

Определенный интеграл

Определённым интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется выражение вида

$$\int_a^b f(x)dx$$

где

a - нижний предел

b - верхний предел

$f(x)$ - подынтегральная функция

x – переменная интегрирования.

Формула Ньютона-Лейбница

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, и $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример. Вычислить определенный
интеграл $\int_{-1}^2 (4x + 5) dx$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (4x + 5) dx &= \int_{-1}^2 4x dx + \int_{-1}^2 5 dx = \\ &= \frac{4x^{1+1}}{1+1} \Big|_{-1}^2 + 5x \Big|_{-1}^2 = \frac{4x^2}{2} \Big|_{-1}^2 + 5x \Big|_{-1}^2 = 2x^2 \Big|_{-1}^2 + 5x \Big|_{-1}^2 = \\ &= (2 \cdot 2^2 - 2 \cdot (-1)^2) + (5 \cdot 2 - 5 \cdot (-1)) = \\ &(8 - 2) + (10 + 5) = 6 + 15 = 21 \end{aligned}$$

Задание. Вычислить определенный интеграл

$$1. \int_1^5 7x^6 dx$$

$$2. \int_1^2 2x^2 dx$$

$$3. \int_1^9 \frac{6}{\sqrt{x}} dx$$

$$4. \int_{-6}^0 (1-x) dx$$

$$5. \int_1^4 \left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$$

$$6. \int_{-1}^3 (4x+1) dx$$

$$7. \int_{-2}^4 (8+2x-x^2) dx$$

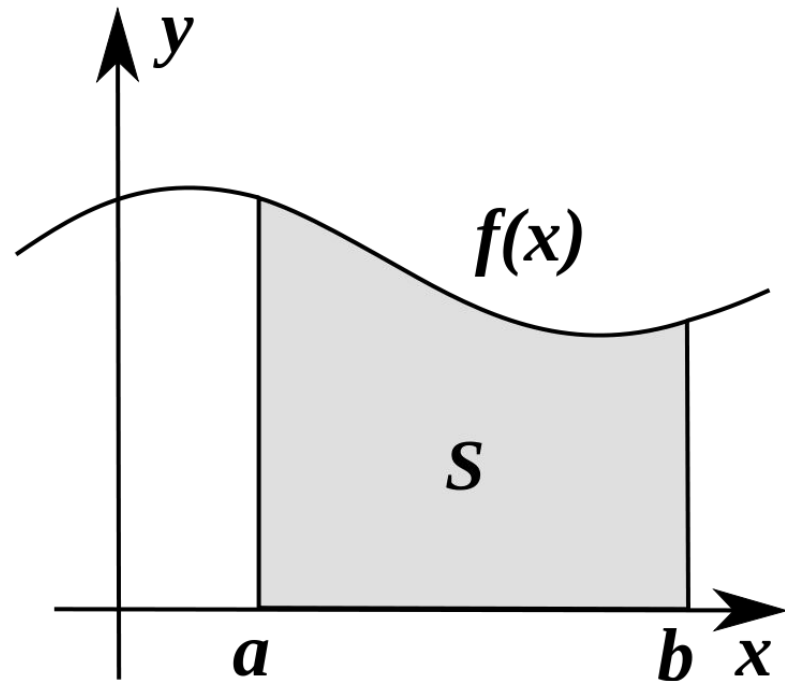
$$8. \int_{-3}^1 (2x^2+3x-1) dx$$

$$9. \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 5x\right) dx$$

$$10. \int_0^{\pi} (\cos x - 12x^3) dx$$

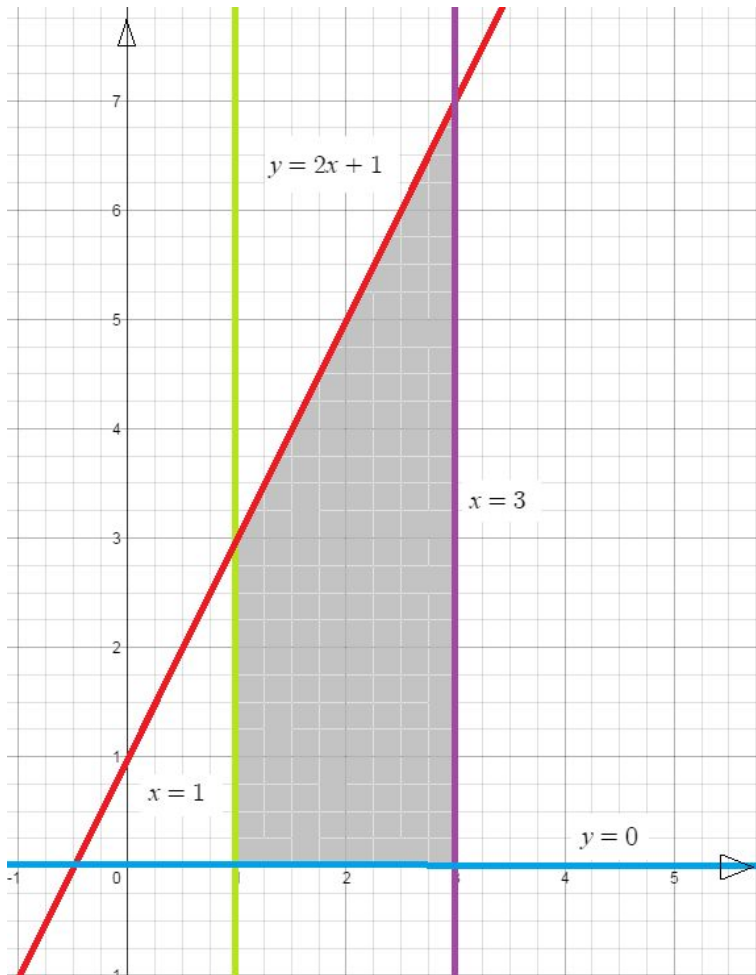
Геометрический смысл определенного интеграла

Определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$
численно равен
площади фигуры S ,
ограниченной осью
абсцисс (Ox), прямыми
 $x = a$ и $x = b$ и графиком
функции $y = f(x)$.



Пример. Вычислить площадь криволинейной трапеции ограниченной линиями

$$y = 2x + 1, y = 0, x = 1, x = 3$$



Пусть y_1 – функция которая находится ниже,
 y_2 – функция которая находится выше, и
 $x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} (y_2 - y_1) dx &= \int_1^3 ((2x + 1) - 0) dx = \\ &= \int_1^3 (2x + 1) dx = \int_1^3 2x dx + \int_1^3 1 dx = \\ &= \frac{2x^{1+1}}{1+1} \Big|_1^3 + 1x \Big|_1^3 = \frac{2x^2}{2} \Big|_1^3 + x \Big|_1^3 = x^2 \Big|_1^3 + x \Big|_1^3 = \\ &= (3^2 - 1^2) + (3 - 1) = (9 - 1) + 2 = 10 \end{aligned}$$

Задание. Вычислить площадь криволинейной трапеции ограниченной линиями

1. $y = x + 1, y = 1, x = 0, x = 2$

2. $y = x - 2, y = 0, x = -1, x = 2$

3. $y = 2x - 3, y = 0, x = 0, x = 1$

4. $y = 3x + 1, y = 1, x = 0, x = 2$

5. $y = x^2, y = 4, x = -2, x = 2$

6. $y = x^2, y = -1, x = -1, x = 1$

7. $y = x^2, y = 0, x = 0, x = 3$

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Найдите первообразную

$$f(x) = 9x^2 - \cos x$$

2. Найдите неопределенный

интеграл $\int 157 dx$

3. Найдите неопределенный

интеграл $\int -9x^5 dx$

4. Найдите интеграл

$$\int_{-1}^2 4x^3 dx$$

5. Найдите интеграл

$$\int_0^{\pi} 2 \sin x dx$$

Вариант 2

1. Найдите первообразную

$$f(x) = 8x^3 - \sin x$$

2. Найдите неопределенный

интеграл $\int 192 dx$

3. Найдите неопределенный

интеграл $\int -7x^6 dx$

4. Найдите интеграл

$$\int_{-1}^2 5x^4 dx$$

5. Найдите интеграл

$$\int_0^{\pi} 3 \cos x dx$$