ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ФУНКЦИЯ

§1. МНОЖЕСТВА

1.1 Основные понятия

►**Множество это** совокупность (собрание, класс, семейство...) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку.

►Объекты, образующие множество, называются **его элементами**.

Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита A, B,..., X, Y,..., а их элементы — малыми буквами a, b,... ...,x,y,...

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$; запись $x \notin X$ означает, что элемент x не принадлежит множеству X.

►Множество, не содержащее ни одного элемента, **называется пустым**, обозначается символом **∅.**

► множество А **называется подмножеством** множества В, если каждый элемент множества А является элементом множества В. Символически это обозначают так $A \subset B$ («А включено в В»).

►Говорят, что множества А и В равны или совпадают, и пишут А=В, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Другими словами, множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными.

1.2. Числовые множества. Множество действительных чисел

►Множества, элементами которых являются числа, **называются числовыми**.

Примерами числовых множеств являются:

$N=\{1; 2; 3; ...; n; ...\}$ —

— множество натуральных чисел;

$Zo=\{0; 1; 2; ...; n; ...\}$ —

— множество целых неотрицательных чисел;

$Z=\{0; \pm1; \pm2; ...; \pm n; ...\}$ —

— множество целых чисел;

Q={m/n: m∈Z,n∈N} —

— множество рациональных чисел;

R— множество действительных чисел.

Между этими множествами существует соотношение

$N \subset Z_0 \subset Z \subset Q \subset R$.

Множество R содержит рациональные и иррациональные числа.

►Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются **иррациональными (I)**.

$I \cup Q = R$

1.3 Числовые промежутки. Окрестность точки.

Пусть a и b—действительные числа, причем $a < b$.

► **Числовыми промежутками** (интервалами) называют подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

$[a; b] = \{x : \alpha \leq x \leq b\}$ — отрезок (замкнутый промежуток);

$(a; b) = \{x : a < x < b\}$ — интервал (открытый промежуток);

$[a;b) = \{x : a \leq x < b\}$ или $(a; b] = \{x : a < x \leq b\}$ — полуоткрытые интервалы (или полуоткрытые отрезки);

$(-\infty; b] = \{x : x \leq b\}$; $[\alpha, +\infty) = \{x : x \geq \alpha\}$;

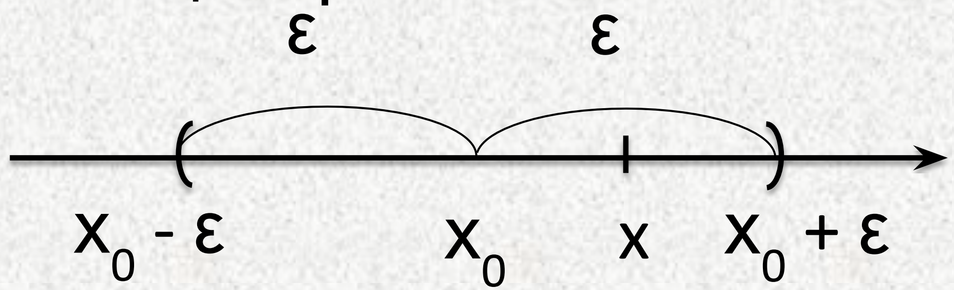
$(-\infty; b) = \{x : x < b\}$; $(a, +\infty) = \{x : x > a\}$;

$(-\infty, \infty) = \{x : -\infty < x < +\infty\} = R$ — бесконечные интервалы (промежутки).

Пусть x_0—любое действительное число (точка на числовой прямой).

►**Окрестностью точки x_0** называется **любой интервал (a; b),** содержащий точку x_0.

В частности, интервал $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ε-окрестностью точки x_0. Число x_0 называется центром.



Если $x \in (x_0-\varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$, то выполняется неравенство $x_0-\varepsilon < x < x_0+\varepsilon$, или, что то же, $|x - x_0| < \varepsilon$. Выполнение последнего неравенства означает попадание точки x в ε -окрестность точки x_0.

§2. ФУНКЦИЯ

2.1. Понятие функции.

Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости (связи) между элементами двух множеств.

Пусть даны два непустых множества X и Y.

►Если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие один и только один элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана **однозначная функция** $\boldsymbol{y=f(x)}$.

Пример. $y = \sin x$, $y = x^3$, $y = \ln x$.

►**x** называется **независимой переменной** или аргументом, **y** называется **зависимой переменной.**

►Множество X называется **областью определения** функции *f* и обозначается D(*f*). Множество всех $y \in Y$ называется **множеством значений** функции *f* и обозначается E(*f*).

► Если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие два или более значений $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана **многозначная функция *f*(x,y)=0.**

Пример. $x^2+y^2=9$, $x^2-y^2=1$, $y^2=8x$.

2.2 Числовые функции. График функции. Способы задания функций

Пусть задана функция $y=f(x)$.

►Если элементами множеств X и Y являются действительные числа (т. е. $X\in R$ и $Y\in R$), то функцию **f называют числовой функцией**.

►**Графиком функции** $y=f(x)$ называется множество всех точек плоскости Oxy, для каждой из которых x является значением аргумента, а y — соответствующим значением функции.

Чтобы задать функцию $y=f(x)$, необходимо указать правило, позволяющее, зная x, находить соответствующее значение y.

Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, табличный, графический.

Аналитический способ: функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.

Например: 1) $y = 9 - x^2$;

2) $x^2 - y^2 = 1$;

3) $y = \begin{cases} 8x, \text{ если } x < 1; \\ x^3 - 1, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию $y = f(x)$.

Графический способ: задается график функции.

Часто графики вычерчиваются автоматически самопишущими приборами или изображаются на экране дисплея.

Значения функции y, соответствующие тем или иным значениям аргумента x, непосредственно находятся из этого графика.

Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком — его неточность.

Табличный способ: функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции.

Например, известные таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы.

На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных опытным путем или в результате наблюдений.

2.3. Основные свойства функции

1. Четность и нечетность функции.

►Функция y=f(x), заданная на множестве X, называется **четной(нечетной)** , если выполнены следующие условия:

а) множество X симметрично относительно нуля;

б)для любого x∈ X справедливо равенство $\boldsymbol{f(-x)=f(x)}$ для четной функции ($\boldsymbol{f(-x)=-f(x)}$ для нечетной функции).

График четной функции симметричен относительно оси Оу.
График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пример

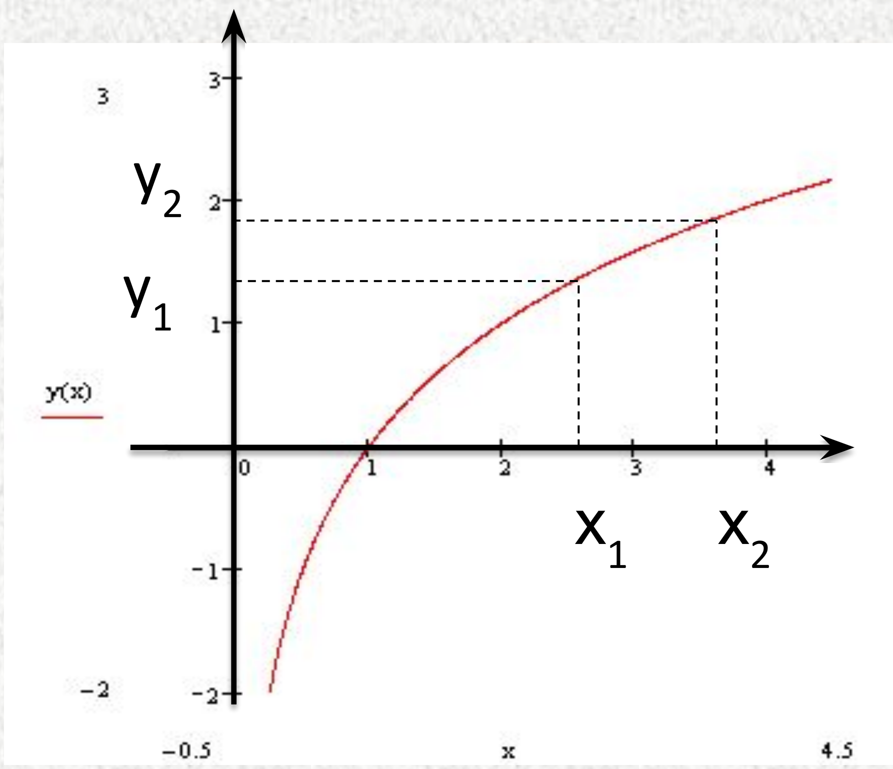
- $y=x^2$, $y=\sqrt{(1+x^2)}$, $y=\ln|x|$ — четные функции;
- $y=\sin x$, $y=x^3$ — нечетные функции;
- $y=x-1$, $y=\sqrt{x}$, $y=\ln x$— функции общего вида,

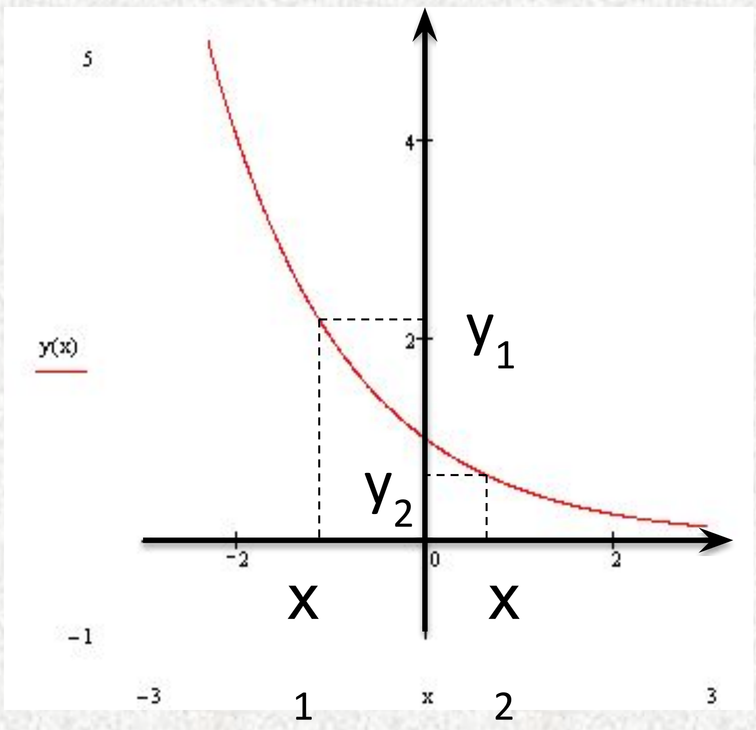
т. е. не четные и не нечетные.

2. Монотонность функции.

► Функция $y=f(x)$, заданная на множестве X, называется **возрастающей (убывающей),**

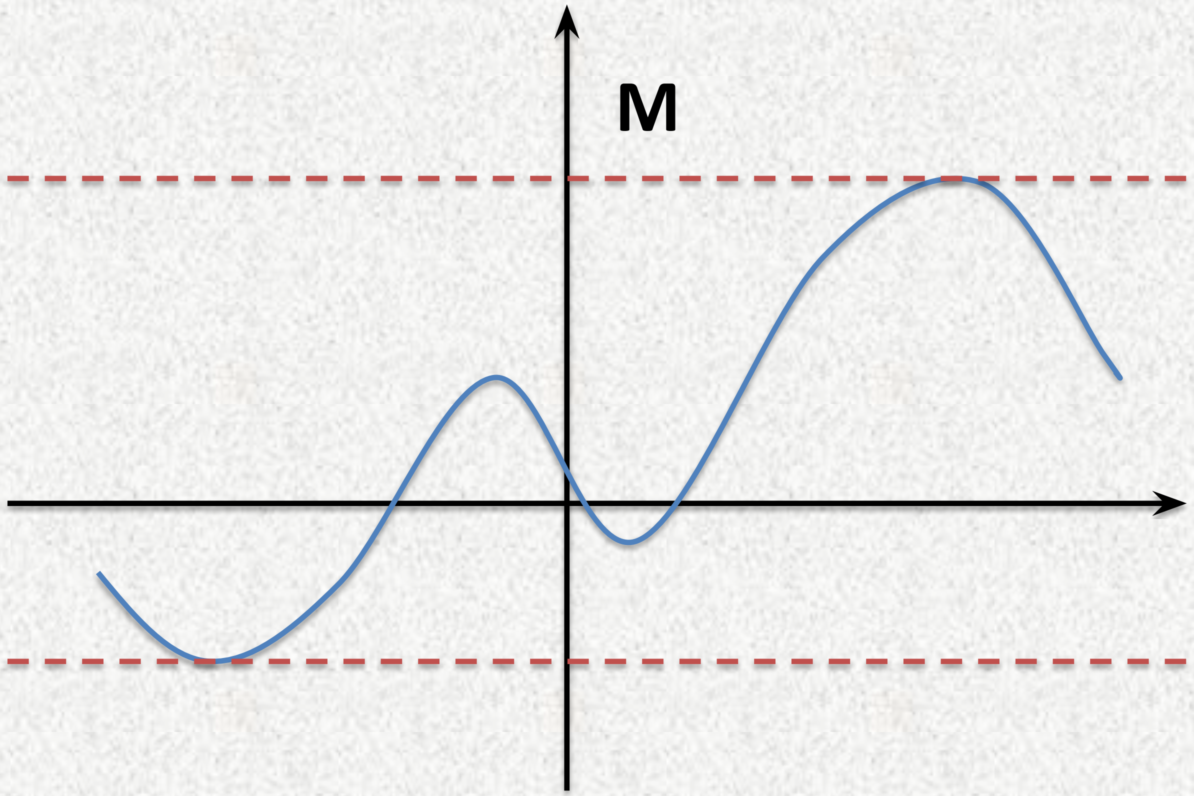
если для любых значений x_1 и x_2 таких, что $x_1<x_2$ справедливо неравенство: $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).





3.Ограниченность функции.

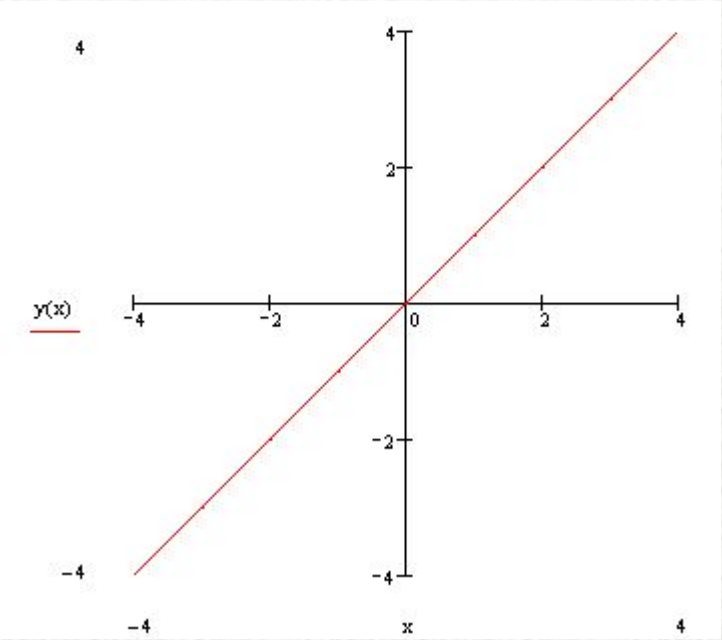
► Функция y=f(x), заданная на множестве X, называется **ограниченной** на этом множестве, если существует такое число M > 0, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.



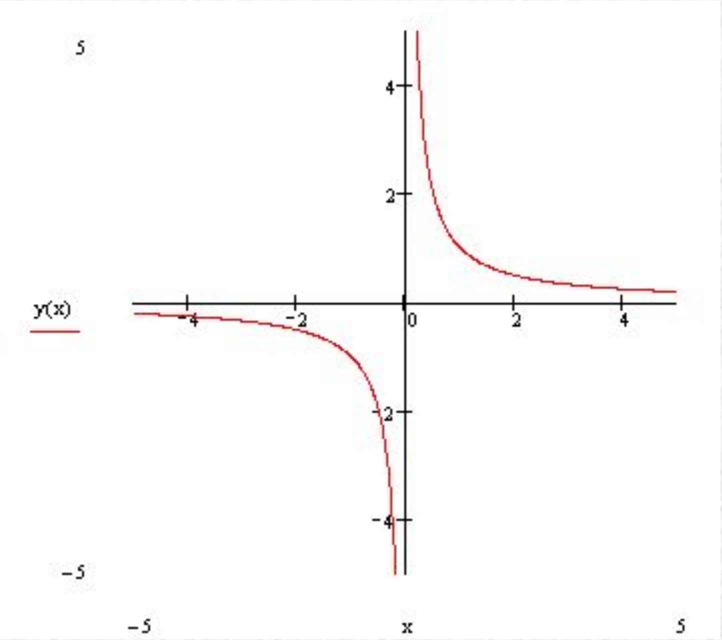
2.4 Основные элементарные функции и их графики.

Основными элементарными функциями называют следующие функции.

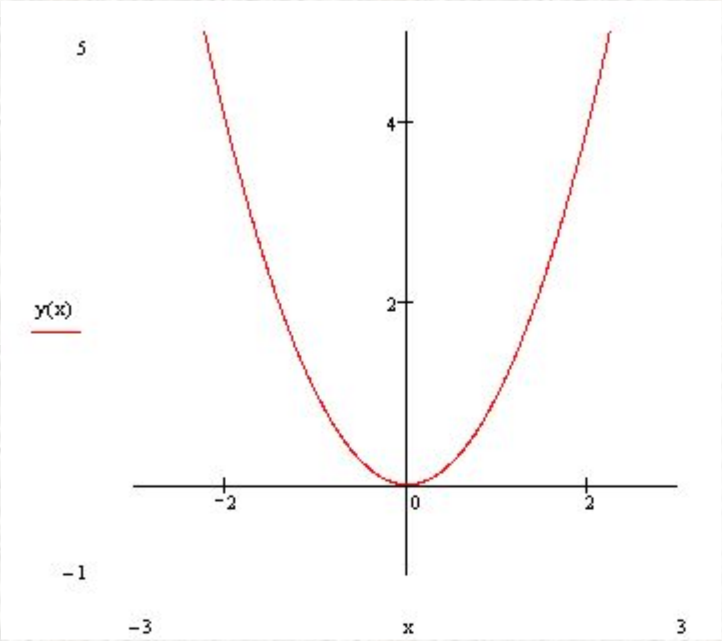
1) Степенная функция $y=x^{\alpha}$, $\alpha \in R$.

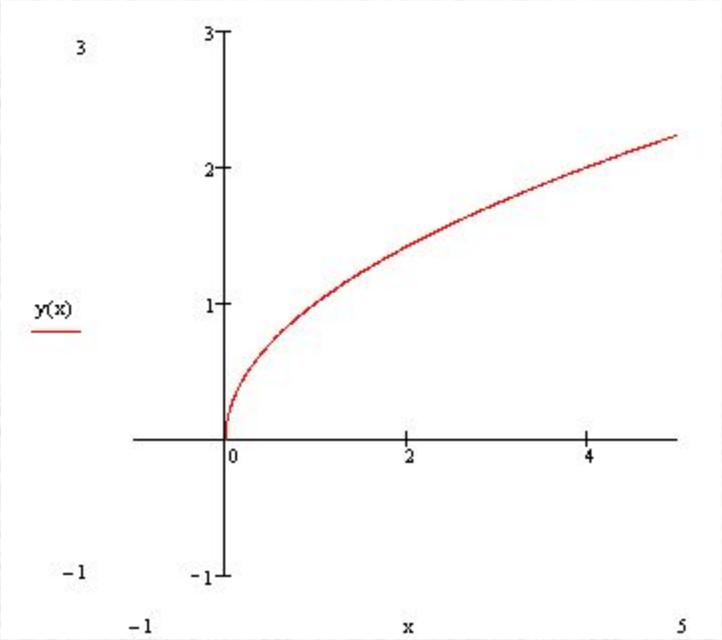


y = x



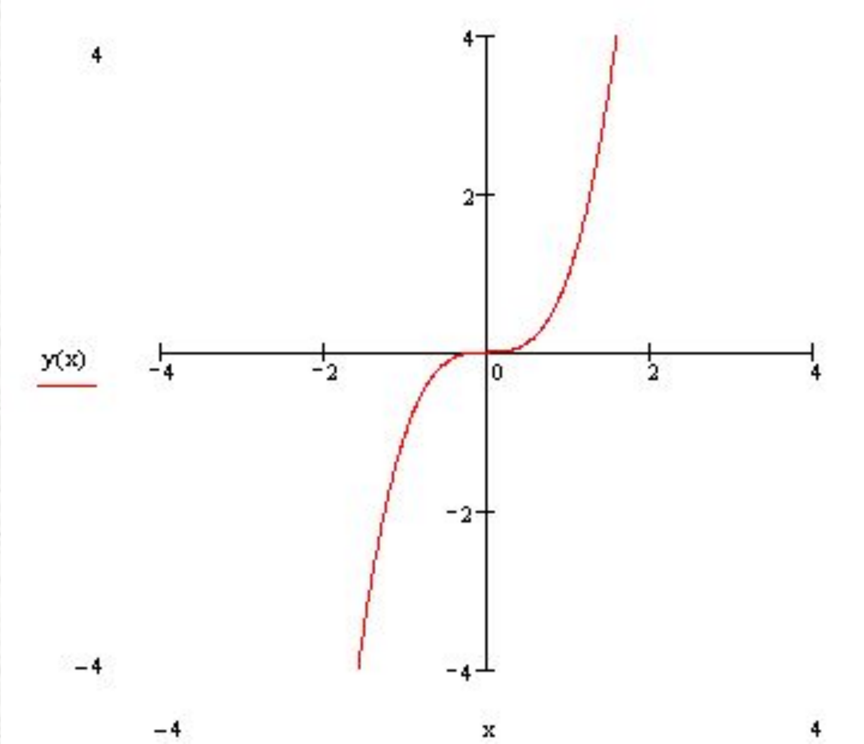
y = 1/x

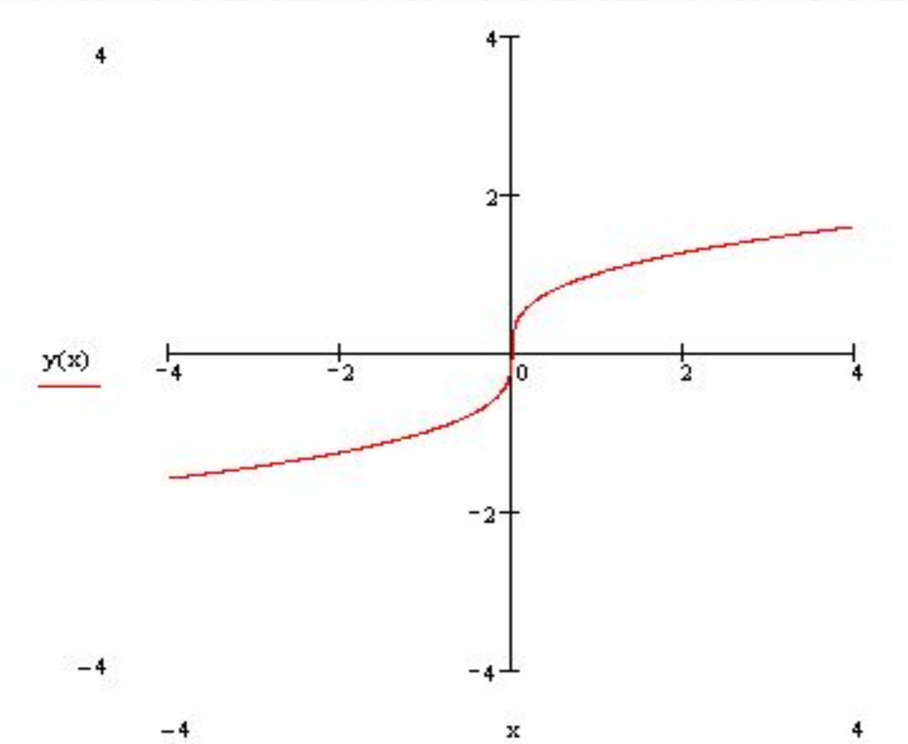




$y = x^2$

$y = \sqrt{x}$

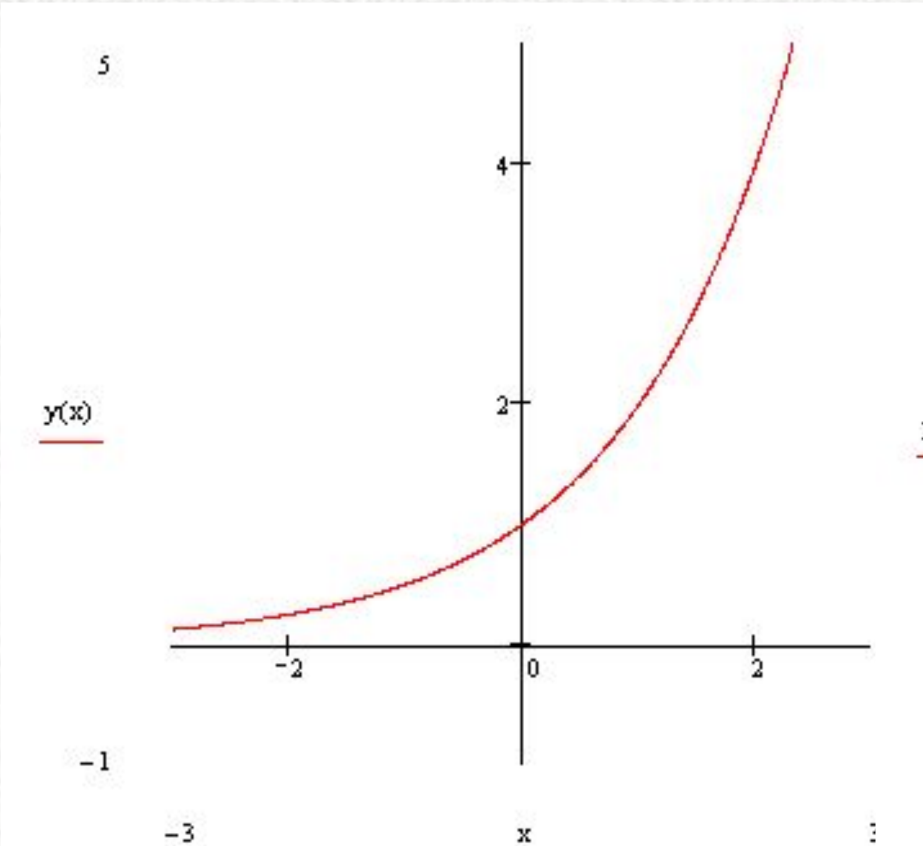


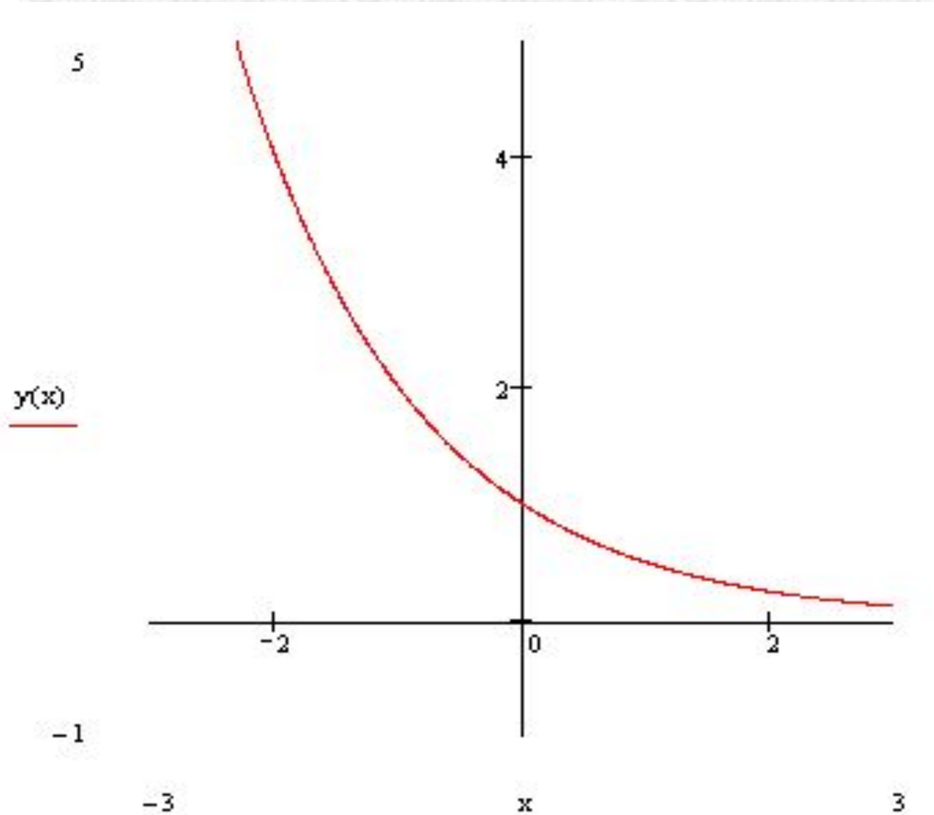


$y = x^3$

$y = \sqrt[3]{x}$

2) Показательная функция $y=a^x, a>0,\ a \neq 1.$

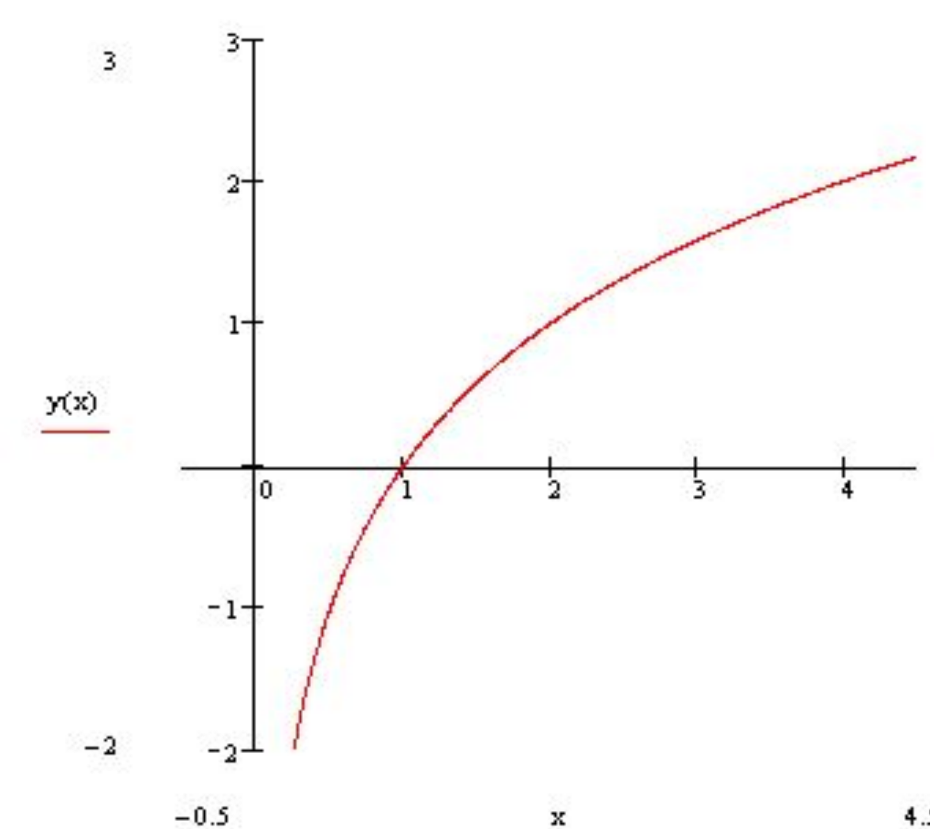


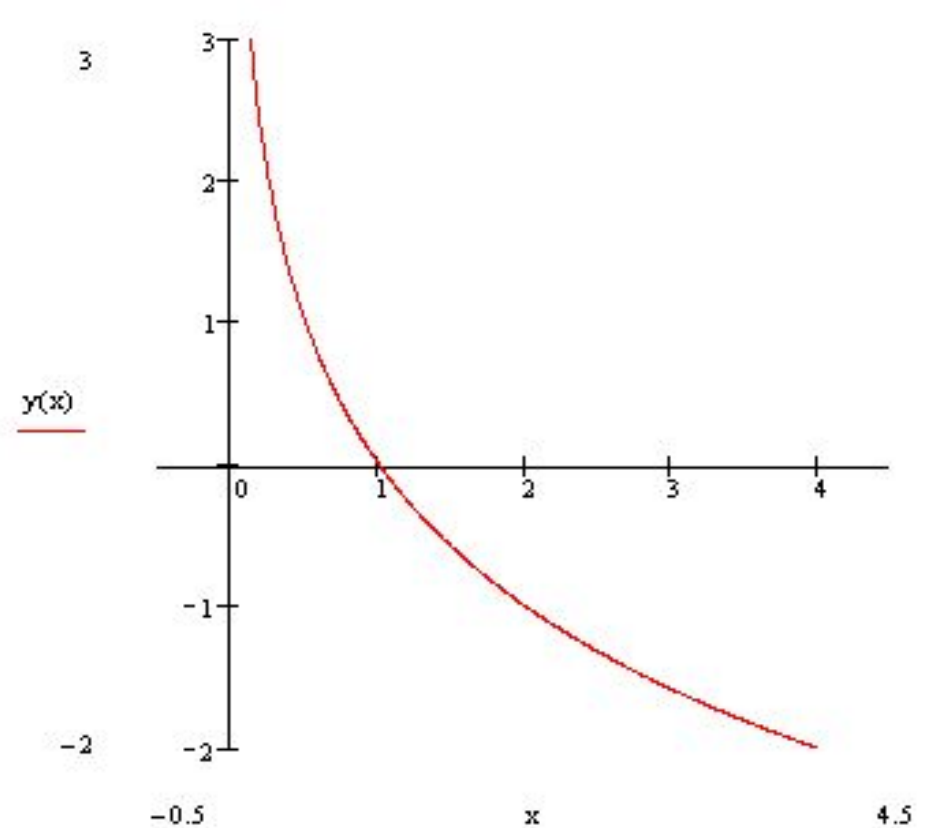


$y = a^x,\quad a > 1$

$y = a^x,\quad 0 < a < 1$

3)Логарифмическая функция $y=\log_a x,\ a>0, a\neq 1.$



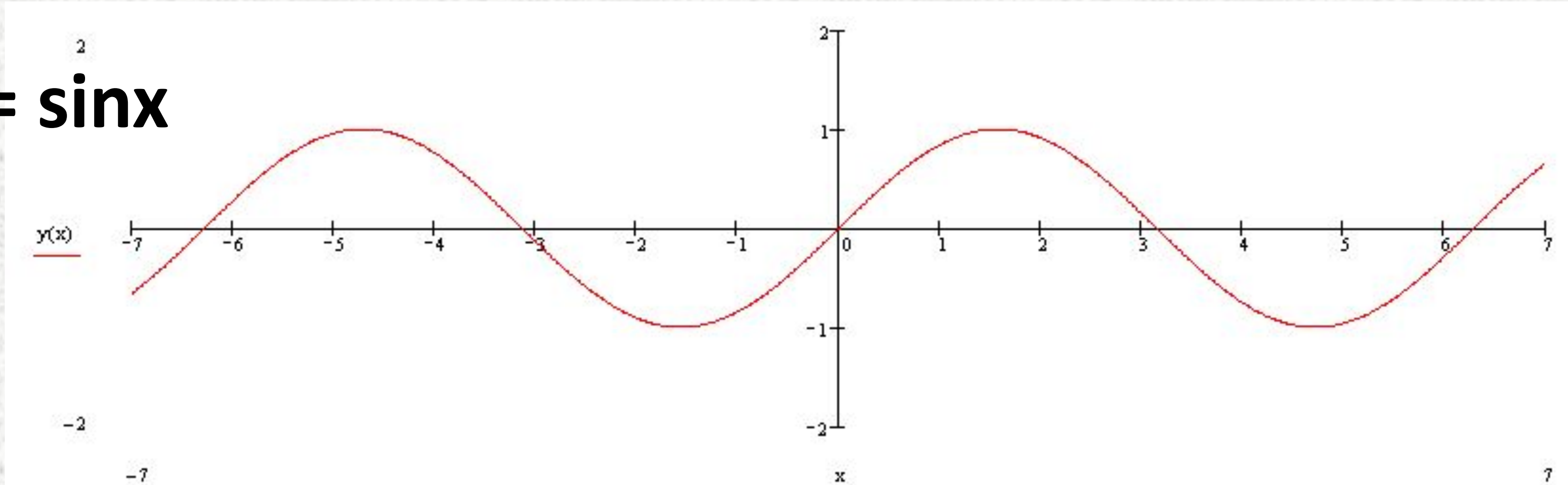


$y = \log_a x, \quad a > 1$

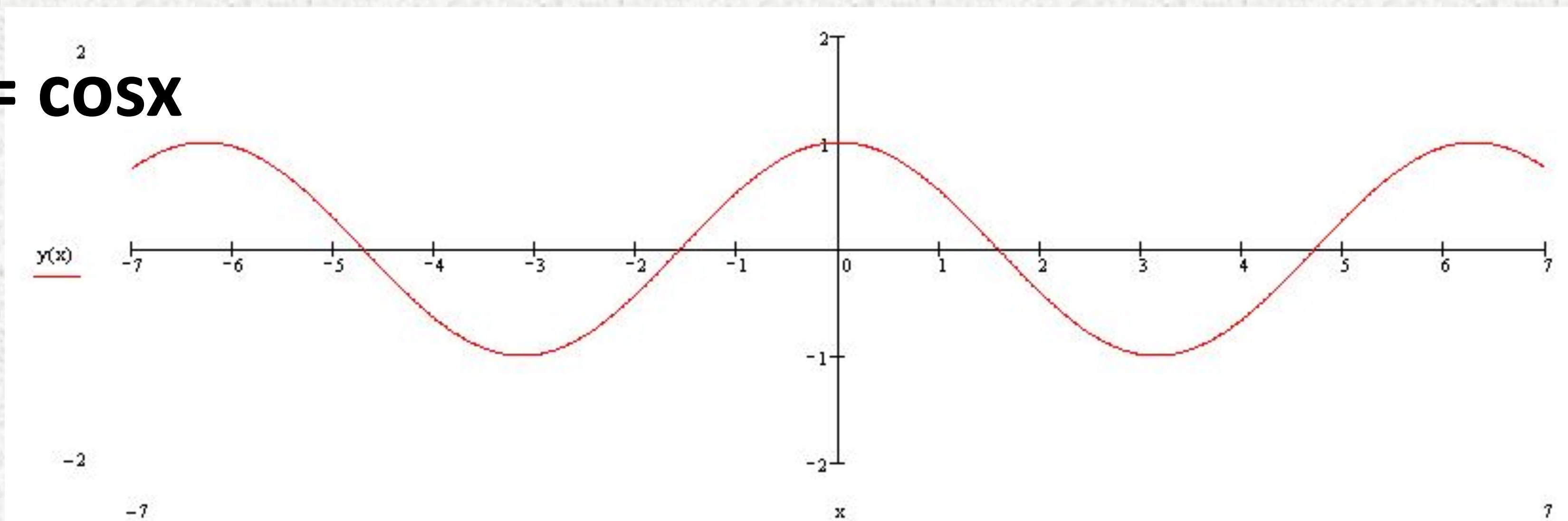
$y = \log_a x, \quad 0 < a < 1$

4) Тригонометрические функции y=sinx, y=cosx, y=tgx, y=ctgx.

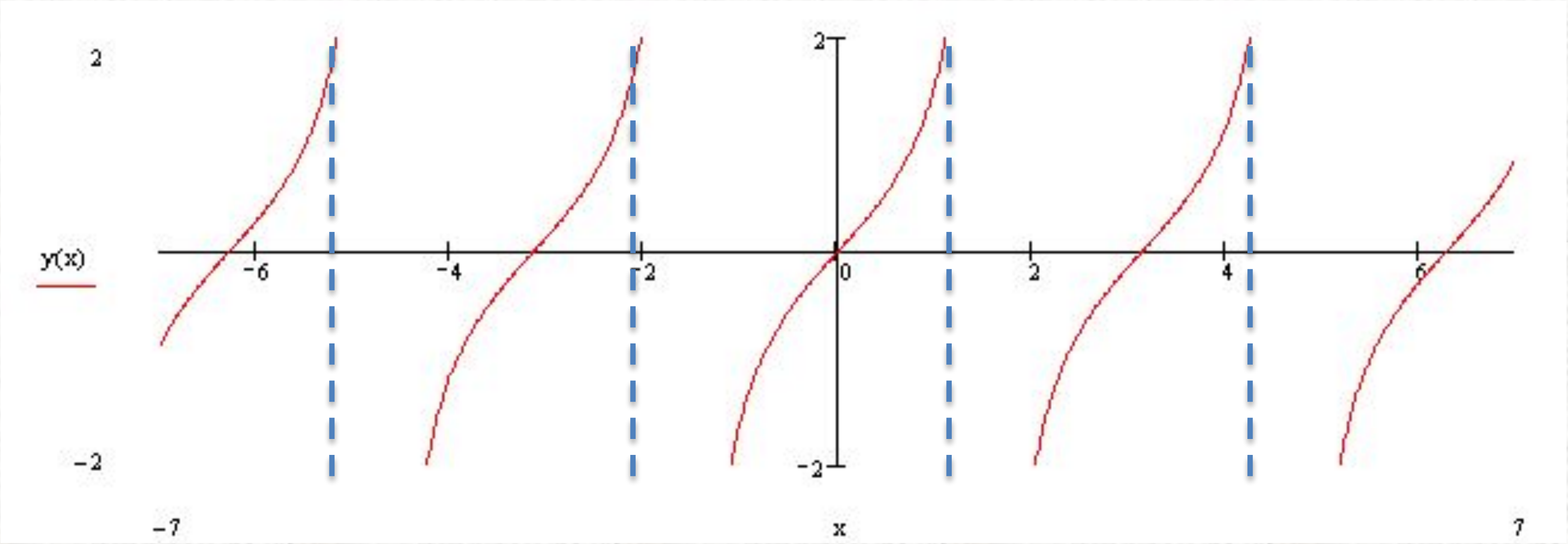
y = sinx



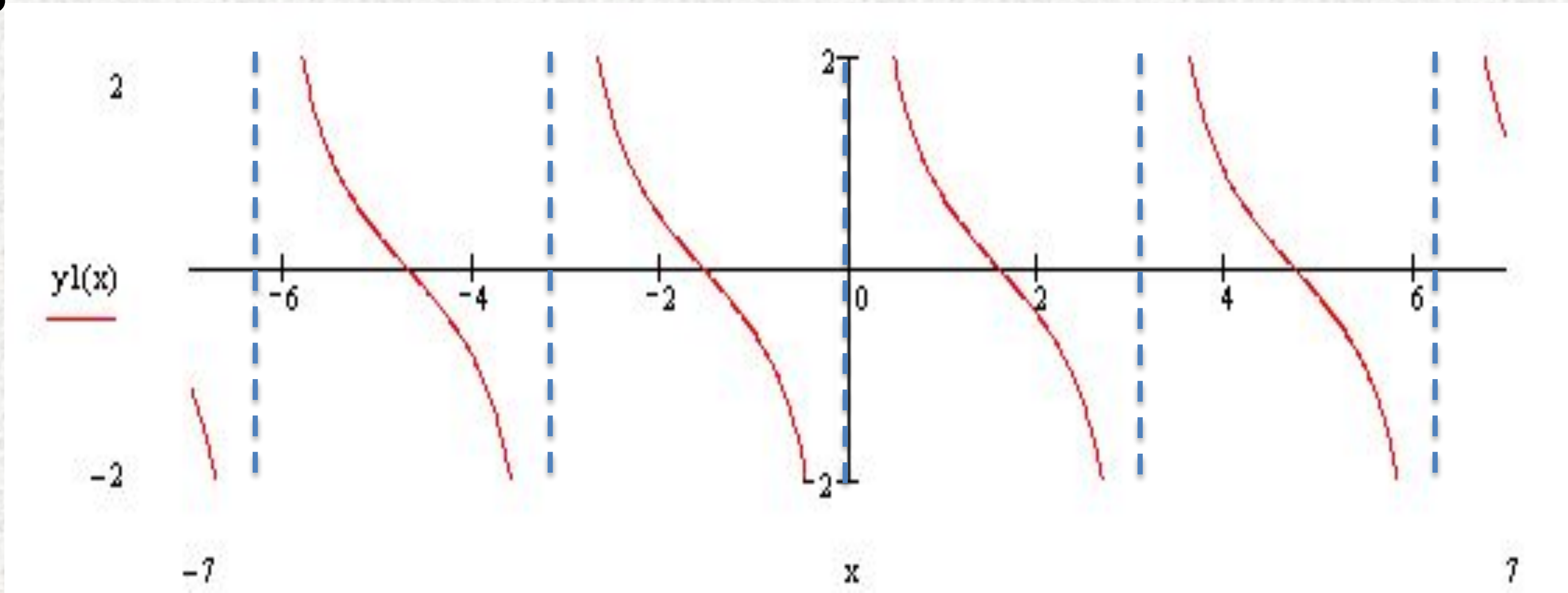
y = cosx



y=tgx

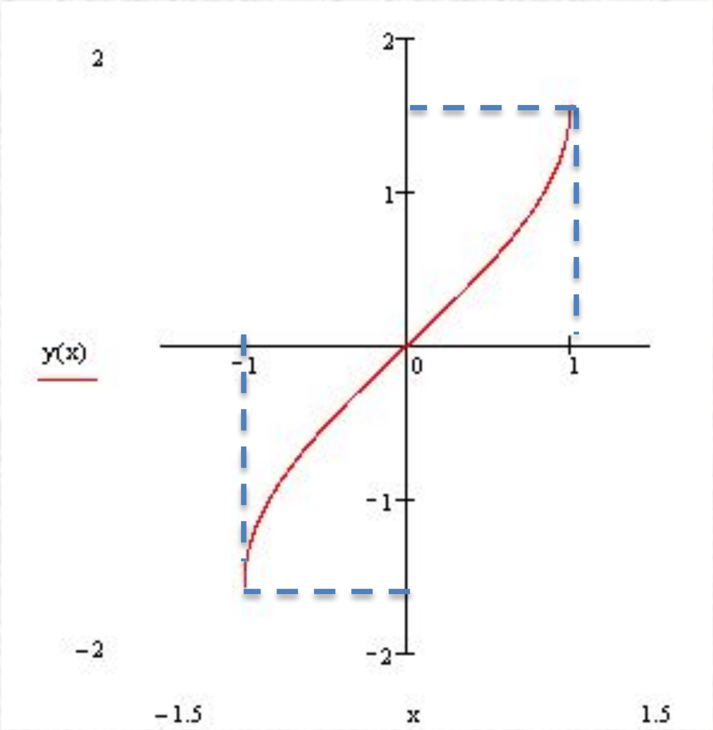


y=ctgx

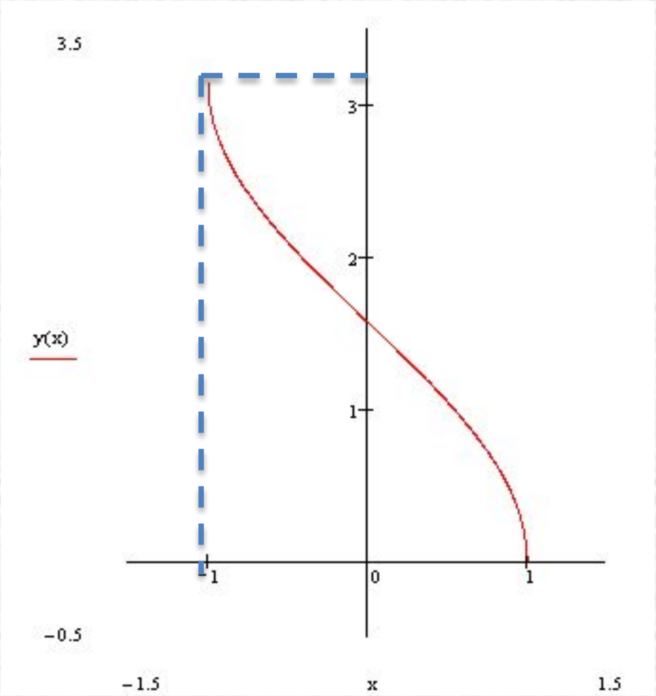


5) Обратные тригонометрические функции y=arcsinx, y=arccosx, y=arctgx, y=arcctgx.

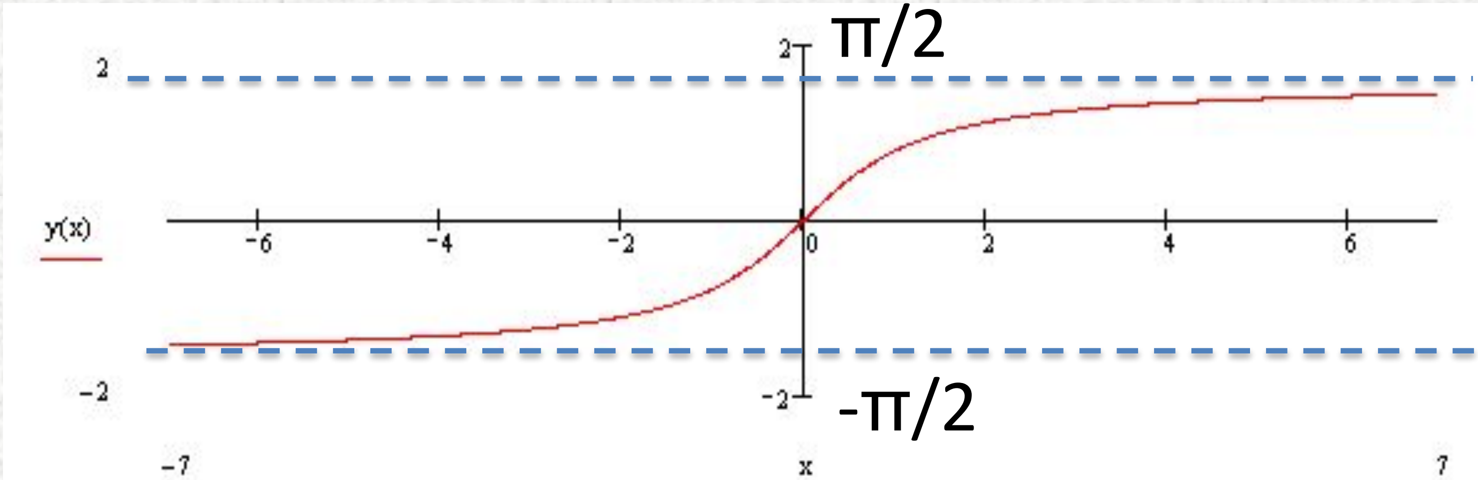
y = arcsinx



y = arccosx



y = arctgx



y = arcctgx