Теоретические основы электротехники

Однофазные цепи синусоидального тока

Содержание

Основные параметры синусоидально изменяющихся величин

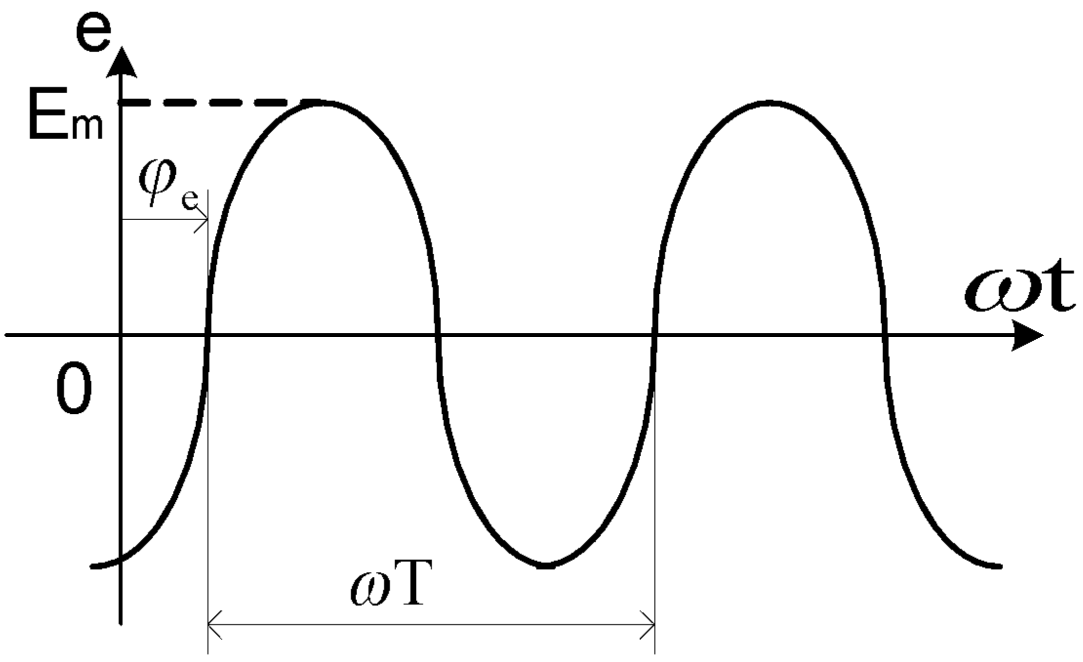
В линейных цепях синусоидального тока напряжение, ЭДС, ток изменяются по синусоидальному закону:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u);$$

$$e = E_m \sin(\omega t + \varphi_e);$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i),$$

Основные параметры синусоидально изменяющихся величин



Основные параметры синусоидально изменяющихся величин

u, i, e - мгновенные значения напряжения, тока, ЭДС (значения в данный момент времени);

$\omega t + \varphi_u, \; \omega t + \varphi_e, \; \omega t + \varphi_i -$ фаза (фазовый угол);

U_m, I_m, E_m - амплитуда - максимальное значение синусоидальной величины;

ω - угловая частота ($с^{-1}$)

f –

Основные параметры синусоидально изменяющихся величин

$\varphi_u, \varphi_e, \varphi_i$ – начальная фаза, значение аргумента в начальный момент времени;

T - период - наименьший интервал времени, через который мгновенные значения величины повторяются;

Основные параметры синусоидально изменяющихся величин

f - частота (Гц) – число периодов в секунду

$$(f = \frac{1}{T});$$

φ - сдвиг фаз между напряжением и током

$$(\varphi = \varphi_u - \varphi_i).$$

Основные параметры синусоидально изменяющихся величин

U, I, E - действующее значение (тепловой эквивалент постоянному току):

;

;

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt} \qquad I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} \qquad E = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2 dt}$$

Основные параметры синусоидально изменяющихся величин

Физический смысл **действующего значения переменного тока**: это такой постоянный ток, который за то же время, проходя через то же сопротивление, выделяет такое же количество тепла, что и данный переменный ток.

Основные параметры синусоидально изменяющихся величин

Для синусоидального тока:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \qquad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \qquad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

Представление синусоидального тока в различных формах

- Аналитический способ
- Графический способ
- Представление с использованием векторов
- Представление с использованием комплексных чисел

Дано:

$$i_1 = I_{1m} sin(\omega t + \varphi_{i1});$$

$$i_2 = I_{2m} sin(\omega t + \varphi_{i2})$$

Определить:

$$i_1 + i_2 = i = I_m sin(\omega t + \varphi_i)$$

Аналитическое представление синусоидального тока

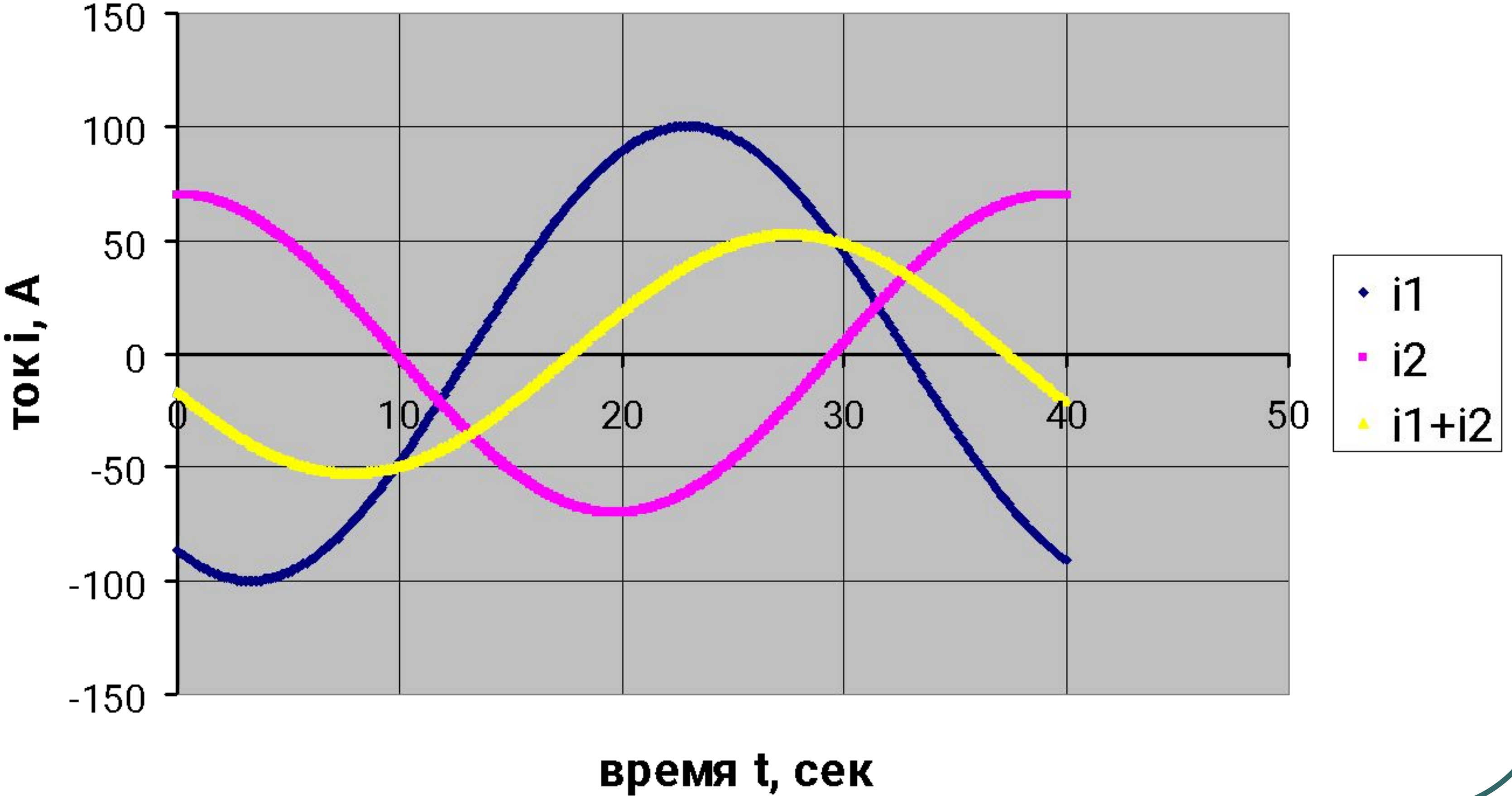
Ток записывается как функция времени.

Сумма двух синусоидальных токов одинаковой частоты - синусоидальный ток такой же частоты

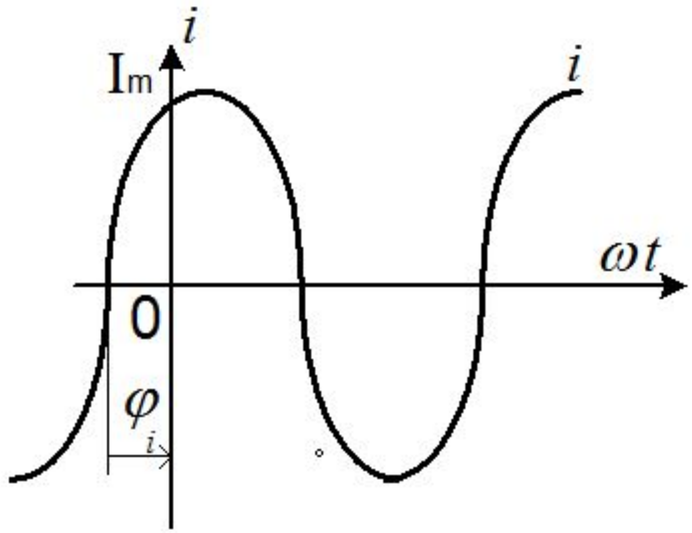
$$I_m = \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2 - 2I_{m1}I_{m2}\cos(\varphi_{i1} - \varphi_{i2})};$$

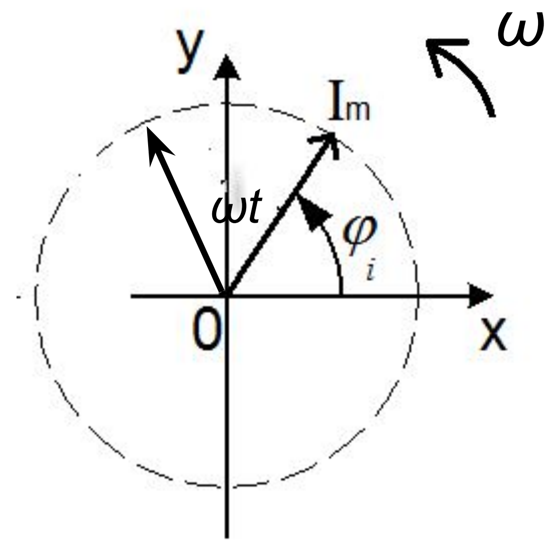
$$\varphi_i = arctg\,\frac{I_{1m}\sin\varphi_{i1} + I_{2m}\sin\varphi_{i2}}{I_{1m}\cos\varphi_{i1} + I_{2m}\cos\varphi_{i2}}.$$

Графическое представление синусоидальных токов



Представление синусоидального тока с помощью векторов





$$Пр(I_m)_y = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) = i(t)$$

Представление синусоидального тока с помощью векторов

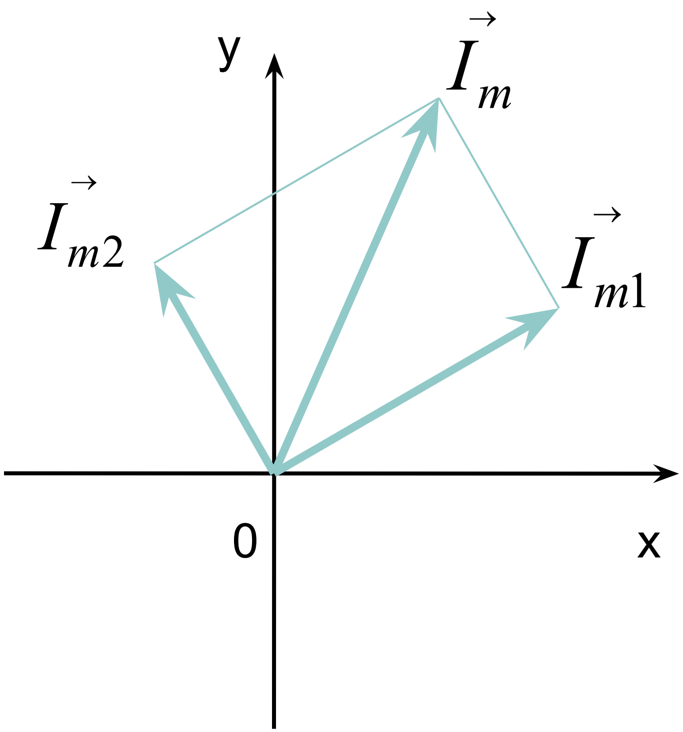
Дано:

$$i_1 = I_{1m} sin(\omega i + \varphi_{i1});$$

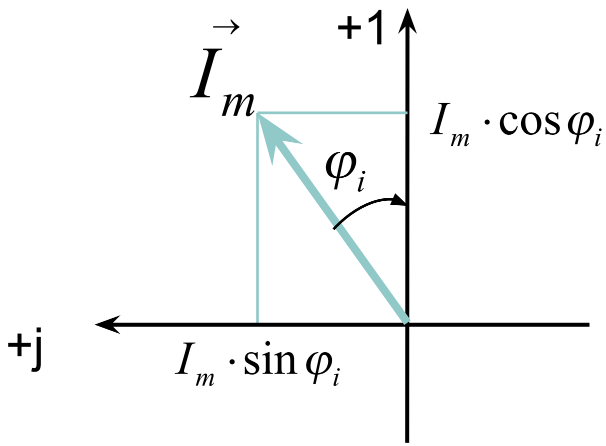
$$i_2 = I_{2m} sin(\omega i + \varphi_{i2})$$

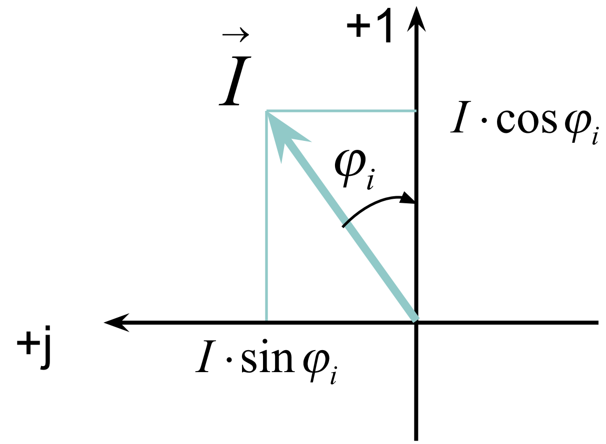
Определить:

$$i_1 + i_2 = i = I_m sin(\omega i + \varphi_i)$$



Представление синусоидального тока с помощью комплексных чисел





$$j = \sqrt{-1}$$

$$I' = I\cos\varphi_i,$$

$$I'' = I\sin\varphi_i$$

$$\dot{I} = I' + jI'' = Ie^{j\varphi_i},$$

Представление синусоидального тока с помощью комплексных чисел

Дано:

$$\dot{I}_1 = I_1^{'} + jI_1^{''}$$

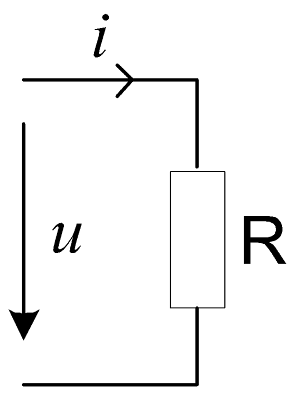
$$\dot{I}_2 = I_2^{'} + jI_2^{''}$$

$$\dot{I} = (I_1^{'} + I_2^{'}) + j(I_1^{''} + I_2^{''})$$

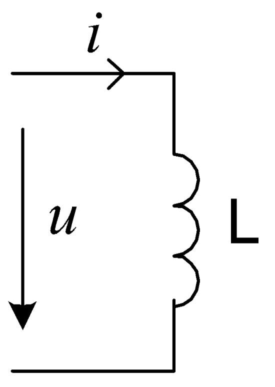
Определить:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

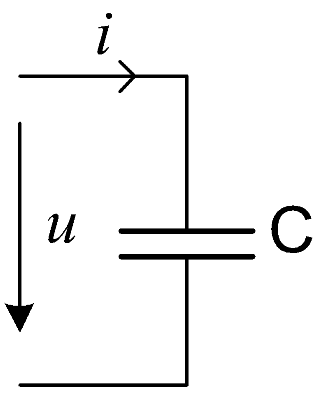
Активное сопротивление, индуктивность, емкость в цепях синусоидального тока



резистор

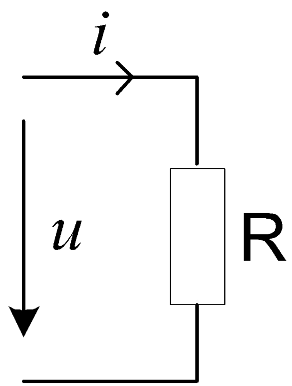


индуктивность



емкость

Цепь с резистором



$$i = \frac{u}{R}$$ Закон Ома для цепи с резистором

$$i = \frac{U_m}{R}\sin(\omega t + \varphi_u) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Дано:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$\frac{U_m}{R} = I_m; \qquad \varphi_i = \varphi_u;$$

Определить:

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Цепь с резистором

$$\frac{U_m}{\sqrt{2}} = U \qquad \frac{I_m}{\sqrt{2}} = I$$

действующие значения

$$I = \frac{U}{R}$$

закон Ома для действующих значений напряжения и тока на резисторе

Цепь с резистором

В комплексной форме:

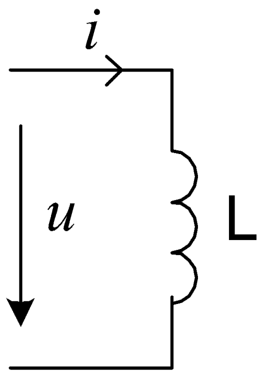
$$\dot{U} = Ue^{j\varphi_u}; \dot{I} = Ie^{j\varphi_i}$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \mathrm{R}\mathrm{e}^{j0} = R$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R}$$

закон Ома в комплексной форме для цепи с активным сопротивлением

Цепь с индуктивностью



По закону электромагнитной индукции

$$u = L\frac{di}{dt} \qquad u \cdot dt = L \cdot di$$

$$di = \frac{u}{L}dt$$

$$i = \frac{1}{L}\int udt = \frac{1}{L}\int U_m \sin(\omega t + \varphi_u)dt$$

Дано:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Определить:

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Цепь с индуктивностью

$$i = \frac{U_m}{\omega L}(-\cos(\omega t + \varphi_u)) + A$$

$$-\cos(\omega t + \varphi_u) = \sin(\omega t + \varphi_u - 90^\circ)$$

$A = 0$ т.к. в линейных электрических цепях синусоидального тока ток и напряжение изменяются по синусоидальному закону

$$i = \frac{U_m}{\omega L}\sin(\omega t + \varphi_u - 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Цепь с индуктивностью

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}; \quad \omega L = \frac{U}{I}$$ индуктивное сопротивление

$$I = \frac{U}{\omega L}; \quad x_L = \omega L; \quad [\omega L] = \frac{B}{A} = Ом$$

$$\varphi_i = \varphi_u - 90°; \varphi = \varphi_u - \varphi_i = 90°.$$

Ток на участке цепи синусоидального тока, содержащем индуктивность, отстает от напряжения на угол 90°

Цепь с индуктивностью

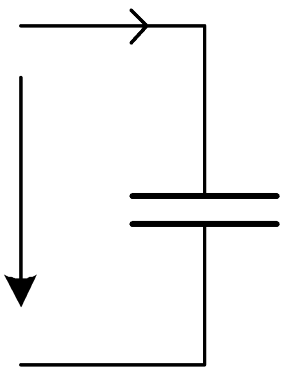
В комплексной форме:

$$\dot{U} = Ue^{j\varphi_u}; \dot{I} = Ie^{j\varphi_i}$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = x_L e^{j90^\circ} = jx_L$$

$\dot{I} = \dfrac{\dot{U}}{jx_L}$ – закон Ома в комплексной форме для цепи с индуктивным сопротивлением

Цепь с емкостью



Электрический ток, протекающий через конденсатор, есть скорость изменения заряда на его обкладках:

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(C \cdot u)}{dt} = C \cdot \frac{du}{dt}$$

Дано:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Определить:

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Цепь с емкостью

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(uC)}{dt} = C\frac{du}{dt}$$

$$i = C\frac{d}{dt}(U_m \sin(\omega t + \varphi_u)) = C\omega U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$i = C\omega U_m \sin(\omega t + \varphi_u + 90°) =$$

$$= I_m \sin(\omega t + \varphi_u + 90°) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Цепь с емкостью

$$I_m = C\omega U_m = \frac{U_m}{\boxed{\dfrac{1}{\omega C}}} = \frac{U_m}{x_C}$$

$$x_C = \frac{1}{\omega C}$$ емкостное сопротивление

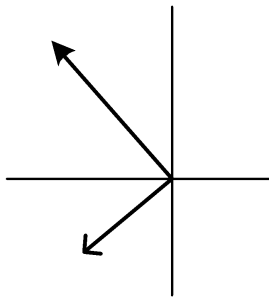
Цепь с емкостью

$$I = \frac{U}{x_C}$$

закон Ома для действующих значений тока и напряжения на участке цепи, содержащем емкость.

$$\varphi_u - \varphi_i = -90° < 0$$

ток на емкости опережает напряжение на угол 90°, или напряжение отстает от тока на угол 90°

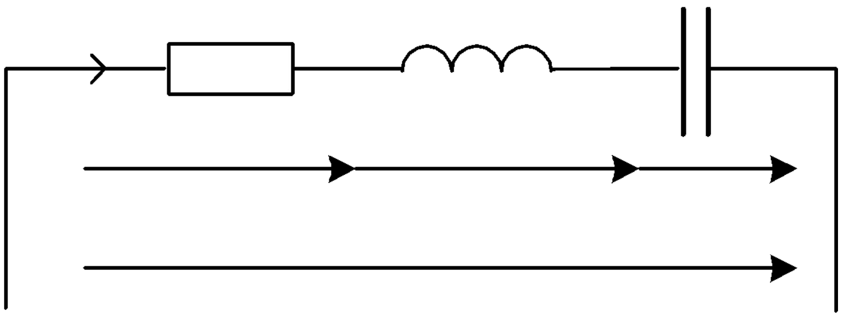


Цепь с емкостью

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I}e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = x_C e^{-j90^\circ} = -jx_C$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{-jx_C}$$ - закон Ома в комплексной форме

Последовательное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений



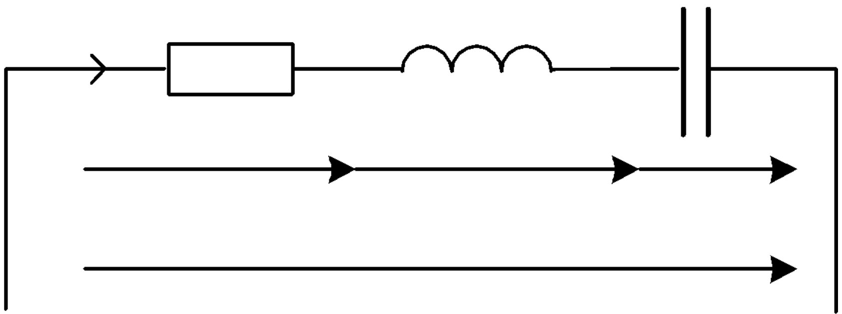
Дано:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Определить:

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Последовательное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений



По второму закону Кирхгофа

$$u = u_R + u_L + u_C$$

В комплексной форме: $\dot U = \dot U_R + \dot U_L + \dot U_C$

$$\dot U_R = \dot I R \qquad \dot U_L = \dot I\, jx_L \qquad \dot U_C = \dot I(-jx_C)$$

$$\dot U = \dot I R + \dot I\, jx_L + \dot I(-jx_L) = \dot I(R + jx_L - jx_C) = \dot I\, \underline{Z}$$

Последовательное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений

$$\dot{U} = \dot{I} R + \dot{I} jx_L + \dot{I}(-jx_L) = \dot{I}(R + jx_L - jx_C) = \dot{I}\,\underline{Z}$$

$\underline{Z} = R + jx_L - jx_C$ комплексное сопротивление цепи

$\underline{Z} = R + j(x_L - x_C) = R + jx$ где $x = x_L - x_C$ – реактивное сопротивление цепи

Последовательное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений

Комплексное сопротивление в показательной форме

$$\underline{Z} = R + j(x_L - x_C) = R + jx$$

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$$

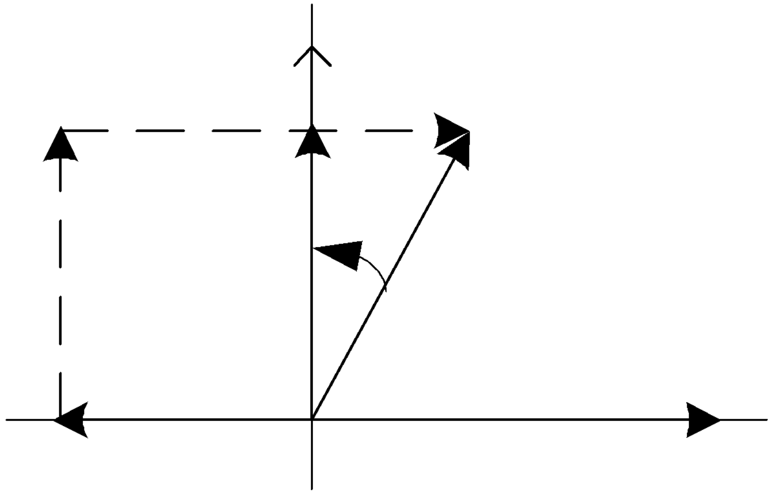
$$Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}$$

$$\varphi = arctg\frac{x_L - x_C}{R}$$

Последовательное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

Пусть вектор тока совпадает с положительным направлением оси действительных чисел

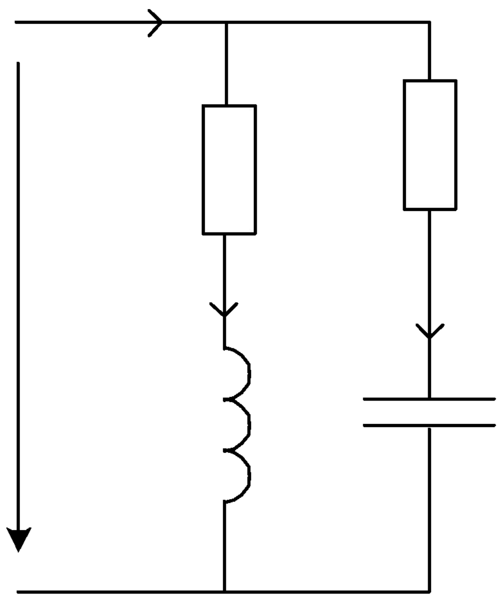


Вектор падения напряжения на резисторе совпадает по направлению с вектором тока, протекающего через него.

Вектор падения напряжения на индуктивности опережает вектор тока, протекающего через него, на угол 90°

Вектор падения напряжения на емкости отстает от вектора тока, протекающего через него, на угол 90°

Параллельное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений



$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Параллельное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений

По I закону Кирхгофа для мгновенных значений токов

$$i = i_1 + i_2$$

По I закону Кирхгофа для комплексов токов

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \,.$$

Параллельное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений

Разделим обе части уравнения на одно и то же напряжение U

$$\frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}} + \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}}; \qquad \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}; \qquad \underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$$

$\underline{Y}$ - полная проводимость

$$\underline{Y} = G - jB$$

Параллельное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений

$\underline{Y} = G - jB$

G - активная проводимость,

$B = B_L - B_C$ - реактивная проводимость

$[Y] = [G] = [B] = См$

Если известны параметры цепи, то проводимости:

$$G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2}; \quad G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2}; \quad B_L = \frac{x_L}{Z_1^2}; \quad B_C = \frac{x_C}{Z_2^2}$$

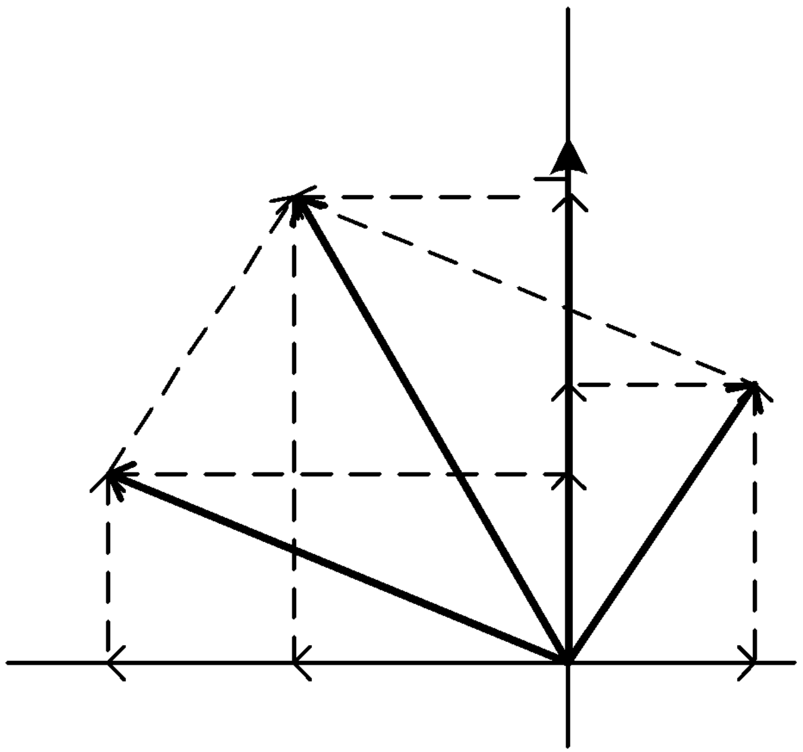
Параллельное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений

Пусть вектор приложенного напряжения совпадает с положительным направлением оси действительных чисел

$$\varphi_u = 0$$

Ток I_1 отстает от приложенного напряжения на угол, меньше 90°

Ток I_2 опережает приложенное напряжение на угол, меньше 90°



Параллельное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений

Угол сдвига фаз между током в неразветвленном участке цепи и напряжением на концах этого участка

$$\varphi = arctg\frac{B_L - B_C}{G_1 + G_2}$$

$B_L > B_C; \varphi > 0,$ вектор тока отстает от вектора напряжения, цепь носит активно-индуктивный характер

$B_L < B_C; \varphi < 0,$ вектор тока опережает вектор напряжения, цепь носит активно-емкостный характер

$B_L = B_C; \varphi = 0$ цепь носит активный характер, в цепи наблюдается резонанс токов

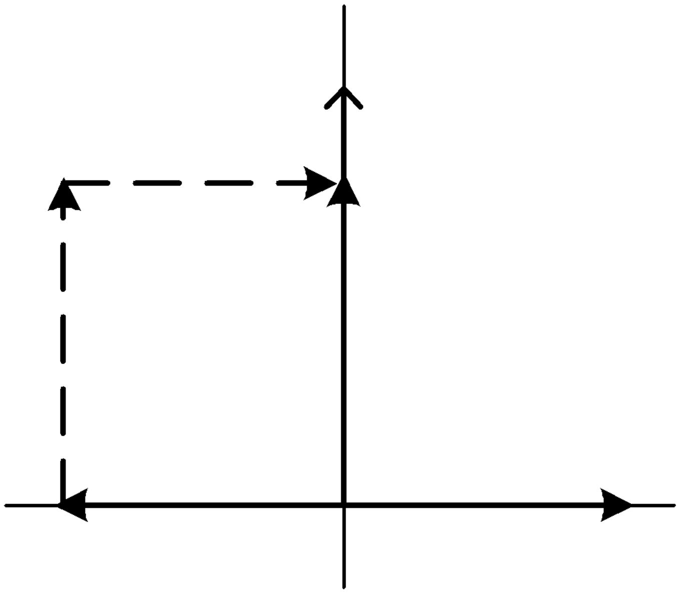
Резонанс в цепи однофазного синусоидального тока

Резонанс в электрических цепях - режим участка цепи, содержащий индуктивный и емкостный элементы, при котором угол сдвига фаз между напряжением и током равен 0°

- резонанс напряжений (при последовательном соединении индуктивного и емкостного сопротивлений)
- резонанс токов (при параллельном соединении ветвей, содержащих индуктивность и емкость)

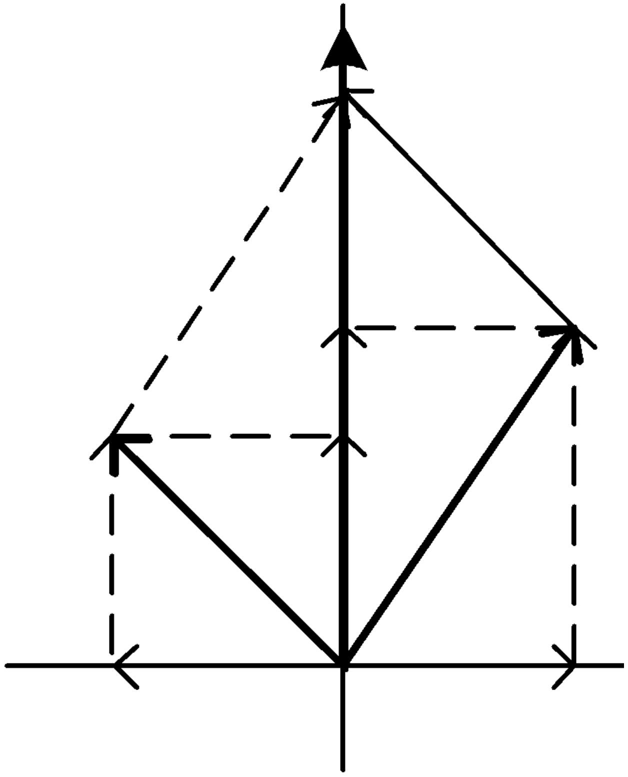
Резонанс в цепи однофазного синусоидального тока

Резонанс напряжений



Резонанс в цепи однофазного синусоидального тока

Резонанс токов



Мощность цепи синусоидального тока

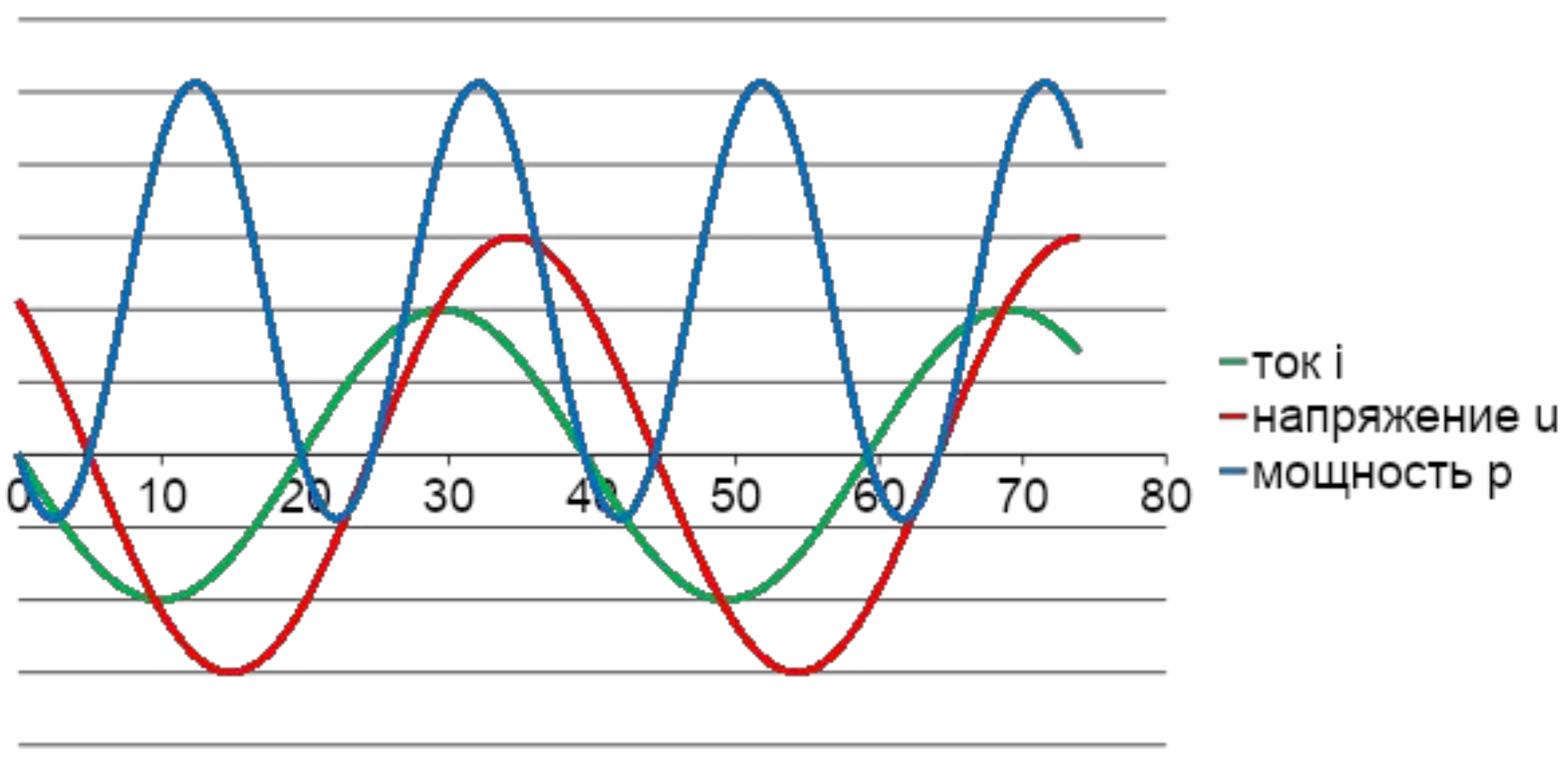
- Мгновенная мощность
- Активная мощность
- Реактивная мощность
- Полная мощность

Мощность цепи синусоидального тока

Под мгновенной мощностью (мощностью в данный момент времени) понимается произведение мгновенных значений тока и напряжения

$$p = ui = p_R + p_L + p_C.$$

Мощность цепи синусоидального тока



Мощность цепи синусоидального тока

$$\left.\begin{aligned} &u > 0; i > 0 \\ &u < 0; i < 0 \end{aligned}\right\} \quad p > 0$$

в рассматриваемый участок цепи поступает энергия

Мощность цепи синусоидального тока

$$\left.\begin{aligned} u > 0; i < 0 \\ u < 0; i > 0 \end{aligned}\right\} \quad p < 0$$

участок отдает энергию

Мощность цепи синусоидального тока

Среднее значение мощности

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt$$

за период всегда положительное, т. к. на участке всегда есть необратимые преобразования энергии

Мощность цепи синусоидального тока

Средняя за период мощность называется активной:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = UI\cos\varphi$$

$$\left[P\right] = Вт$$

Мощность цепи синусоидального тока

- мощность реактивных элементов в среднем за период равна 0,
- в течение четверти периода она положительна, что физически означает накопление энергии в магнитном поле катушки или в электрическом поле конденсатора,
- в течении следующей четверти – отрицательна, что соответствует расходу энергии

Мощность цепи синусоидального тока

Имеет место процесс колебания энергии, но необратимых преобразований энергии нет

Мощность колебаний энергии называют реактивной

$$Q = UI \sin\varphi.$$

$$\left[Q\right] = вар$$

Мощность цепи синусоидального тока

Полная мощность - максимально возможная мощность при заданных напряжении U и токе I

$$S = UI$$

$$[S] = BA$$

Мощность цепи синусоидального тока

Связь между различными мощностями:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\varphi = arctg\frac{Q}{P}$$

Мощность цепи синусоидального тока

Полная мощность в комплексной форме

$$\underline{S} = \dot{U}\overset{*}{I}$$

$\overset{*}{I}$ - сопряженный ток

$$\dot{I} = Ie^{j\varphi_i} = I' + jI''$$

$$\overset{*}{I} = Ie^{-j\varphi_i} = I' - jI''.$$

$$\underline{S} = Ue^{j\varphi_u} Ie^{-j\varphi_i} = UIe^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = UIe^{j\varphi} =$$

$$= UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ.$$

Расчет однофазных цепей синусоидального тока символическим методом

Суть метода:

если в цепи переменного тока токи, напряжения, сопротивления записаны в комплексной форме, то для этих цепей справедливы законы и методы расчета цепей постоянного тока

Расчет однофазных цепей синусоидального тока символическим методом

Величина, закон	Цепи постоянного тока	Цепи однофазного синусоидального тока
Ток		
Напряжение		
Сопротивление		
Закон Ома для участка цепи		
I закон Кирхгофа		
II закон Кирхгофа		

Расчет однофазных цепей синусоидального тока символическим методом

1. Записать в комплексной форме сопротивления всех ветвей.
2. Задать направление на комплексной плоскости известного тока или напряжения; представить в комплексной форме этот ток или напряжение.
3. Любым способом определить комплексы остальных токов и напряжений.
4. Правильность решения проверить, составив уравнения баланса активной и реактивной мощностей.