ТВЕРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

ТЕМА 2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Система *m* линейных уравнений с *n* переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} **- коэффициенты системы,**

b_i **- свободные члены.**

Решением системы называется такая совокупность значений, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система линейных уравнений называется:

- ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение;
- ***несовместной***, если она не имеет решений;
- ***определенной***, если она имеет единственное решение;
- ***неопределенной***, если она имеет более одного решения;
- ***однородной***, если все $b_i=0$;
- ***неоднородной***, если не все $b_i=0$.

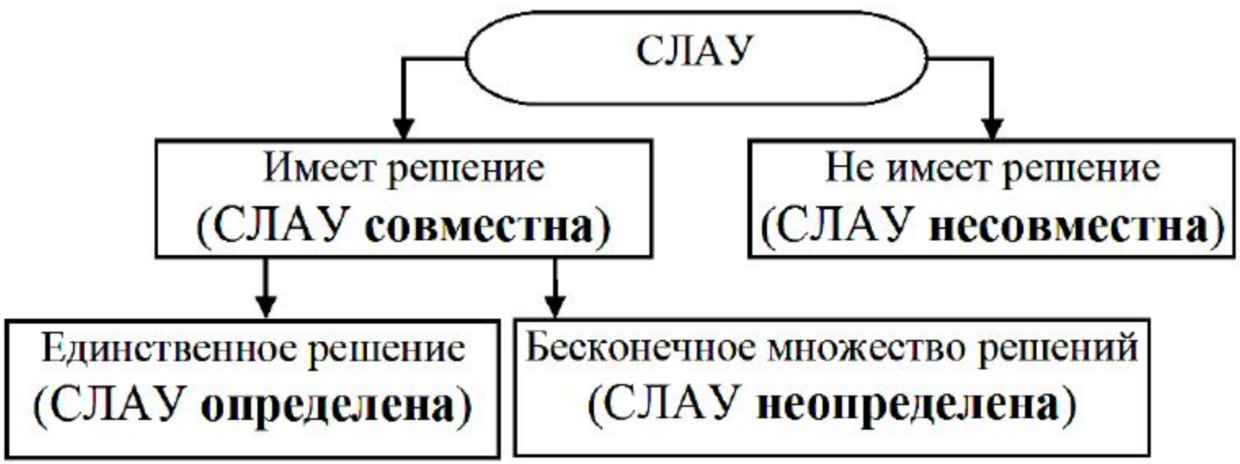


Рис.1. Схема типов решений СЛАУ.

Методы решения систем

1. *Метод Крамера*

Рассмотрим систему ***n*** линейных уравнений с ***n*** неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Теорема Крамера:

Пусть Δ - **определитель матрицы системы**,

Δ_i - **определитель** матрицы, **получаемой** из матрицы A **заменой столбца коэффициентов** a_{ij} **при** x_i **столбцом свободных членов**.

Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}}$$

- **формула Крамера**.

Вспомним тему: Определители

Определитель квадратной матрицы – это число, вычисляемое по определённым правилам.

Обозначаете: $|A|$, ΔA, $\det A$.

Определитель **2-го порядка**:

Боковая диагональ

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} a_{12}$$

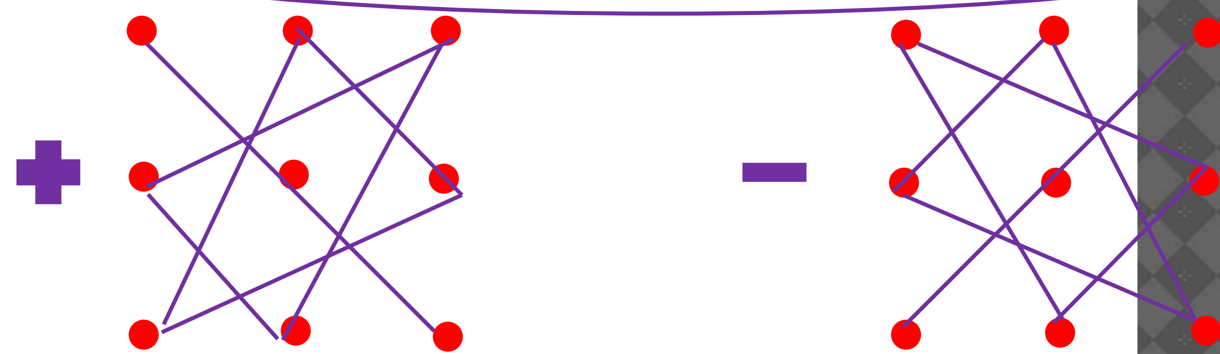
Главная диагональ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7$$

Определитель 3-го порядка:

Правило Саррюса (правило треугольников)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$



$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot2 + (-1)\cdot1\cdot1 + 2\cdot1\cdot1 - 1\cdot1\cdot1 - 1\cdot1\cdot1 - 2\cdot2\cdot(-1) = 5$$

<u>Вспомним тему:</u> Алгебраические дополнения и миноры

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{i1} & a_{ij} \ldots\ldots a_{in} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{nj} \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

В квадратной матрице ***n***-го порядка рассмотрим элемент ***aij***.

Вычеркнем ***i***-ю строку и ***j***-ый столбец, на пересечении которых стоит элемент ***aij***. В результате получается матрица (***n-1***)-го порядка.

Минором M_{ij} к элементу a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель матрицы (*n-1*)-го порядка, полученной из исходной матрицы вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} матрицы *n*-го порядка называется его минор, взятый со знаком «+», если сумма ***i+j*** четная, и со знаком «-», если сумма нечетная:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

Пример. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение. 1)Определитель матрицы системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

2) Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

3) Подставим полученные значения в формулу Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{-5} = \boxed{-1,} \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = \boxed{1,} \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = \boxed{1}$$

2. *Матричный метод*

Рассмотрим систему ***n*** линейных уравнений с ***n*** неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица коэффициентов системы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ → **матрица-столбец переменных**

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$ → **матрица столбец свободных членов**

Запишем эту систему в матричном виде.

$$A \cdot X = B \longrightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$ - **решение системы**

Вспомним тему : умножение матриц

Произведением матрицы A размера m x n на матрицу B размера n x k есть матрица C размера m x k, каждый элемент которой вычисляется по формуле:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot b_{sj}\,.$$

$$\left.\begin{aligned} \dim A &= m \times n \\ \dim B &= n \times k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &C = A \cdot B - \text{существует} \\ &\dim C = m \times k \end{aligned}$$

Вывод: число столбцов первого множителя должно равняться числу строк второго множителя.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$c_{11} = 1\cdot(-1) + 0\cdot 5 + 2\cdot 2 = 3$$

$$c_{12} = 1\cdot 3 + 0\cdot(-2) + 2\cdot 4 = 11$$

Пример. Решить систему матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

ОБОЗНАЧИМ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Вычислим определитель матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

3. Вычисляем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 & -0{,}4 \\ -0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

4. Проверка:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = E$$

Вспомним тему : Обратная матрица

Матрица *A* является ***невырожденной (неособенной)***, если |A|≠0, иначе матрица называется ***вырожденной (особенной).***

Матрица $\boldsymbol{A}^{-1}$ называется ***обратной матрицей*** к квадратной матрице $\boldsymbol{A}$, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица: $\boxed{A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

алгебраические дополнения к элементам строки записаны в столбец

Пример. Найти матрицу обратную к матрице: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

Решение.

1. Вычислим определитель матрицы

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=5\neq 0$$

определитель матрицы не равен нулю, значит обратная матрица существует

2. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1 \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3 \quad A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-3 \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1 \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1 \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2 \quad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3$$

2. Найдём алгебраические дополнения элементов матрицы и составим обратную матрицу

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

3. Решение системы

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.}$$

3. *Метод Гаусса*

Рассмотрим систему ***m*** линейных уравнений с ***n*** *неизвестными:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A_{p_{асшир}} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \textit{основная} & \textit{матрица} \\ \textit{матрица} & \textit{свободных} \\ \textit{системы} & \textit{членов} \\ (a_{ij}) & (b_i) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

- расширенная матрица системы

Цель: с помощью элементарных эквивалентных преобразований получить трапецивидную (треугольную) матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_{24} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} & d_3 \end{array} \right)$$

Пример.

Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x - 2y + 4z = 5 \\ 2x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{\sim}{\mathrm{I} + \mathrm{II} \times (-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{matrix}\mathrm{II} + \mathrm{I} \times (-2) \\ \mathrm{III} + \mathrm{I} \times (-3)\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & 19 & -13 & 25 \\ 0 & 23 & -16 & 30 \end{array}\right)$$

Римскими цифрами I, II, III обозначим номера строк системы

$$\underset{\sim}{\mathrm{III} - \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & 19 & -13 & 25 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right) \underset{\sim}{\mathrm{II} + \mathrm{III} \times (-5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right) \underset{\sim}{\mathrm{III} + \mathrm{II} \times 4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

Восстановим систему:

$$\begin{cases} x - 8y + 6z = -9 \\ y - 2z = 0 \\ 5z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 + 8y - 6z \\ y = 2z = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 + 16 - 6 = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{x = 1 \quad y = 2 \quad z = 1}$$

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Теорема Кронекера - Капелли. Для того, чтобы система линейных алгебраических уравнений была ***совместна*** (имела решение), необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы системы равнялся рангу матрицы коэффициентов:

$$r(Ap) = r(A)$$

Если $r(Ap) \neq r(A)$, то система ***несовместна*** (не имеет решений).

Если $r(Ap) = r(A) = n$ (числу неизвестных), то система ***совместна и определенна*** (имеет единственное решение).

Если $r(Ap) = r(A) < n$, то система ***совместна и неопределенна*** (имеет бесконечное множество решений):

Бесконечное множество решений:

$$r(Ap) = r(A) < n$$

Система имеет ***r*** базисных переменных и ***n – r*** свободных переменных.

Общее решение системы запишется в виде:

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t_1, \dots, t_{n-r}) \\ \dots \\ x_r(t_1, \dots, t_{n-r}) \\ t_1 \\ \dots \\ t_{n-r} \end{pmatrix}$$

Базисные переменные, зависящие от свободных переменных

Свободные переменные

$t_1 = x_{r+1}; \quad t_2 = x_{r+2}; \dots \quad t_{n-r} = x_n$

РАНГ МАТРИЦЫ

Рассмотрим прямоугольную матрицу размерностью ***(m x n)***.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{1n} \\ a_{32} & a_{3n} \end{vmatrix}$$

Выделим в этой матрице ***k*** произвольных строк и ***k*** произвольных столбцов. Элементы матрицы ***A***, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, **образуют определитель** ***k*** - того порядка.

Минором ***k***-го порядка матрицы ***A*** называют определитель, полученный из ***A*** выделением произвольных ***k*** строк и ***k*** столбцов.

Рангом матрицы называется наибольший порядок отличного от нуля минора этой матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Матрица A имеет 4 минора 3 - его порядка, например:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -20$$

18 миноров 2 - го порядка, например:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

12 миноров 1 - го порядка – сами элементы.

Наибольший порядок отличного от нуля минора этой матрицы равен 3, поэтому: $r(A) = 3$

Базисным минором называется определитель, порядок которого равен рангу матрицы. Он может быть не единственным.

Теорема.

Эквивалентные преобразования не меняют ранга матрицы.

Эквивалентные преобразования:

- Умножение или деление элементов одного ряда на одно и то же число, не равное нулю
- Перестановка местами двух рядов
- Прибавление к элементам ряда элементов другого параллельного ряда, умноженного на произвольный множитель
- Вычеркивание нулевого ряда

Ранг матрицы равен числу ненулевых строк матрицы, приведенной к треугольному виду.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 8 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}+\mathrm{II}\times(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

Два ряда матрицы называются ***линейно зависимыми***, если их линейная комбинация с коэффициентами, не все из которых равны нулю, дает нулевой ряд.
В противном случае ряды называются ***линейно независимыми***.

Теорема.

Ранг матрицы равен числу линейно независимых рядов

Пример. Решить систему:
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение

$$A_p = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \end{array} \overset{\mathrm{I}:2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \underset{\begin{array}{l}\mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+\mathrm{I}\times(-3) \\ \mathrm{IV}+\mathrm{I}\end{array}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \underset{\begin{array}{l}\mathrm{II}\times(-2)+\mathrm{III} \\ \mathrm{II}\times 2+\mathrm{IV}\end{array}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \end{array}$$

$r(Ap) = r(A) = 2 \Rightarrow$ **совместна**

$r(Ap) < n \Rightarrow$ **неопределенна**

2 базисных переменных, т.к. $r = 2$ например, x_1, x_3

1 свободная переменная, т.к. $n - r = 3 - 2 = 1$ например, $x_2 = t$

Восстановим систему:

$$\begin{cases} x_1 + t + x_3 = 2 \\ -2x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - t - x_3 = 1 - t \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = t \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Однородная система всегда имеет решение:

$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad \ldots \quad x_n = 0$ **- тривиальное решение.**

Оно является единственным решением системы в случае, когда

$$r(A) = n$$

Если $r(A) < n$, то система имеет бесконечное множество решений.

Решить однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \mathrm{II} + \mathrm{I} \times (-2) \\ \mathrm{III} + \mathrm{I} \times (-3) \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & 14 & 15 \\ 0 & -1 & 14 & 15 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\mathrm{III} - \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\mathrm{II} \times (-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -14 & -15 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2, \quad n = 4$$

→ **множество решений**

$$n - r = 4 - 2 = 2$$ *- число свободных переменных*