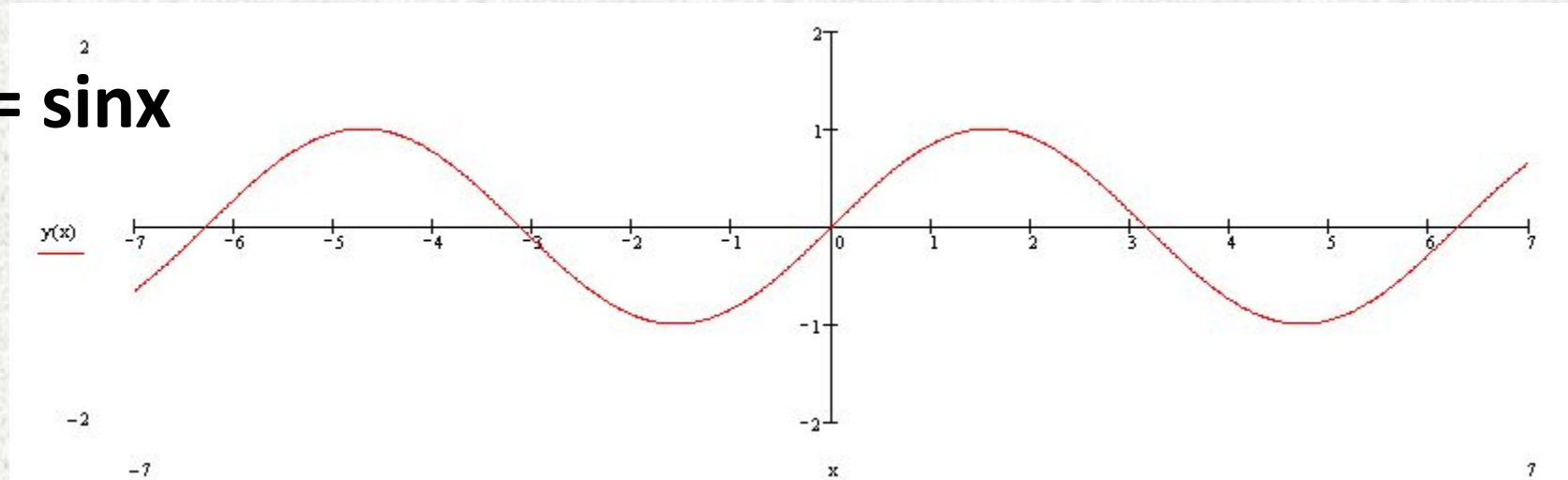


$$y = \log_a x, \quad a > 1$$

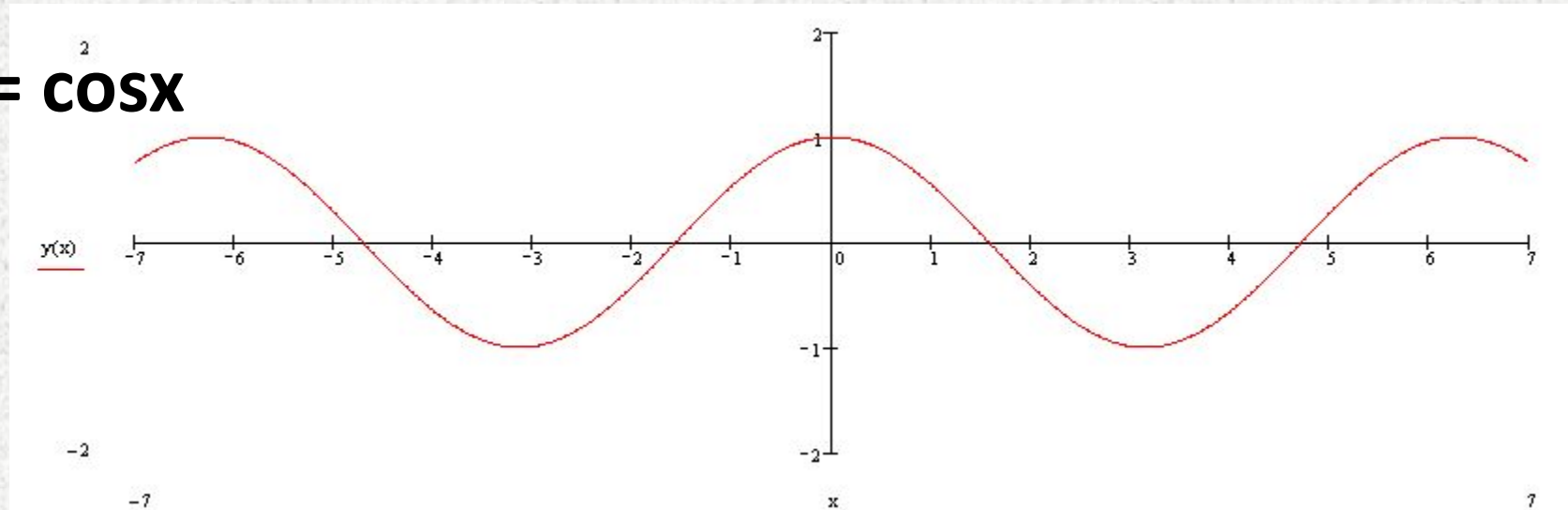
$$y = \log_a x, \quad 0 < a < 1$$

4) Тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$.

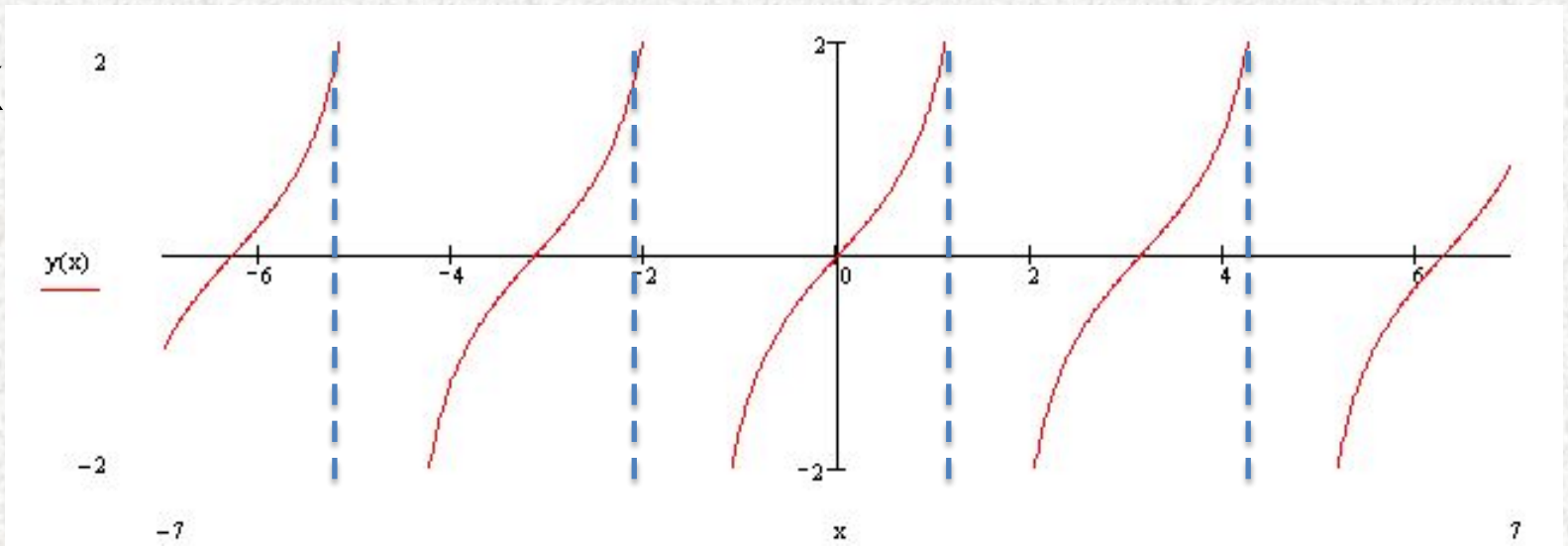
$$y = \sin x$$



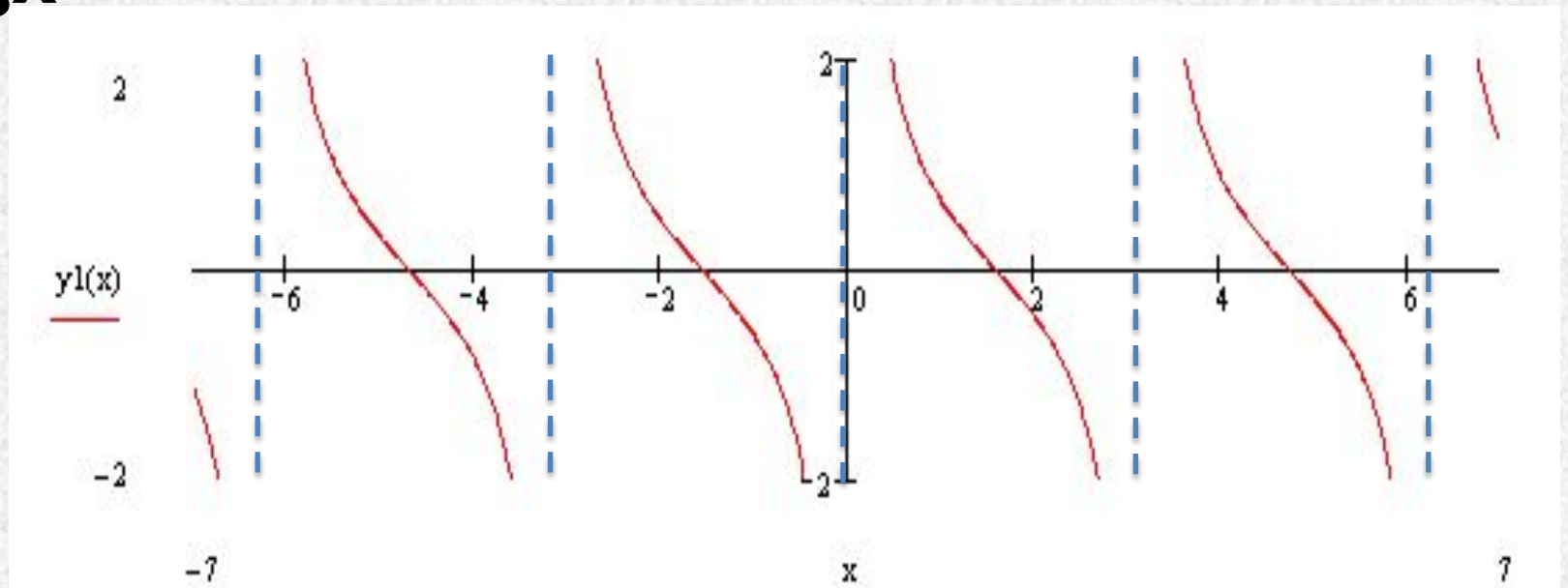
$$y = \cos x$$



$$y = \operatorname{tg} x$$

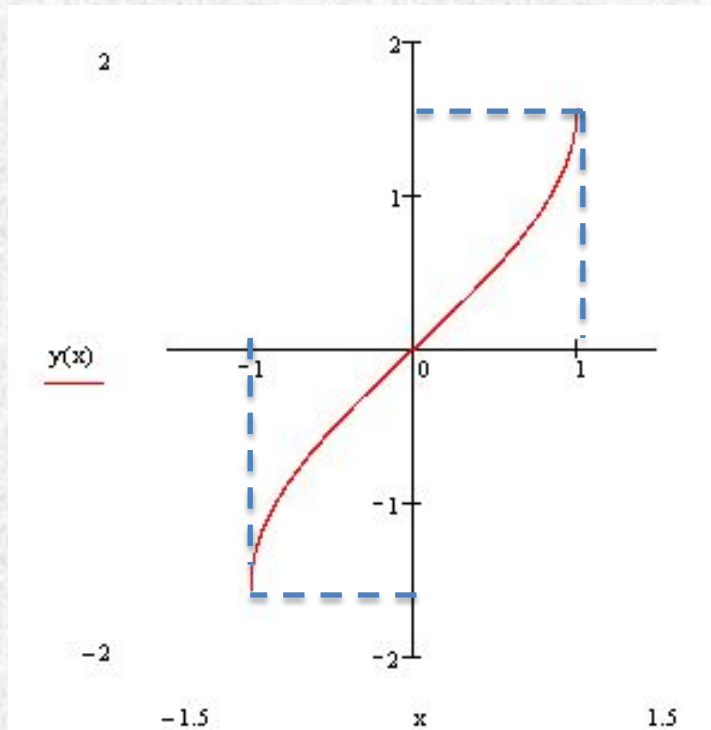


$$y = \operatorname{ctg} x$$

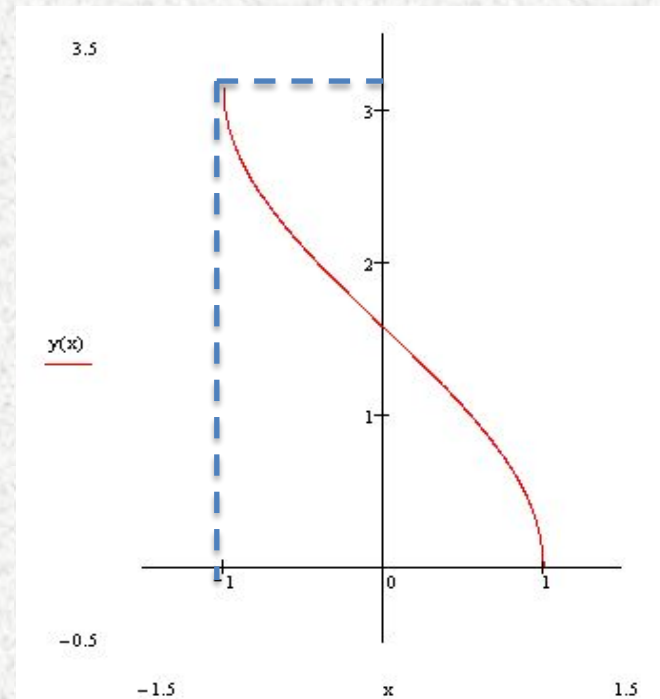


5) Обратные тригонометрические функции $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctg x$, $y=\text{arcctg} x$.

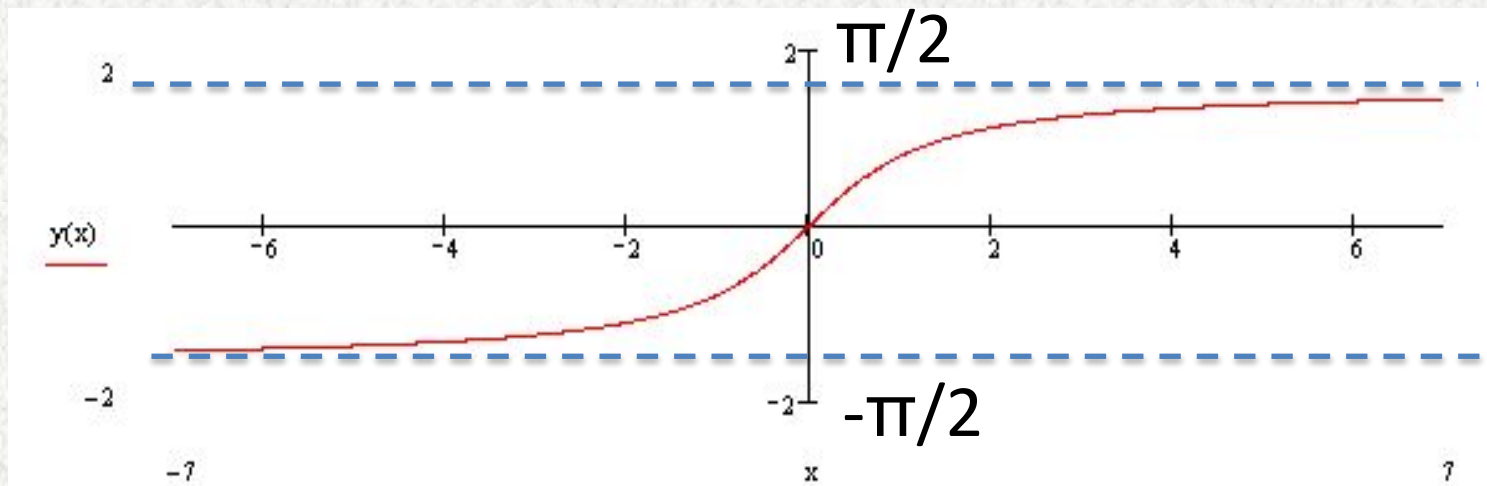
$y = \arcsin x$



$y = \arccos x$



$y = \text{arctg}x$



$y = \text{arcctg}x$

