



# §1. МНОЖЕСТВА

## 1.1 Основные понятия

► **Множество это** совокупность (собрание, класс, семейство...) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку.

► Объекты, образующие множество, называются **его элементами**.

Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита  $A, B, \dots, X, Y, \dots$ , а их элементы — малыми буквами  $a, b, \dots, x, y, \dots$

Если элемент  $x$  принадлежит множеству  $X$ , то записывают  $x \in X$ ; запись  $x \notin X$  означает, что элемент  $x$  не принадлежит множеству  $X$ .

► Множество, не содержащее ни одного элемента, **называется пустым**, обозначается символом  $\emptyset$ .

► множество  $A$  **называется подмножеством** множества  $B$ , если каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ . Символически это обозначают так  $A \subset B$  (« $A$  включено в  $B$ »).

► Говорят, что множества  $A$  и  $B$  равны или совпадают, и пишут  $A=B$ , если  $A \subset B$  и  $B \subset A$ . Другими словами, множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными.

## 1.2. Числовые множества.

### Множество действительных чисел

► Множества, элементами которых являются числа, называются **числовыми**.

Примерами числовых множеств являются:

$N = \{1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$  —

— множество натуральных чисел;

$Z_0 = \{0; 1; 2; \dots; n; \dots\}$  —

— множество целых неотрицательных чисел;

$Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots; \pm n; \dots\}$  —

— множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \{m/n: m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$  —

— множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$  — множество действительных

чисел.  
Между этими множествами существует  
соотношение

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$   
Множество  $\mathbb{R}$  содержит рациональные и  
иррациональные числа.

► Действительные числа, не являющиеся  
рациональными, называются **иррациональными**

( $\mathbb{I}$ )  
 $\mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

# 1.3 Числовые промежутки.

## Окрестность точки.

Пусть  $a$  и  $b$  — действительные числа, причем  $a < b$ .  
► **Числовыми промежутками** (интервалами) называют подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

$[a; b] = \{x : a \leq x \leq b\}$  — отрезок (замкнутый

промежуток);  
 $(a; b) = \{x : a < x < b\}$  — интервал (открытый

промежуток);  
 $[a; b) = \{x : a \leq x < b\}$  или  $(a; b] = \{x : a < x \leq b\}$  —

полуоткрытые интервалы (или полуоткрытые

отрезки);  
 $(-\infty; b] = \{x : x \leq b\}$ ;

$[a; +\infty) = \{x : x \geq a\}$ ;

$(-\infty; b) = \{x : x < b\}$ ;

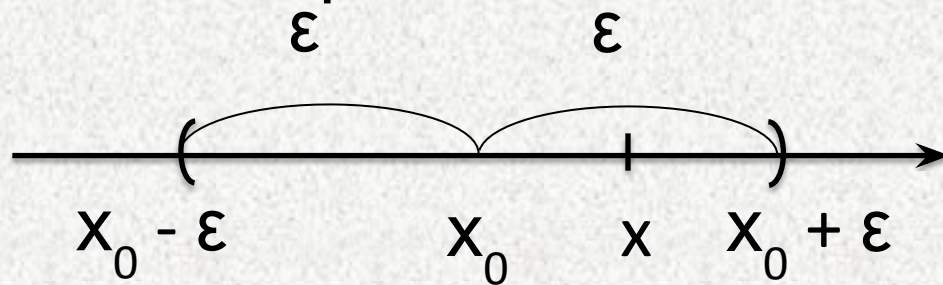
$(a; +\infty) = \{x : x > a\}$ ;

$(-\infty, \infty) = \{x : -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$  — бесконечные интервалы (промежутки).

Пусть  $x_0$  — любое действительное число (точка на числовой прямой).

► **Окрестностью точки  $x_0$**  называется **любой интервал  $(a; b)$** , содержащий точку  $x_0$ .

В частности, интервал  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon > 0$ , называется  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $x_0$ . Число  $x_0$  называется центром.



Если  $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ , то выполняется неравенство  $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ , или, что то же,  $|x - x_0| < \varepsilon$ . Выполнение последнего неравенства означает попадание точки  $x$  в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x_0$ .

# §2. ФУНКЦИЯ

## 2.1. Понятие функции.

Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости (связи) между элементами двух множеств.

Пусть даны два непустых множества  $X$  и  $Y$ .

► Если каждому элементу  $x \in X$  ставится в соответствие один и только один элемент  $y \in Y$ , то говорят, что на множестве  $X$  задана **однозначная функция  $y=f(x)$** .

Пример.  $y = \sin x$ ,  $y = x^3$ ,  $y = \ln x$ .



►  $x$  называется **независимой переменной** или аргументом,  $y$  называется **зависимой переменной**.

► Множество  $X$  называется **областью определения** функции  $f$  и обозначается  $D(f)$ . Множество всех  $y \in Y$  называется **множеством значений** функции  $f$  и обозначается  $E(f)$ .

► Если каждому элементу  $x \in X$  ставится в соответствие два или более значений  $y \in Y$ , то говорят, что на множестве  $X$  задана **многозначная функция**  $f(x, y) = 0$ .

Пример.  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $x^2 - y^2 = 1$ ,  $y^2 = 8x$ .

## 2.2 Числовые функции. График функции. Способы задания функций

Пусть задана функция  $y=f(x)$ .

► Если элементами множеств  $X$  и  $Y$  являются действительные числа (т. е.  $X \in \mathbb{R}$  и  $Y \in \mathbb{R}$ ), то функцию  $f$  называют **числовой функцией**.

► **Графиком функции  $y=f(x)$**  называется множество всех точек плоскости  $Oxy$ , для каждой из которых  $x$  является значением аргумента, а  $y$  — соответствующим значением функции.

Чтобы задать функцию  $y=f(x)$ , необходимо указать правило, позволяющее, зная  $x$ , находить соответствующее значение  $y$ .

Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, табличный, графический.

**Аналитический способ:** функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.

Например: 1)  $y = 9 - x^2$ ;

2)  $x^2 - y^2 = 1$ ;

3)  $y = \begin{cases} 8x, & \text{если } x < 1; \\ x^3 - 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию  $y = f(x)$ .

**Графический способ:** задается график функции.

Часто графики вычерчиваются автоматически самопишущими приборами или изображаются на экране дисплея.

Значения функции  $y$ , соответствующие тем или иным значениям аргумента  $x$ , непосредственно находятся из этого графика.

Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком — его неточность.

**Табличный способ:** функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции.

Например, известные таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы.

На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных опытным путем или в результате наблюдений.

## 2.3. Основные свойства функции

### 1. Четность и нечетность функции.

► Функция  $y=f(x)$ , заданная на множестве  $X$ , называется **четной(нечетной)**, если выполнены следующие условия:

а) множество  $X$  симметрично относительно нуля;

б) для любого  $x \in X$  справедливо равенство  $f(-x)=f(x)$  для четной функции ( $f(-x)=-f(x)$  для нечетной функции).

График четной функции симметричен относительно оси  $Oy$ .

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

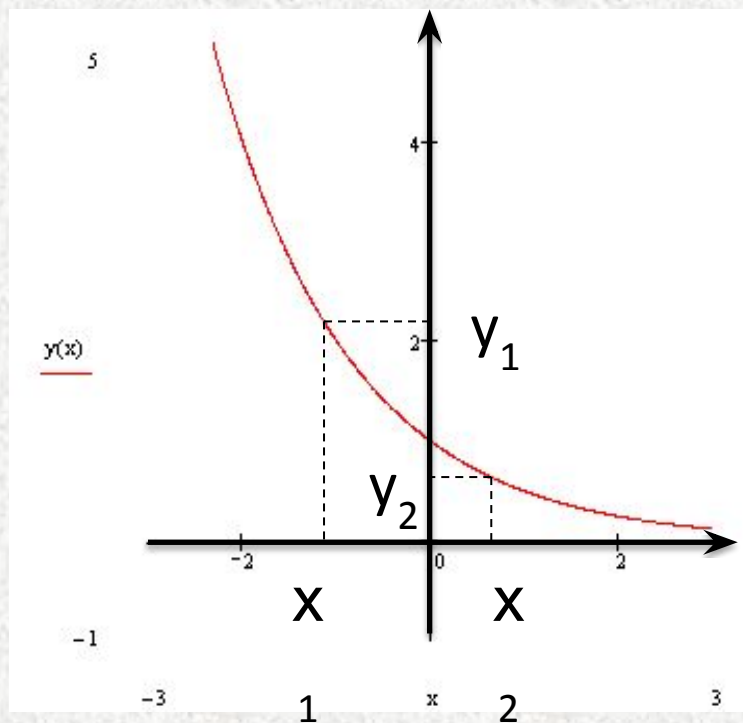
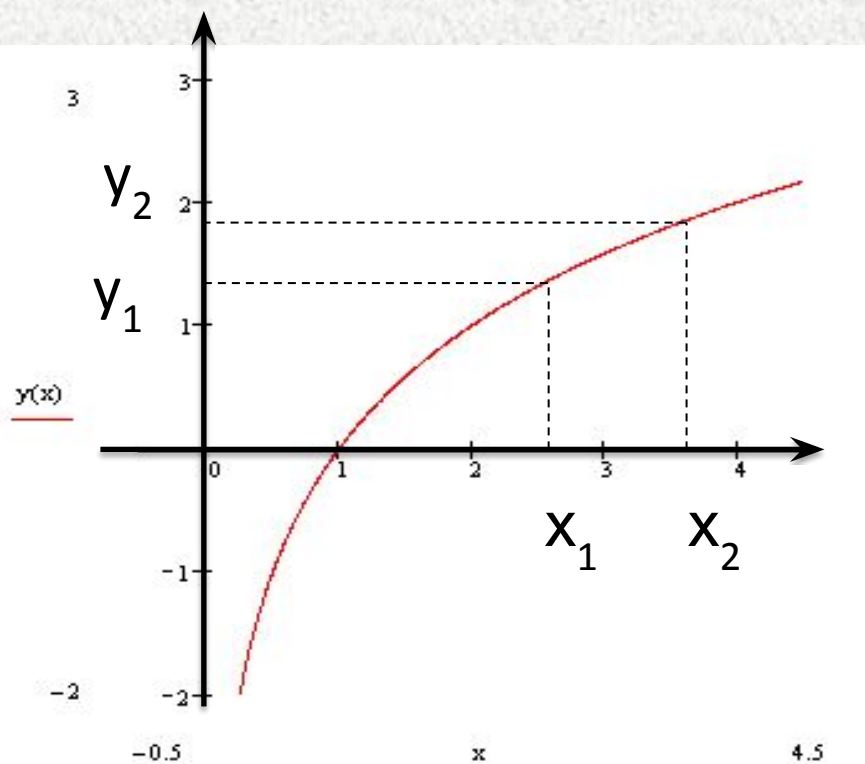
# Пример

- $y=x^2$ ,  $y=\sqrt{(1+x^2)}$ ,  $y=\ln|x|$  — четные функции;
- $y=\sin x$ ,  $y=x^3$  — нечетные функции;
- $y=x-1$ ,  $y=\sqrt{x}$ ,  $y=\ln x$  — функции общего вида, т. е. не четные и не нечетные.

## 2. Монотонность функции.

► Функция  $y=f(x)$ , заданная на множестве  $X$ , называется **возрастающей (убывающей)**,

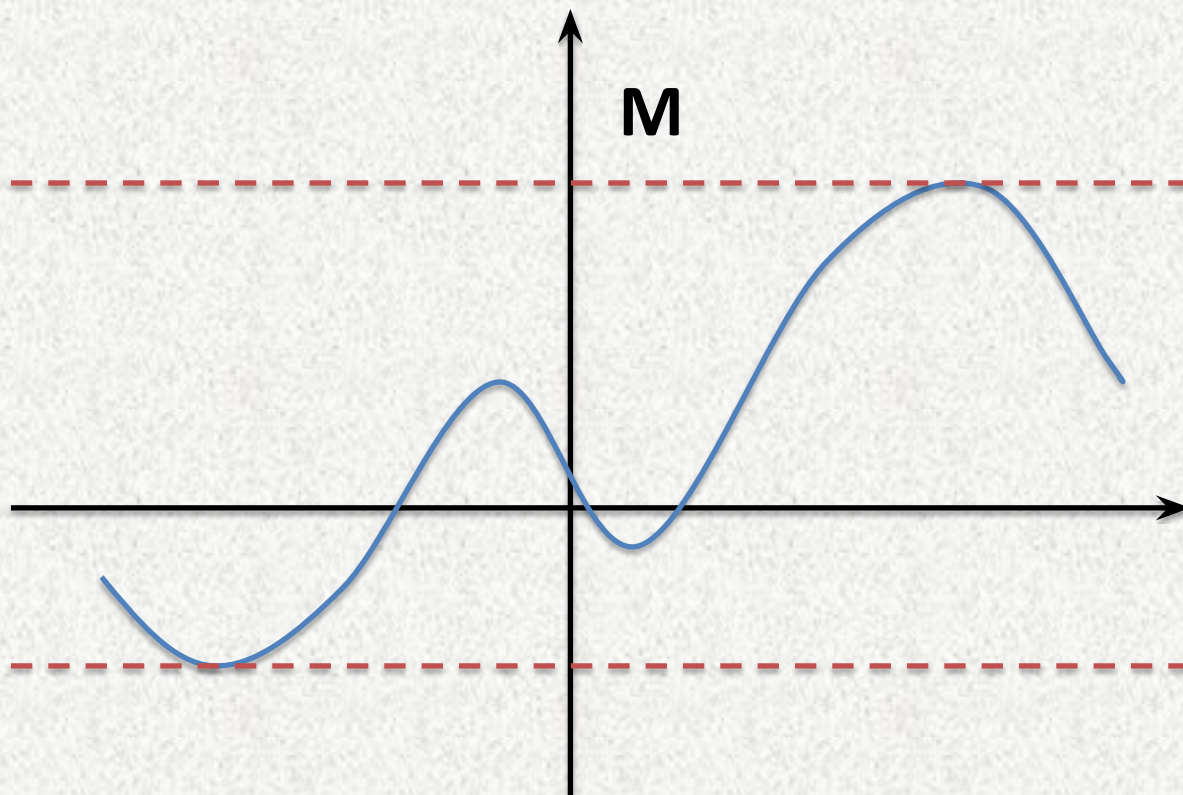
если для любых значений  $x_1$  и  $x_2$  таких, что  $x_1 < x_2$  справедливо неравенство:  $f(x_1) < f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ).





### 3. Ограниченность функции.

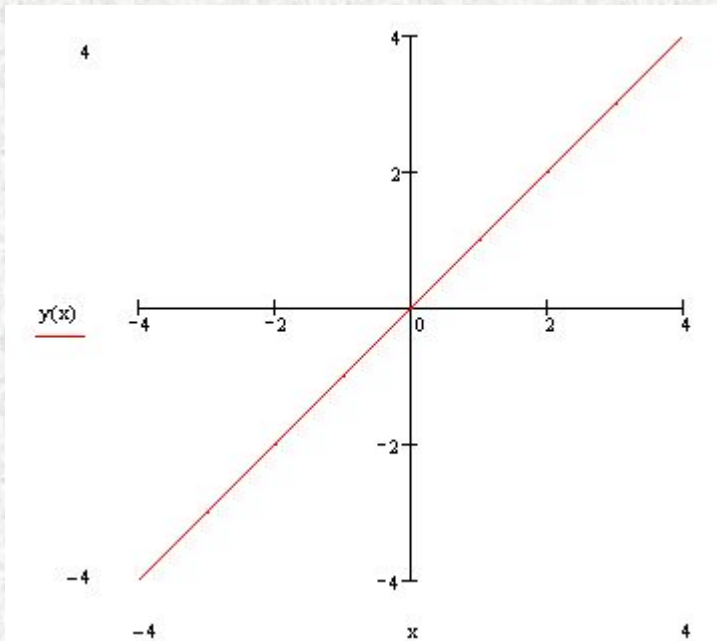
► Функция  $y=f(x)$ , заданная на множестве  $X$ , называется **ограниченной** на этом множестве, если существует такое число  $M > 0$ , что для всех  $x \in X$  выполняется неравенство  $|f(x)| \leq M$ .



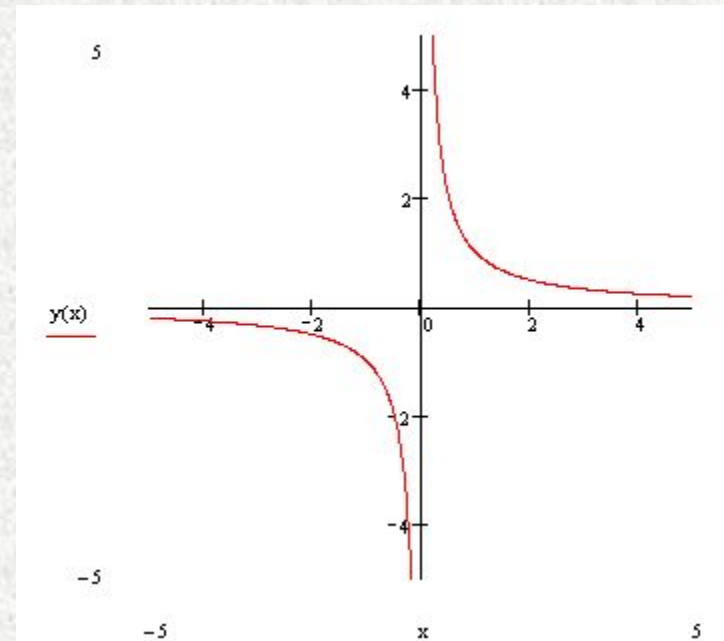
## 2.4 Основные элементарные функции и их графики.

Основными элементарными функциями называют следующие функции.

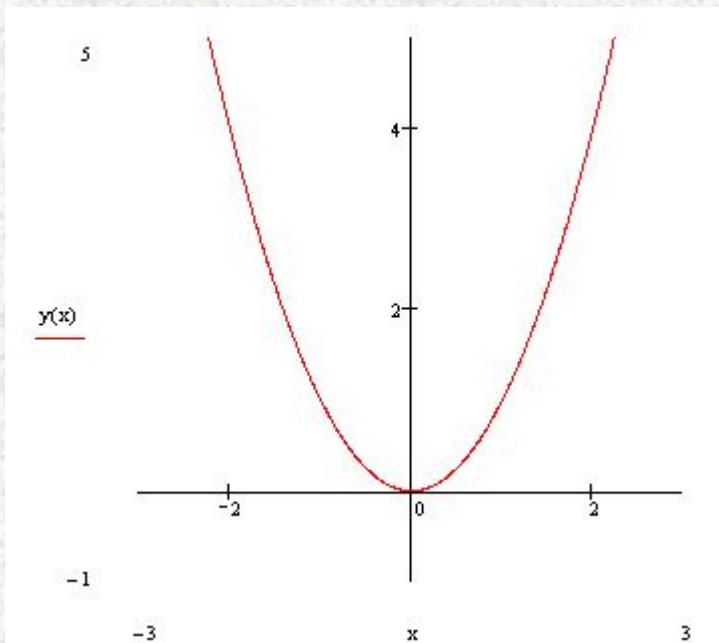
1) Степенная функция  $y=x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .



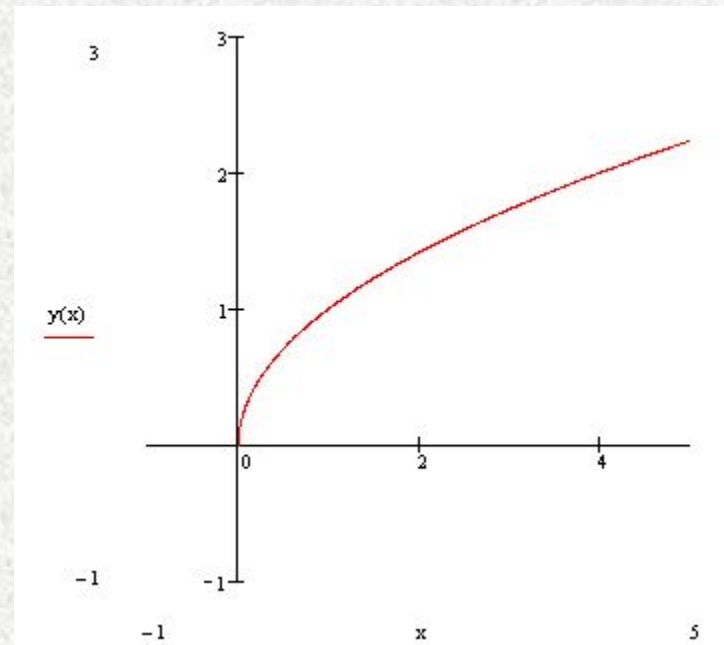
$$y = x$$



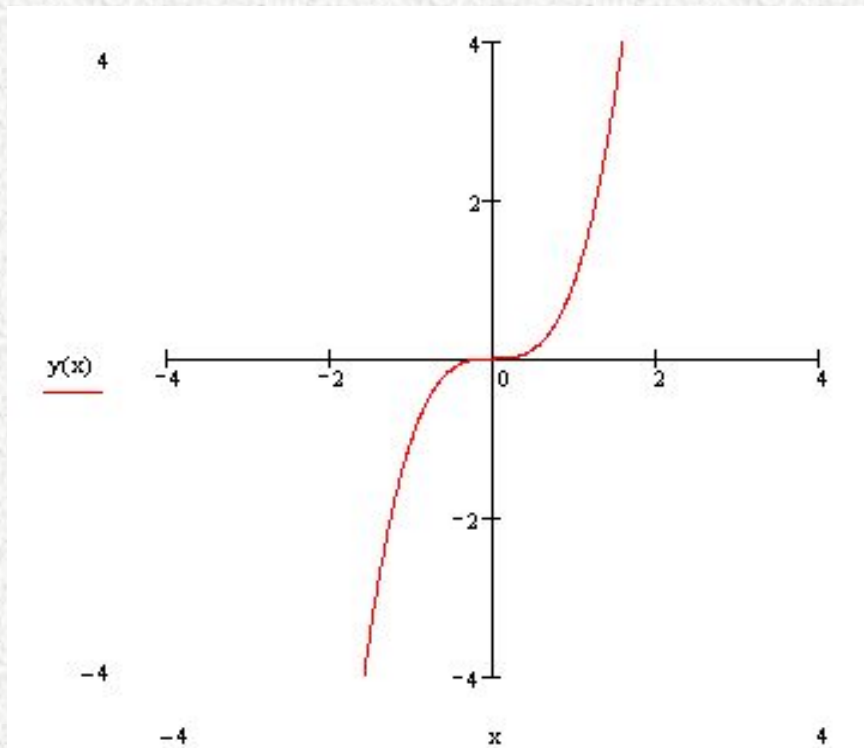
$$y = 1/x$$



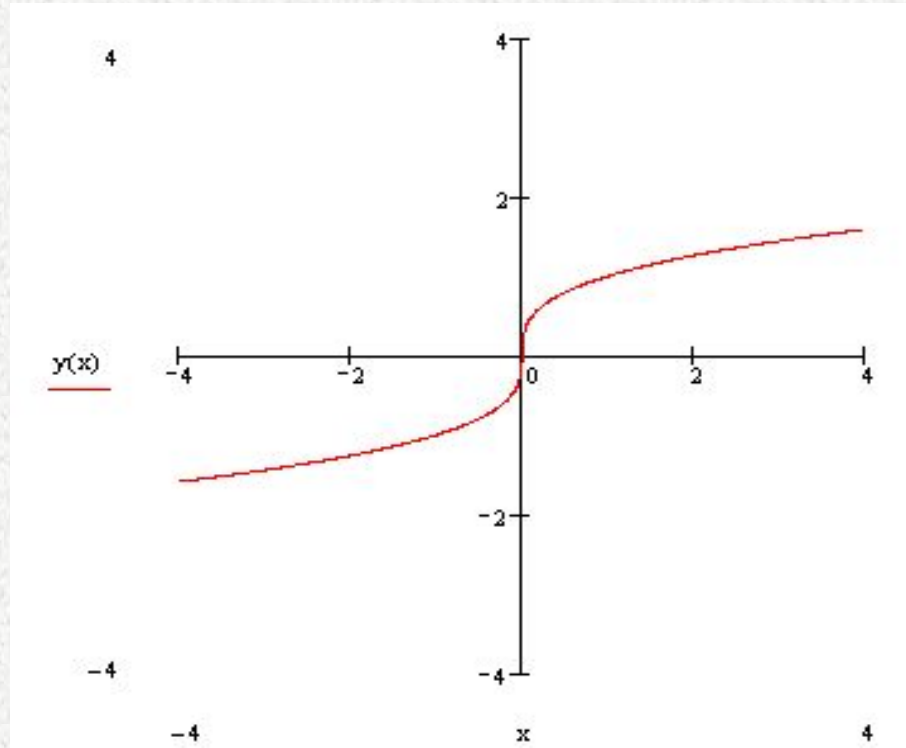
$$y = x^2$$



$$y = \sqrt{x}$$

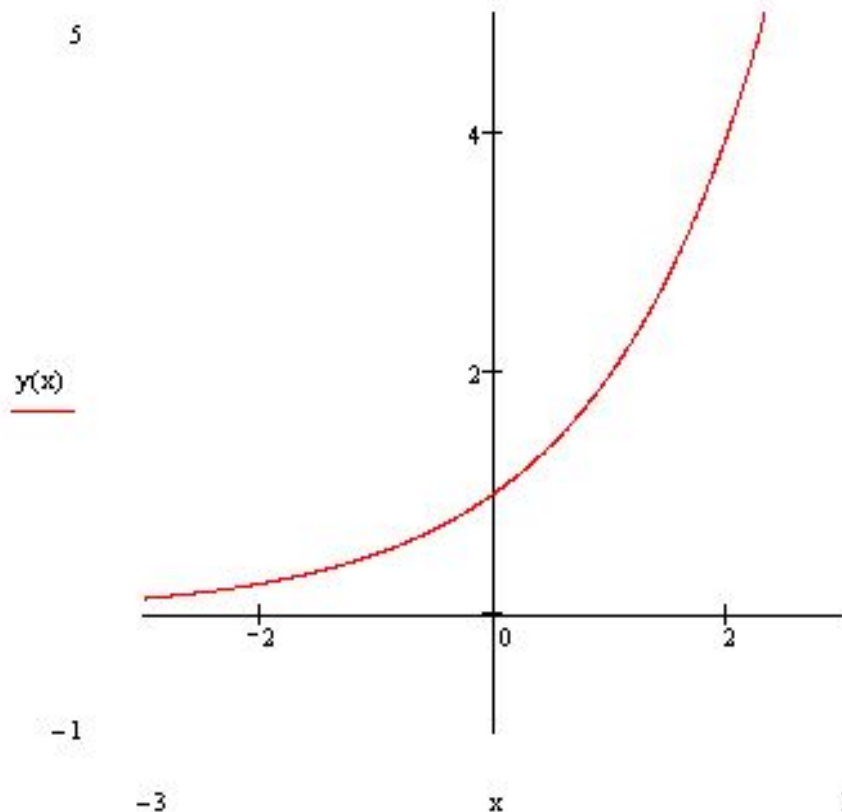


$$y = x^3$$

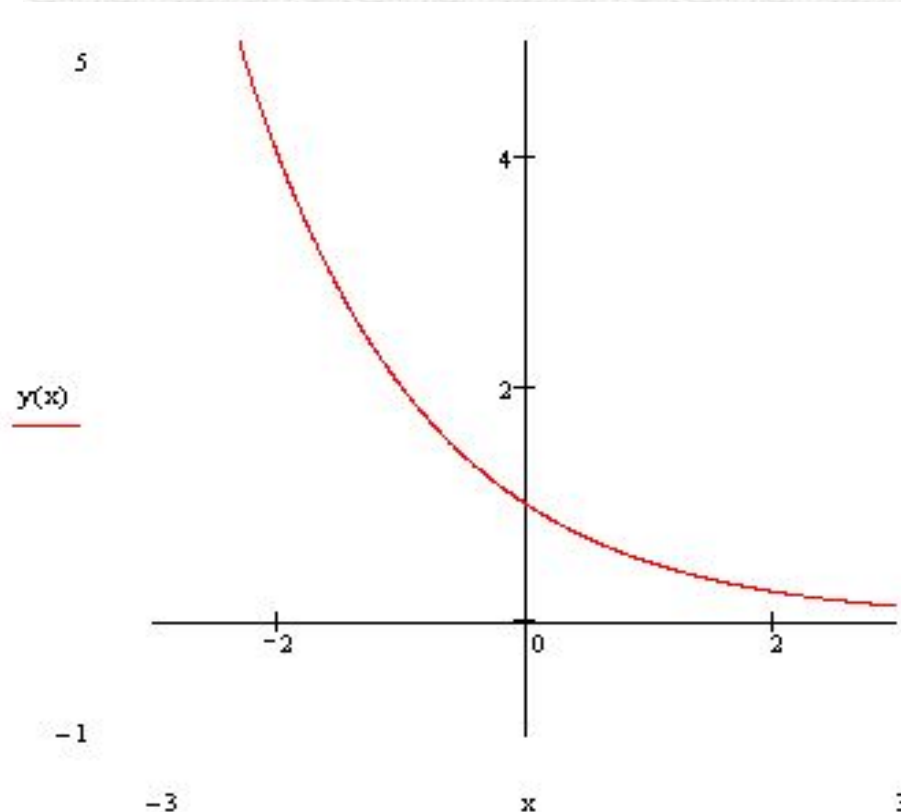


$$y = \sqrt[3]{x}$$

## 2) Показательная функция $y=a^x, a>0, a \neq 1$ .

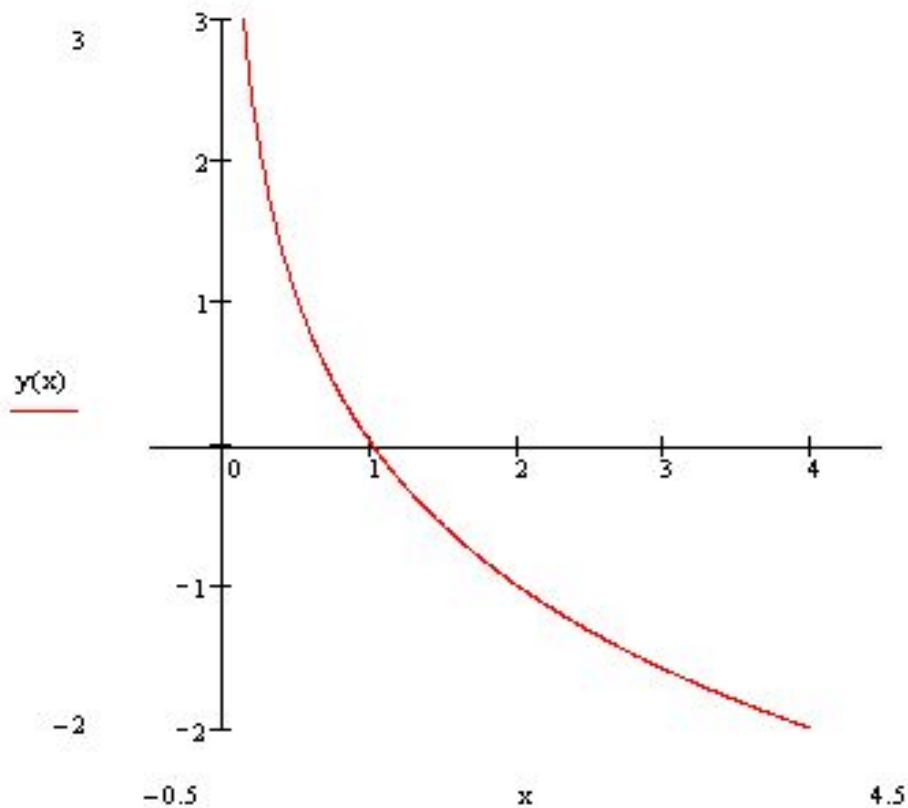
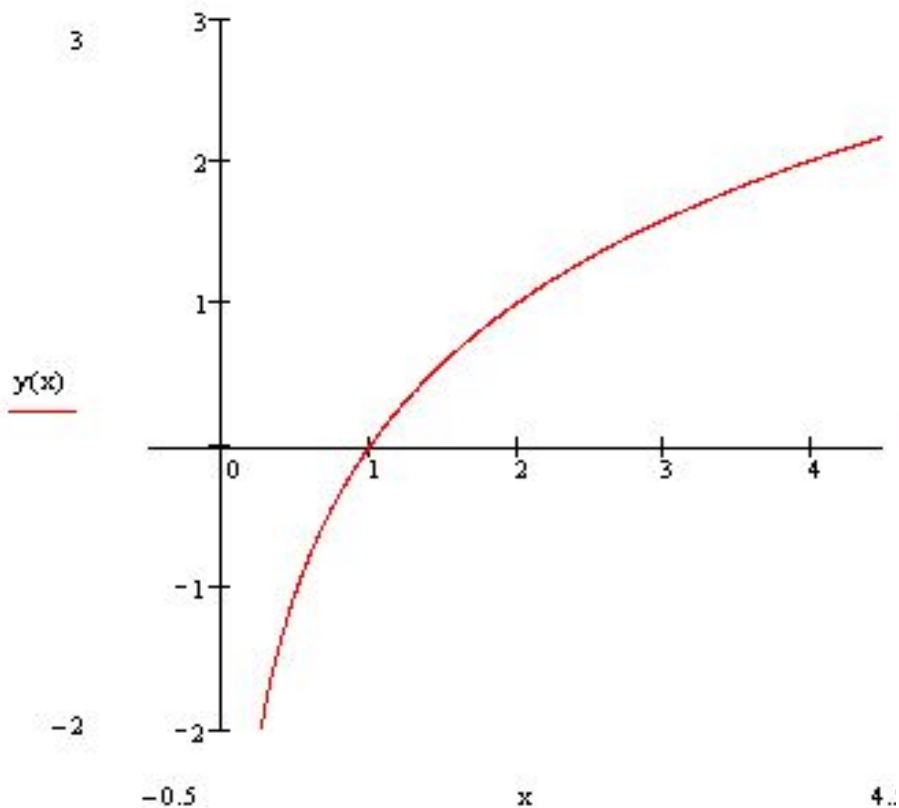


$$y = a^x, \quad a > 1$$



$$y = a^x, \quad 0 < a < 1$$

### 3) Логарифмическая функция $y = \log_a x$ , $a > 0, a \neq 1$ .

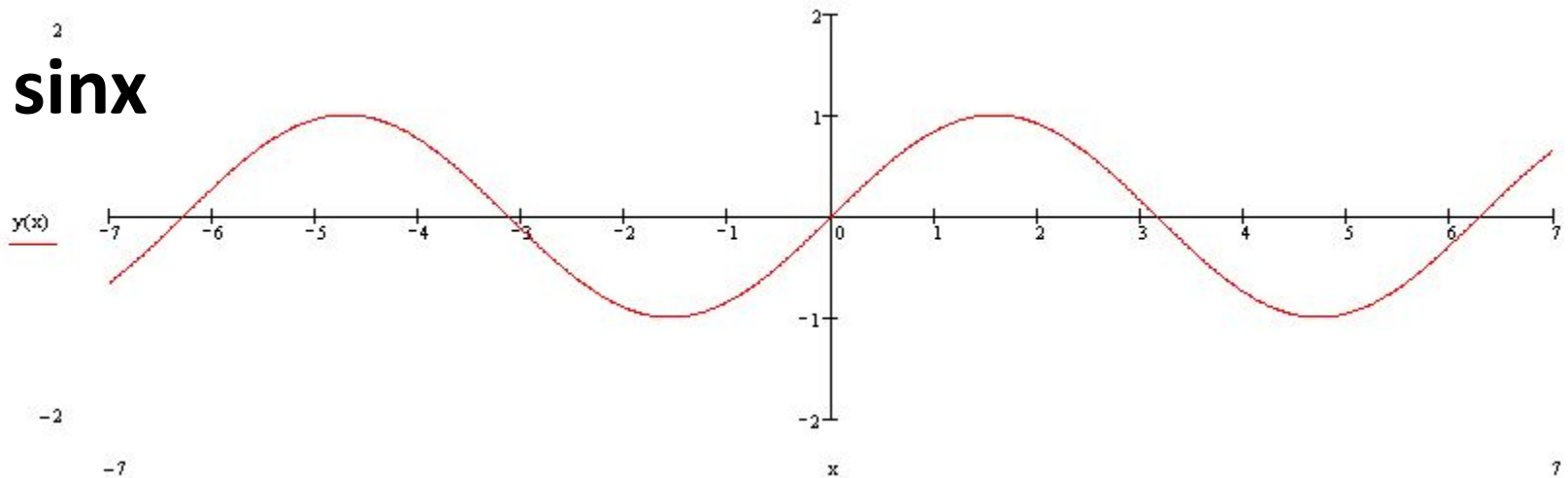


$$y = \log_a x, \quad a > 1$$

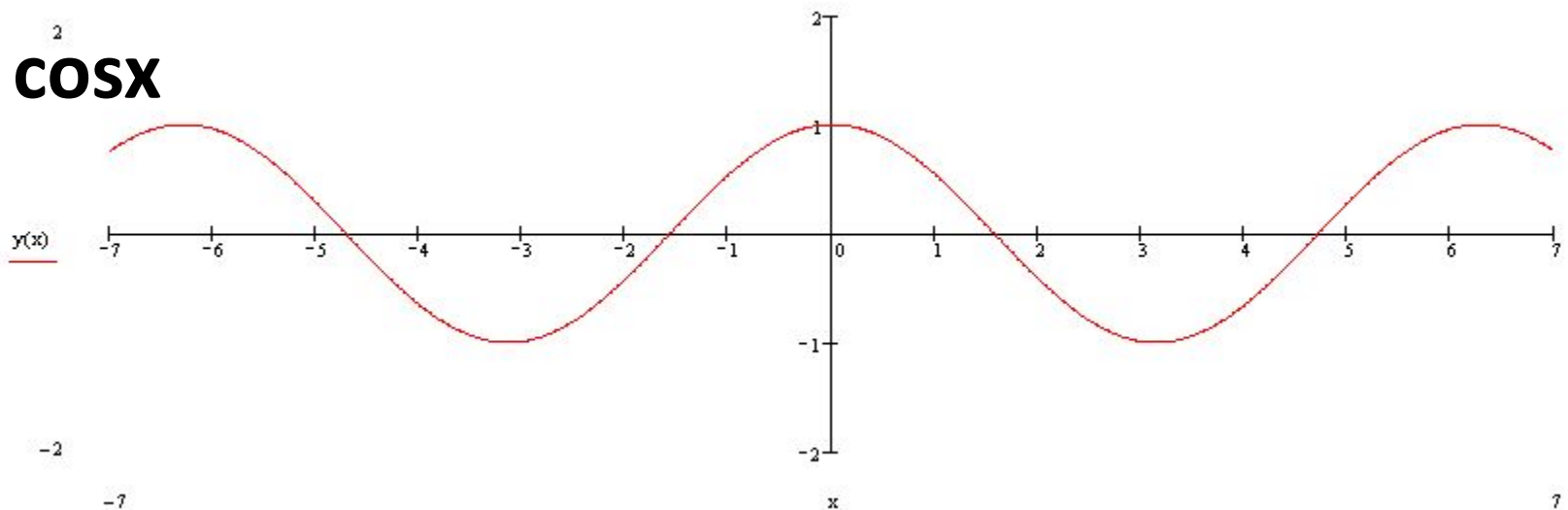
$$y = \log_a x, \quad 0 < a < 1$$

#### 4) Тригонометрические функции $y=\sin x$ , $y=\cos x$ , $y=\operatorname{tg} x$ , $y=\operatorname{ctg} x$ .

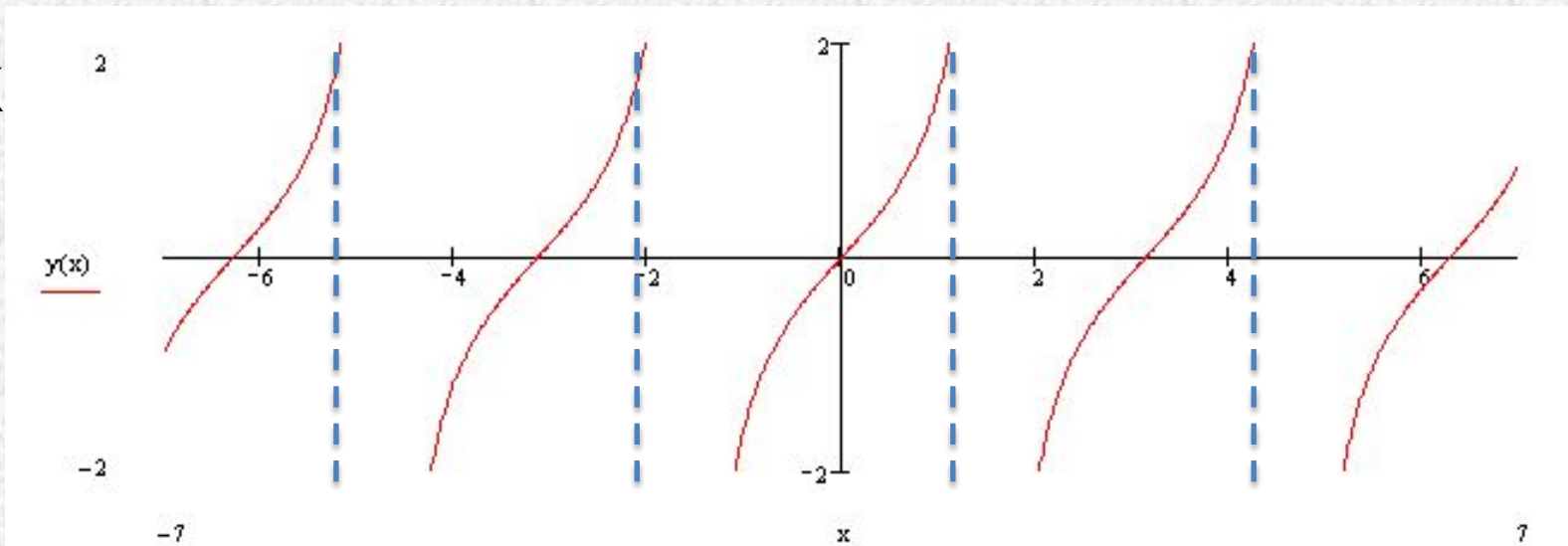
$$y = \sin x$$



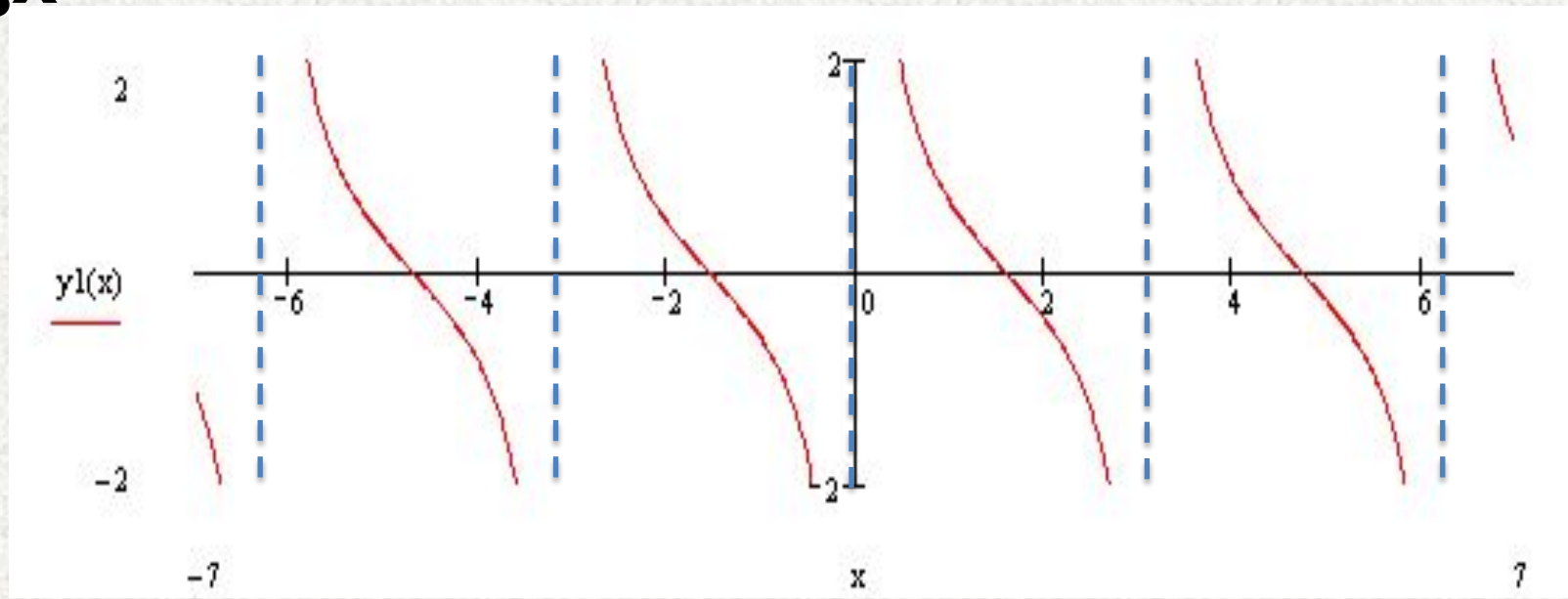
$$y = \cos x$$



**$y = \text{tg}x$**



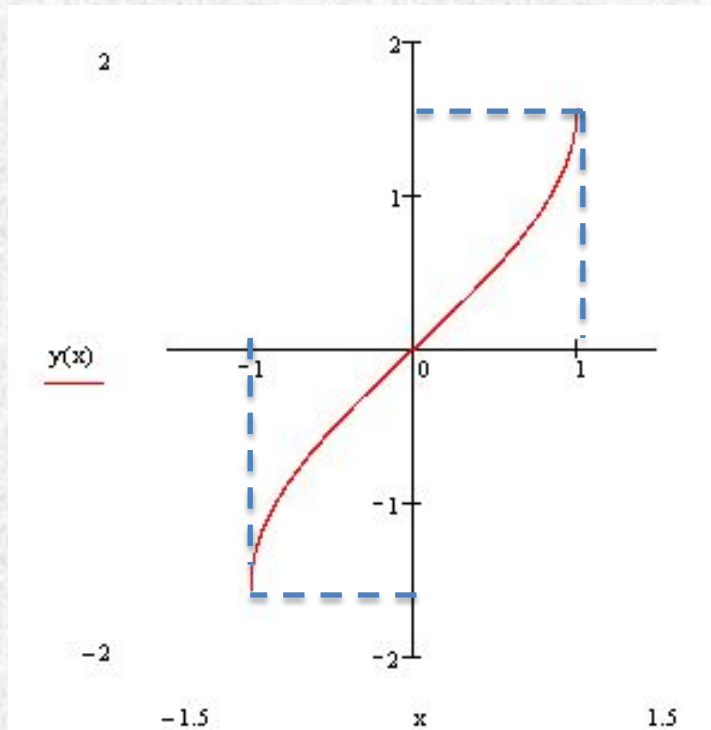
**$y = \text{ctg}x$**



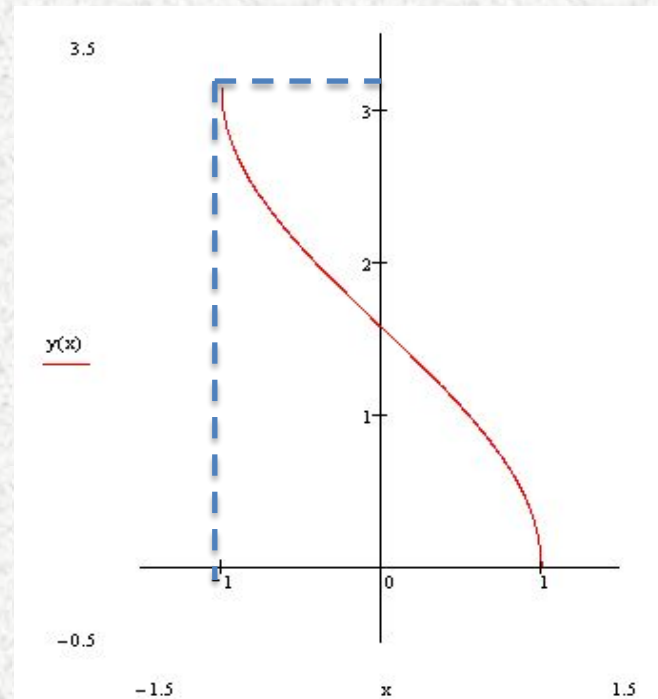


5) Обратные тригонометрические функции  $y=\arcsin x$ ,  $y=\arccos x$ ,  $y=\arctg x$ ,  $y=\text{arcctg} x$ .

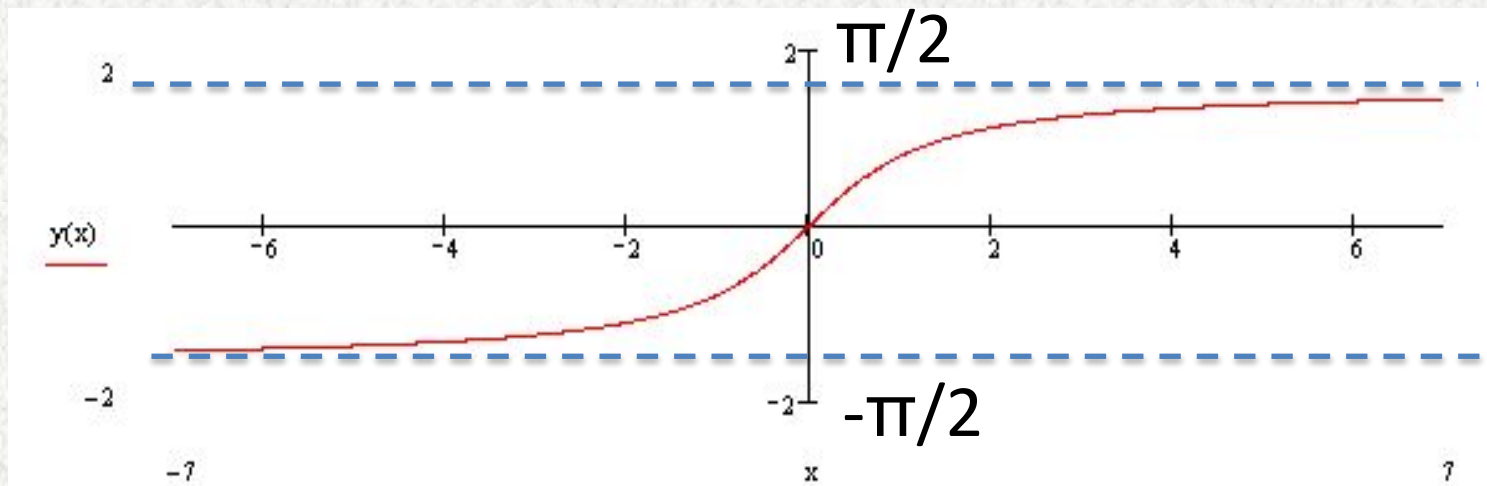
**$y = \arcsin x$**



**$y = \arccos x$**



# $y = \text{arctg}x$



# $y = \text{arcctg}x$

