

Раздел 4. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Тема 4.1 Определение производной. Геометрический и механический смысл производной Основные правила дифференцирования. Производная сложной функции..

Тема 4.2 Производные элементарных функций.

Производная функций, заданных неявно и параметрически.

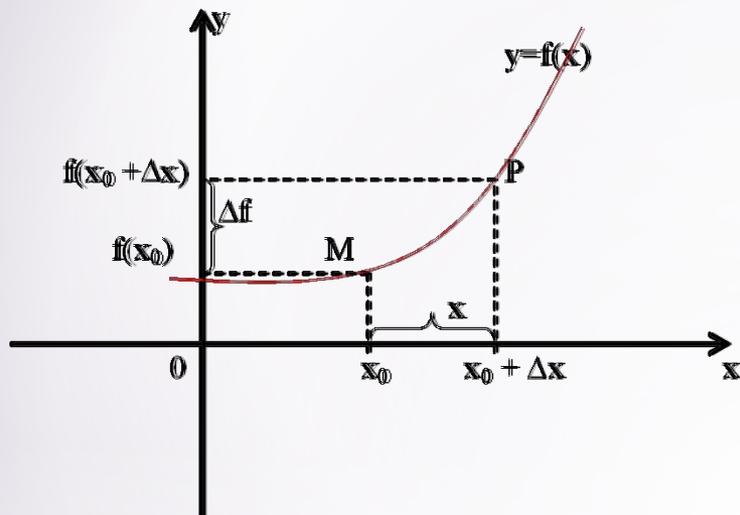
Производные высших порядков



Карл Фридрих Гаусс – родился 30 апреля 1777 года в Германии. Считается "*королем математики*". Занимался исследованиями в таких областях как: алгебра, дифференциальная и неевклидова геометрия, математический анализ, теории функций комплексного переменного, теория вероятностей, а также в астрономии, геодезии и механике.

Определение производной.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции Δy в этой точке к приращению аргумента Δx , если он существует.



Приращения функции в точке x_0
 $\Delta y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$

Приращению аргумента в точке x_0
 $\Delta x(x_0) = (x_0 + \Delta x) - x_0$

Так как последние соотношения справедливы в любой «текущей» точке x , получаем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \Leftrightarrow$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

\Leftrightarrow

$$\boxed{y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}}$$

Используемые обозначения производной

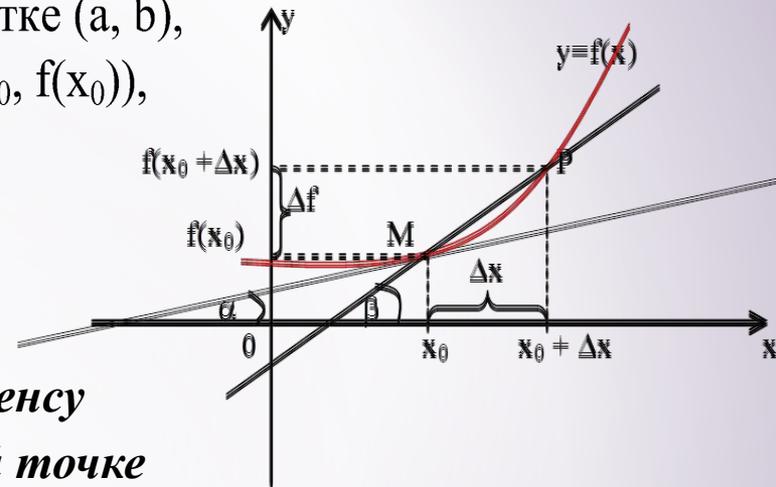
$$f'(x), f^{(1)}(x), f'_x, \frac{df(x)}{dx}, \frac{df}{dx}, y', y^{(1)}, y'_x, y_x^{(1)}, \dot{y}_x, \dot{y}, \frac{dy}{dx}.$$

Геометрический и физический смысл производной

- Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке (a, b) ,
• α - угол наклона касательной к кривой $M(x_0, f(x_0))$,
• β - угол наклона секущей MP к OX

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow$$

Производная функции в точке равна тангенсу угла наклона касательной к кривой в этой точке



- Пусть t – время, S – путь, пройденный точкой за это время, $S = f(t)$ закон движения точки – зависимость между координатами $(t; S)$.

Производная функции есть мгновенная скорость изменения этой функции - скорость движения точки по траектории в момент времени t :

- *Производная функции, задающей скорость, есть ускорение,*

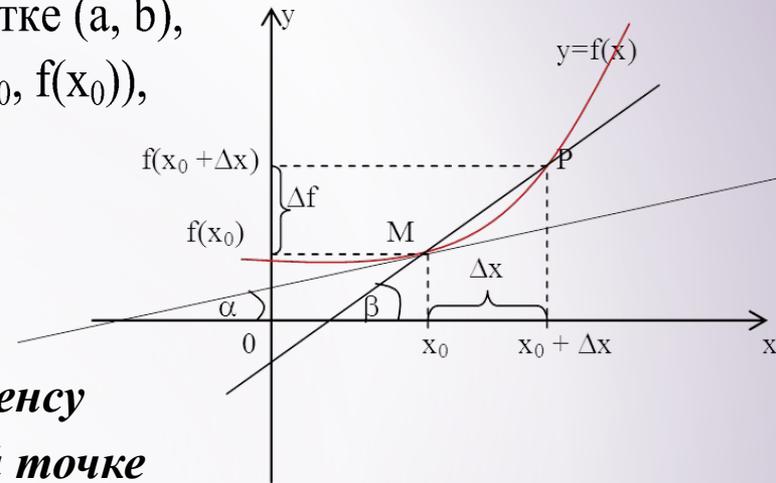
т.е. скорость изменения скорости: $a(t) = V'_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}$.

Геометрический и физический смысл производной

- Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке (a, b) ,
• α - угол наклона касательной к кривой $M(x_0, f(x_0))$,
• β - угол наклона секущей MP к OX

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow$$

Производная функции в точке равна тангенсу угла наклона касательной к кривой в этой точке



- Пусть t - время, S - путь, пройденный точкой за это время, $S = f(t)$ закон движения точки - зависимость между координатами $(t; S)$.

Производная функции есть мгновенная скорость изменения этой функции - скорость движения точки по траектории в момент времени t :

- *Производная функции, задающей скорость, есть ускорение,*

т.е. скорость изменения скорости: $a(t) = V'_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}$.

Таблица производных элементарных (ПРОСТЫХ) функций

1. $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$

Таблица производных элементарных (ПРОСТЫХ) функций

1. $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$

2. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

4. $(\sin x)' = \cos x$

5. $(\cos x)' = -\sin x$

6. $(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

7. $(ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $(arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$

11. $(arcctg x)' = -\frac{1}{1+x^2};$

З а м е ч а н и е: **a** – параметр – заданная константа

Таблица производных элементарных (ПРОСТЫХ) функций

1. $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$

1.1 $(x)' = 1$ ($a = 1, x^0 = 1$);

1.2 $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ ($a = -1$);

1.3 $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($a = \frac{1}{2}$);

2. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $a > 0, a \neq 1$;

2.1 $(e^x)' = e^x$ ($a = e \approx 2.72$)

3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $a > 0, a \neq 1$;

3.1 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ($a = e, \ln e = 1$)

4. $(\sin x)' = \cos x$

5. $(\cos x)' = -\sin x$

6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

11. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

З а м е ч а н и е: a — параметр — заданная константа

Основные правила дифференцирования

$a = \text{const}$ - параметр, $u = u(x)$, $v = v(x)$.

1. $(a)' = 0;$

2. $(u \pm v)' = u' \pm v';$

3. $(uv)' = u' \cdot v + v' \cdot u \Rightarrow (au)' = au' \Rightarrow (ax)' = a$

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \Rightarrow \left(\frac{a}{v}\right)' = -\frac{a v'}{v^2}$ ИЛИ $\left(\frac{u}{a}\right)' = \frac{u'}{a}$

5. Производная сложной функции $y = f(u(x))$

определяется по формуле

$$\frac{d}{dx} f(u(x)) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

6. Производная параметрически заданной функции $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$

определяется по формуле

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}$$

\Rightarrow

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}$$

Задача Найти производные y' от данных функций.

1. $y = \sqrt[7]{(x+5)/(x-2)} \cdot \text{ctg}(3x-4)$.

РЕШЕНИЕ

$$y' = \frac{1}{7} \left(\frac{x+5}{x-2} \right)^{-6/7} \cdot \frac{x-2-(x+5)}{(x-2)^2} \text{ctg}(3x-4) - \frac{1 \cdot 3}{\sin^2(3x-4)} \cdot \sqrt[7]{\frac{x+5}{x-2}} =$$
$$= \boxed{-\frac{\text{ctg}(3x-4)}{\sqrt[7]{(x+5)^6/(x-2)^6}} - \frac{3}{\sin^2(3x-4)} \cdot \sqrt[7]{\frac{x+5}{x-2}}}$$

2. $y = 1/\text{tg}^3 7x$.

РЕШЕНИЕ

$$y' = (\text{tg}^{-3} 7x)' = -3\text{tg}^{-4} 7x \cdot \frac{7}{\cos^2 7x} = \frac{-21}{\text{tg}^4 7x \cos^2 7x} = \boxed{\frac{-21 \cos^2 7x}{\sin^4 7x}}$$

3. $y = \frac{3 \cos^2 10x}{\ln(4x+1)}$

РЕШЕНИЕ

$$y' = \frac{(3 \cos^2 10x)' \cdot (\ln(4x+1)) - (3 \cos^2 10x) \cdot (\ln(4x+1))'}{(\ln(4x+1))^2} =$$

$$= \frac{-60 \cos 10x \cdot (\sin 10x) \cdot \ln(4x+1) - (3 \cos^2 10x) \cdot \frac{4}{(4x+1)}}{(\ln(4x+1))^2} =$$

$$= \boxed{-\frac{12 \cos 10x [5(4x+1) \ln(4x+1) \sin 10x + \cos 10x]}{(4x+1) \ln^2(4x+1)}}$$

Задача Найти производные y' от данных функций.

1. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{1-4x}$.

РЕШЕНИЕ

$$y' = \frac{1}{1+(\sqrt{1-4x})^2} \cdot \frac{-4}{2\sqrt{1-4x}} = -\frac{2}{(2-4x)\sqrt{1-4x}} = \boxed{\frac{1}{(1-2x)\sqrt{1-4x}}}.$$

2.
$$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3 + 2t + 1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 + 2}{1/t} = \boxed{3t^3 + 2t}.$$

3. $y = \operatorname{arctg} 9x \cdot e^{4x}$.

РЕШЕНИЕ

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}, \quad (e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$y' = (\operatorname{arctg} 9x)' \cdot (e^{4x}) + (\operatorname{arctg} 9x) \cdot (e^{4x})' =$$

$$= \frac{(9x)'}{1+(9x)^2} e^{4x} + \operatorname{arctg} 9x \cdot e^{4x} (4x)' =$$

$$\boxed{\frac{9}{1+81x^2} + 4\operatorname{arctg} 9x \cdot e^{4x}}.$$

Производные высших порядков.

Пусть функция $y = f(x)$ - дифференцируема на некотором интервале.

Дифференцируя ее, получим первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную первой производной $f'(x)$, получим **вторую производную** функции $f(x)$

$$f'' = (f')' = \frac{d(f')}{dx} = \frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2f}{dx^2}$$

Последовательно продолжая этот процесс можно найти производную функции порядка n как производную функции порядка $(n-1)$

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})' = \frac{d(f^{(n-1)})}{dx} = \frac{d\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)}{dx} = \frac{d^n f}{dx^n}$$

Формула Тейлора

Если функция $y = f(x)$ имеет производные до $(n + 1)$ – го порядка включительно в некоторой окрестности точки a , то для всех x из этой окрестности справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

где $\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = R_n(x)$, $\varepsilon = \theta(x-a) + a - a$, $0 < \theta < 1$ -

Если $|R_{n_0}| < \delta$, $|R_{n_0+1}| > \delta$, то $f(x) = P(x) \pm \delta \Leftrightarrow f(x) \approx P(x)$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

При $a = 0$ формула Тейлора называется **формулой Маклорена**.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}x^{n+1}, \text{ где } 0 < \varepsilon < x$$

Разложение основных элементарных функций по формуле Маклорена.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{f^{(2n+1)}(\varepsilon)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{f^{(2n+2)}(\varepsilon)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!} x + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots + x^n$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!} \left(\frac{x}{1+\varepsilon} \right)^{n+1}$$

$$\boxed{x} = \boxed{x} + \boxed{\boxed{x}\boxed{x}} - \boxed{\boxed{x}}, \quad 0 < \boxed{x} < 1$$