Раздел 4. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

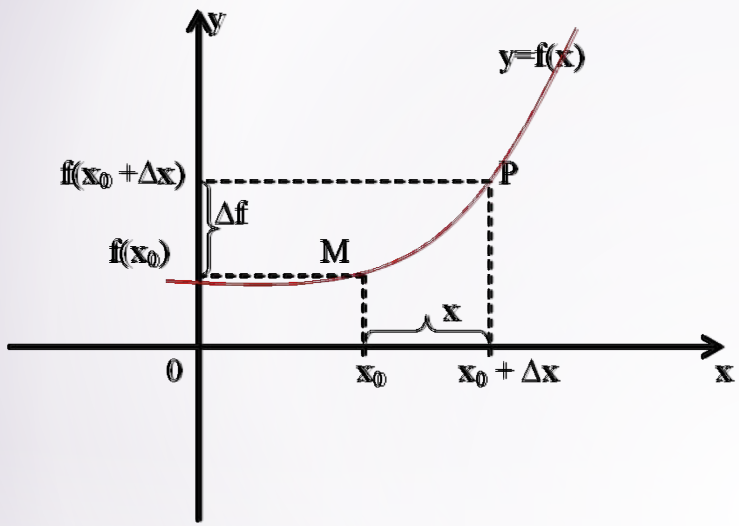
Тема 4.1 Определение производной. Геометрический и механический смысл производной Основные правила дифференцирования. Производная сложной функции..

Тема 4.2 Производные элементарных функций.
Производная функций, заданных неявно и параметрически.
Производные высших порядков

Карл Фридрих Гаусс – родился 30 апреля 1977 года в Германии. Считается *"королем математики"*. Занимался исследованиями в таких областях как: алгебра, дифференциальная и неевклидовая геометрия, математический анализ, теории функций комплексного переменного, теория вероятностей, а также в астрономии, геодезии и механике.

Определение производной.

<u>Определение.</u> Производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции Δy в этой точке к приращению аргумента Δx, если он существует.



Приращения функции в точке x_0

$\Delta y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$

Приращению аргумента в точке x_0

$\Delta x(x_0) = (x_0 + \Delta x) - x_0$

Так как последние соотношения справедливы в любой «текущей» точке x, получаем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ <=>

$$y^{!}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$ <=>

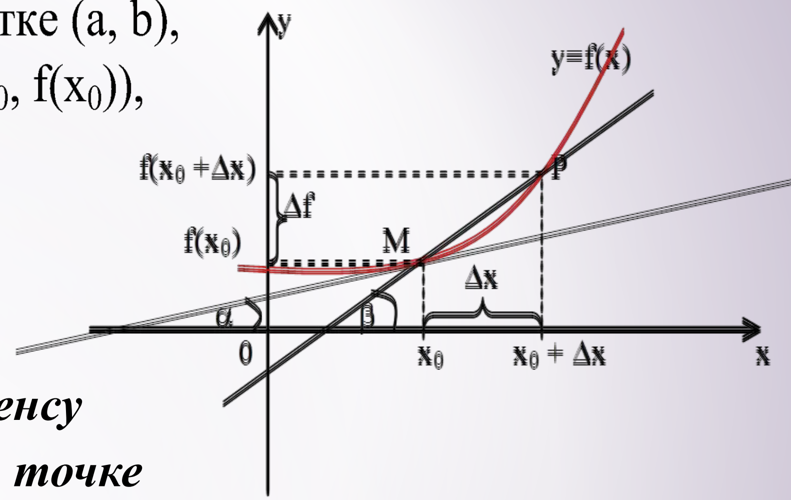
$$\boxed{\mathbf{y}'(\mathbf{x}) = \mathbf{lin}_{\Delta \mathbf{x} \to}}$$

Используемые обозначения производной

$$f'(x),\ \ f^{(1)}(x),\ \ f'_x,\ \ \frac{df(x)}{dx},\ \ \frac{df}{dx},\ \ y',\ \ y^{(1)},\ \ y'_x,\ \ y_x^{(1)},\ \ \dot{y}_x,\ \ \dot{y},\ \ \frac{dy}{dx}.$$

Геометрический и физический смысл производной

- Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке (a, b),
  α - угол наклона касательной к кривой $M(x_0, f(x_0))$,
  β – угол наклона секущей MP к OX



$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = tg\alpha \quad =>$$

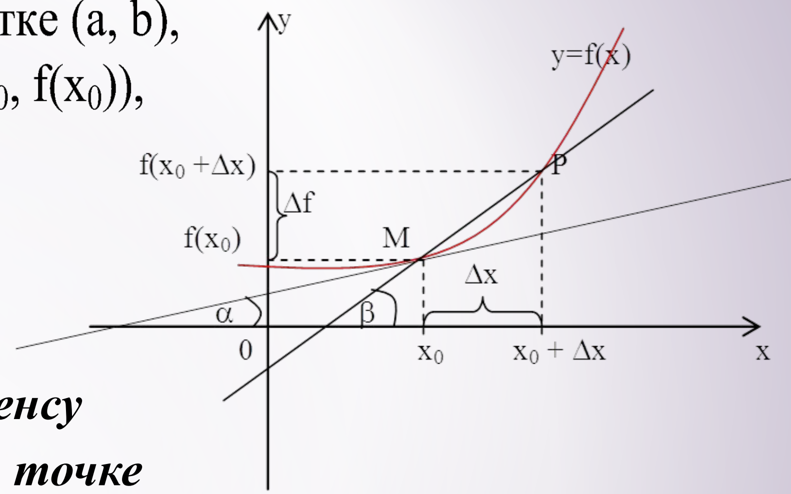
Производная функции в точке равна тангенсу угла наклона касательной к кривой в этой точке

- Пусть *t– время*, *S-путь*, пройденный точкой за это время, *S = f (t) закон движения точки* – зависимость между координатами $(t; S)$.
  Производная функции есть мгновенная скорость изменения этой функции - *скорость движения точки по траектории в момент времени* t:

- ***Производная функции, задающей скорость, есть ускорение***,
  т.е. скорость изменения скорости: $a(t) = V_t' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}$.

Геометрический и физический смысл производной

- Пусть функция y=f(x) определена на промежутке (a, b), ∠α - угол наклона касательной к кривой M(x_0, f(x_0)), ∠β – угол наклона секущей MP к OX



$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = tg\alpha \quad =>$$

Производная функции в точке равна тангенсу угла наклона касательной к кривой в этой точке

- Пусть *t– время*, *S-путь*, пройденный точкой за это время, *S = f (t) закон движения точки* – зависимость между координатами $(t; S)$.
Производная функции есть мгновенная скорость изменения этой функции - *скорость движения точки по траектории в момент времени* t:

- ***Производная функции, задающей скорость, есть ускорение***,
т.е. скорость изменения скорости: $a(t) = V_t' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}.$

Таблица производных элементарных (ПРОСТЫХ) функций

1. $\boxed{(x^{a})' = \mathbf{a} \cdot x^{a-1}}$

Таблица производных элементарных (ПРОСТЫХ) функций

1. $\boxed{(x^a)' = a \cdot x^{a-1}}$

2. $\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \ln a}$

3. $\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}}$

4. $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$

5. $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$

6. $\boxed{(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$

7. $\boxed{(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$

8. $\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

9. $\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

10. $\boxed{(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}}$

11. $\boxed{(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}}$;

З а м е ч а н и е: **a** – параметр – заданная константа

Таблица производных элементарных ~~(ПРОСТЫХ)~~ функций

1. $\boxed{(x^a)' = a \cdot x^{a-1}}$

1.1 $(x)' = 1 \quad (a = 1,\ x^0 = 1);$

1.2 $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (a = -1);$

1.3 $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \left(a = \frac{1}{2}\right);$

2. $\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \ln a}$ $a > 0, a \neq 1;$

2.1 $\boxed{(e^x)' = e^x}$ $(a = e \approx 2.72)$

3. $\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}}$ $a > 0,\ a \neq 1;$

3.1 $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (a = e, \ln e = 1)$

4. $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$

5. $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$

6. $\boxed{(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$

7. $\boxed{(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$

8. $\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

9. $\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

10. $\boxed{(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}}$

11. $\boxed{(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}};$

З а м е ч а н и е: **а** – параметр – заданная константа

Основные правила дифференцирования

a= const - параметр, $\boldsymbol{u} = u(x)$, $\boldsymbol{v} = v(x)$.

1. $\boxed{(\boldsymbol{a})' = \ \mathbf{0};}$ 2. $\boxed{(\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \pm \boldsymbol{v}'}$;

3. $\boxed{(\boldsymbol{uv})' = \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{u}}$ $=>$ $(\boldsymbol{au})' = \boldsymbol{au}'$ $=>$ $(\boldsymbol{ax})' = \boldsymbol{a}$

4. $\left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \dfrac{\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}^2} \; => \left(\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{v}}\right)' = -\dfrac{\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}^2}$ **или** $\left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{a}}\right)' = \dfrac{\boldsymbol{u}' \cdot}{\boldsymbol{a}}$

5. Производная сложной функции $y = f\big(u(x)\big)$

определяется по формуле [illegible]

6. Производная параметрически заданной функции $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$

определяется по формуле $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/_{dt}}{dx/_{dt}} = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\psi'_t}{\varphi'_t}$

$=>$ $\boxed{y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\psi'_t}{\varphi'_t}}$

Задача Найти производные y' от данных функций.

1. $y = \sqrt[7]{(x+5)/(x-2)} \cdot ctg(3x-4)$.

РЕШЕНИЕ

$$y' = \frac{1}{7}\left(\frac{x+5}{x-2}\right)^{-6/7} \cdot \frac{x-2-(x+5)}{(x-2)^2} ctg(3x-4) - \frac{1\cdot 3}{\sin^2(3x-4)} \cdot \sqrt[7]{\frac{x+5}{x-2}} =$$

$$= \boxed{-\frac{ctg(3x-4)}{\sqrt[7]{(x+5)^6/(x-2)^6}} - \frac{3}{\sin^2(3x-4)} \cdot \sqrt[7]{\frac{x+5}{x-2}}}.$$

2. $y = 1/tg^3 7x$.

РЕШЕНИЕ

$$y' = \left(tg^{-3} 7x\right)' = -3tg^{-4} 7x \cdot \frac{7}{\cos^2 7x} = \frac{-21}{tg^4 7x \cos^2 7x} = \boxed{\frac{-21\cos^2 7x}{\sin^4 7x}}.$$

3. $\boldsymbol{y = \frac{3\,cos^2 10x}{\ln(4x+1)}}$

РЕШЕНИЕ

$$y' = \frac{(3\cos^2 10x)' \cdot (\ln(4x+1) - (3\cos^2 10x) \cdot (\ln(4x+1)'}{(\ln(4x+1))^2} =$$

$$= \frac{-60\cos 10x \cdot (\sin 10x) \cdot ln(4x+1) - (3\cos^2 10x) \cdot \frac{4}{(4x+1)}}{(\ln(4x+1))^2} =$$

$$= \boxed{-\frac{12\cos 10x\,[5(4x+1)ln(4x+1)\sin 10x + \cos 10x]}{(4x+1)\ln^2(4x+1)}}$$

Задача Найти производные y' от данных функций.

1. $y = arctg\sqrt{1-4x}.$

РЕШЕНИЕ

$$y' = \frac{1}{1+(\sqrt{1-4x})^2}\cdot\frac{-4}{2\sqrt{1-4x}} = -\frac{2}{(2-4x)\sqrt{1-4x}} = \boxed{-\frac{1}{(1-2x)\sqrt{1-4x}}.}$$

2. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3 + 2t + 1. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad => \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3t^2+2}{1/t} = \boxed{3t^3 + 2t.}$$

3. $\boldsymbol{y = arctg9x \cdot e^{4x}}.$ РЕШЕНИЕ

$$[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

$$(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}, \qquad (e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$y' = (arctg9x)'\cdot(e^{4x}) + (arctg9x)\cdot(e^{4x})' =$$

$$= \frac{(9x)'}{1+(9x)^2}e^{4x} + arctg9x\cdot e^{4x}(4x)' = \boxed{\frac{9}{1+81x^2} + 4arctg9x\cdot e^{4x}.}$$

Производные высших порядков.

Пусть функция y= f(x)- дифференцируема на некотором интервале. Дифференцируя ее, получим первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную первой производной f′(x), получим **вторую производную** функции f(x)

$$y'' = y^{(2)} = (y'_x)'_x = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Последовательно продолжая этот процесс можно найти производную функции порядка n как производную функции порядка (n-1)

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Формула Тейлора

Если функция $y = (x)$ имеет производные до $(n+1)$ − го порядка включительно в некоторой окрестности точки a, то для всех x из этой окрестности справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

где $\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = R_n(x)$, $\quad \varepsilon = a + \theta(x-a), \; 0 < \theta < 1$ -

Если $|R_{n_0}| < \delta, \; |R_{n_0+1}| > \delta,$ то $f(x) = P(x) \pm \delta \; <=> f(x) \approx P(x)$

$$P(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n_0)}(a)}{n_0!}(x-a)^{n_0}$$

При $a = 0$ формула Тейлора называется ***формулой Маклорена.***

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \text{где} \quad 0 < \varepsilon < x$$

Разложение основных элементарных функций по формуле Маклорена.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{f^{(2n+1)}(\varepsilon)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{f^{(2n+2)}(\varepsilon)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!} x + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \ldots + x^n$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!} \left(\frac{x}{1+\varepsilon} \right)^{n+1}$$

[illegible] = [illegible] + [illegible] − [illegible], 0 < [illegible] < 1