

*Теоретические основы
электротехники*

Однофазные цепи
синусоидального тока

Содержание

- Основные параметры синусоидально изменяющихся величин
- Представление синусоидального тока в различных формах
- Активное сопротивление, индуктивность, емкость в цепях ...
- Мощность цепи синусоидального тока

Основные параметры синусоидально изменяющихся величин

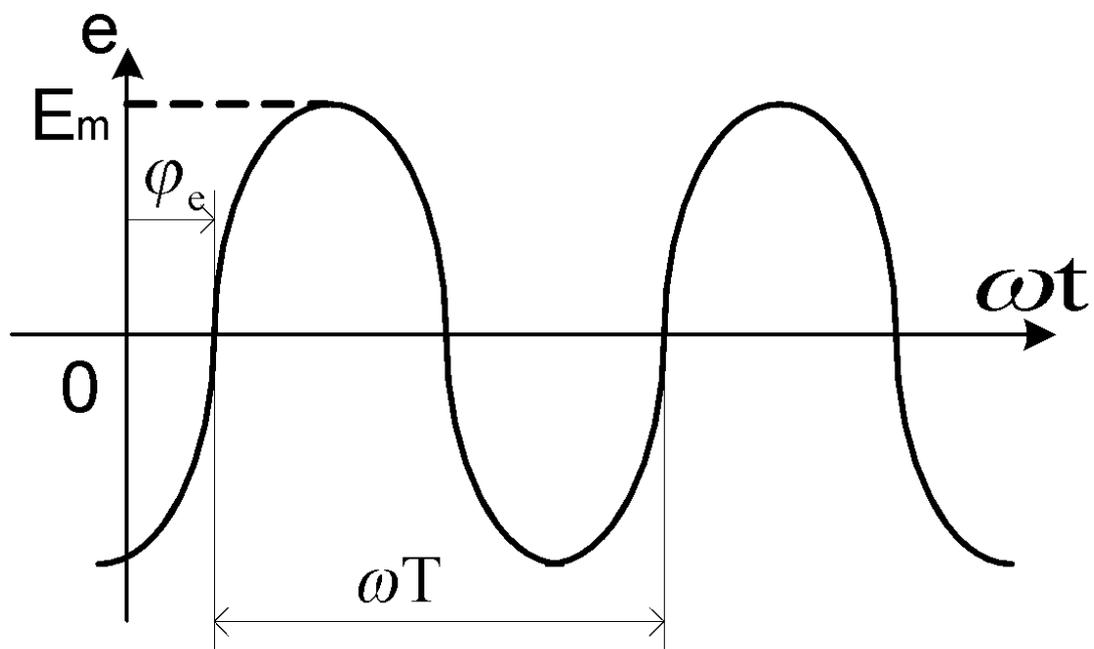
В линейных цепях синусоидального тока напряжение, ЭДС, ток изменяются по синусоидальному закону:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u);$$

$$e = E_m \sin(\omega t + \varphi_e);$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i),$$

Основные параметры синусоидально изменяющихся величин



Основные параметры синусоидально изменяющихся величин

u, i, e - мгновенные значения напряжения, тока, ЭДС (значения в данный момент времени);

$\omega t + \varphi_u, \omega t + \varphi_e, \omega t + \varphi_i$ - фаза (фазовый угол);

U_m, I_m, E_m - амплитуда - максимальное значение синусоидальной величины;

ω - угловая частота (с^{-1})

Основные параметры синусоидально изменяющихся величин

$\varphi_u, \varphi_e, \varphi_i$ – начальная фаза, значение аргумента в начальный момент времени;

T - период - наименьший интервал времени, через который мгновенные значения величины повторяются;

Основные параметры синусоидально изменяющихся величин

f - частота (Гц) – число периодов в секунду

$$(f = \frac{1}{T});$$

φ - сдвиг фаз между напряжением и током

$$(\varphi = \varphi_u - \varphi_i).$$

Основные параметры синусоидально изменяющихся величин

U, I, E - действующее значение (тепловой эквивалент постоянному току):

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}$$

Основные параметры синусоидально изменяющихся величин

Физический смысл действующего значения переменного тока: это такой постоянный ток, который за то же время, проходя через то же сопротивление, выделяет такое же количество тепла, что и данный переменный ток.

Основные параметры синусоидально изменяющихся величин

Для синусоидального тока:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

Представление синусоидального тока в различных формах

- Аналитический способ
- Графический способ
- Представление с использованием векторов
- Представление с использованием комплексных чисел

Дано:

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_{i1});$$

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_{i2})$$

Определить:

$$i_1 + i_2 = i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Аналитическое представление синусоидального тока

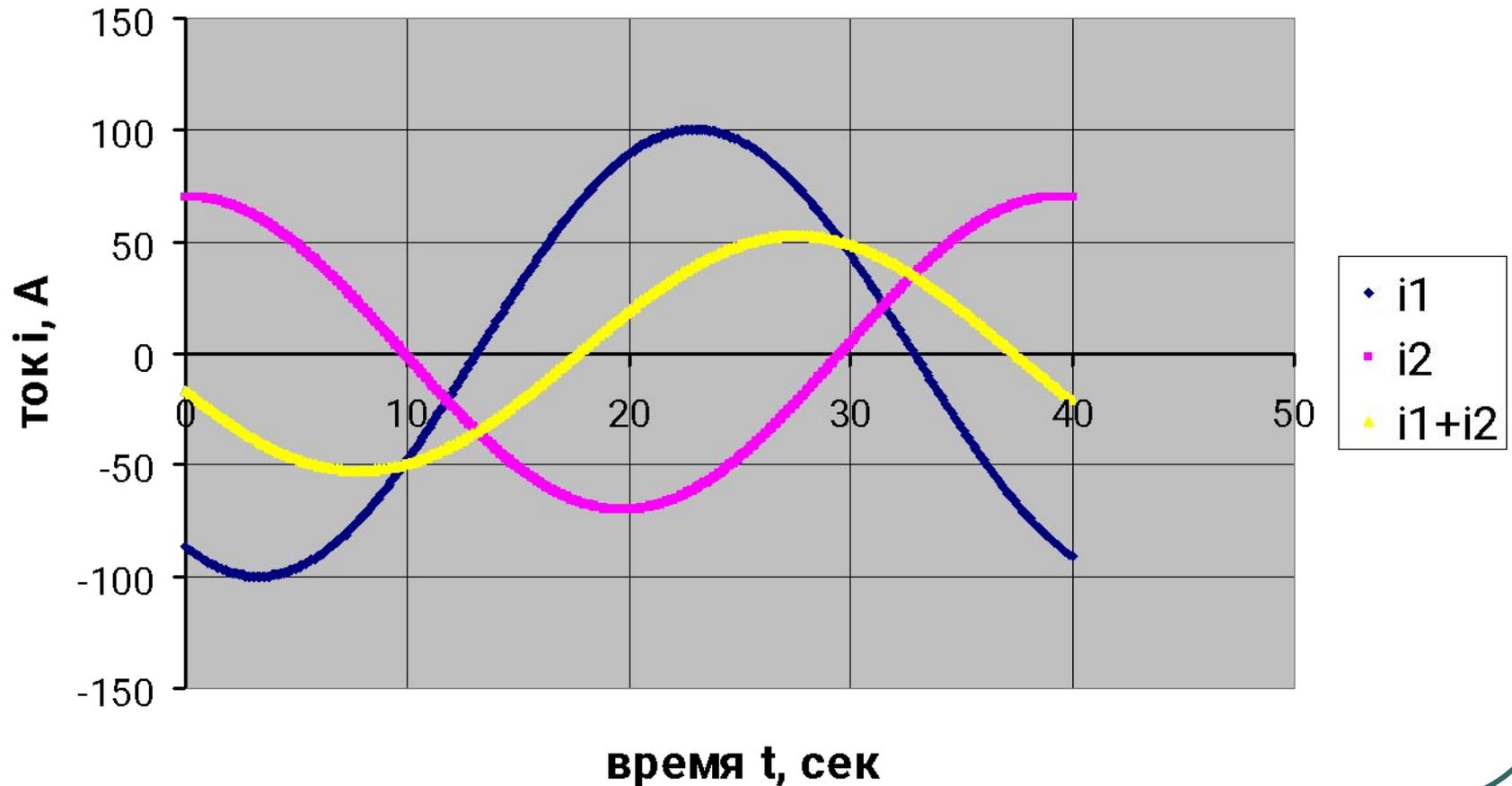
Ток записывается как функция времени.

Сумма двух синусоидальных токов
одинаковой частоты - синусоидальный ток
такой же частоты

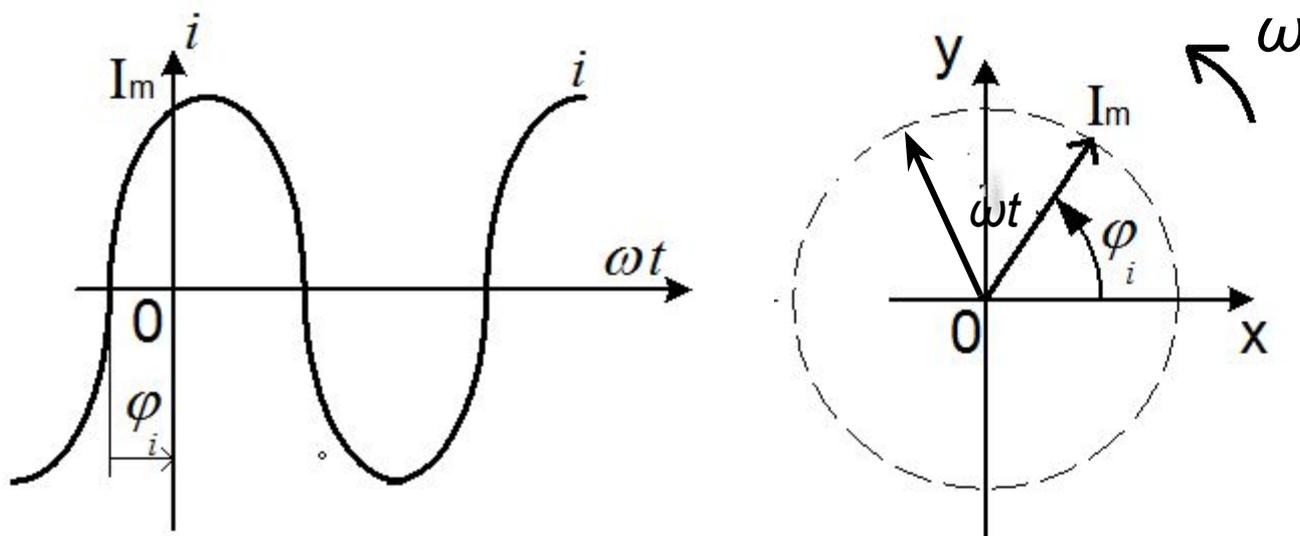
$$I_m = \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2 - 2I_{m1}I_{m2} \cos(\varphi_{i1} - \varphi_{i2})};$$

$$\varphi_i = \operatorname{arctg} \frac{I_{1m} \sin \varphi_{i1} + I_{2m} \sin \varphi_{i2}}{I_{1m} \cos \varphi_{i1} + I_{2m} \cos \varphi_{i2}}.$$

Графическое представление синусоидальных токов



Представление синусоидального тока с помощью векторов



$$\text{Pr}(I_m)_y = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) = i(t)$$

Представление синусоидального тока с помощью векторов

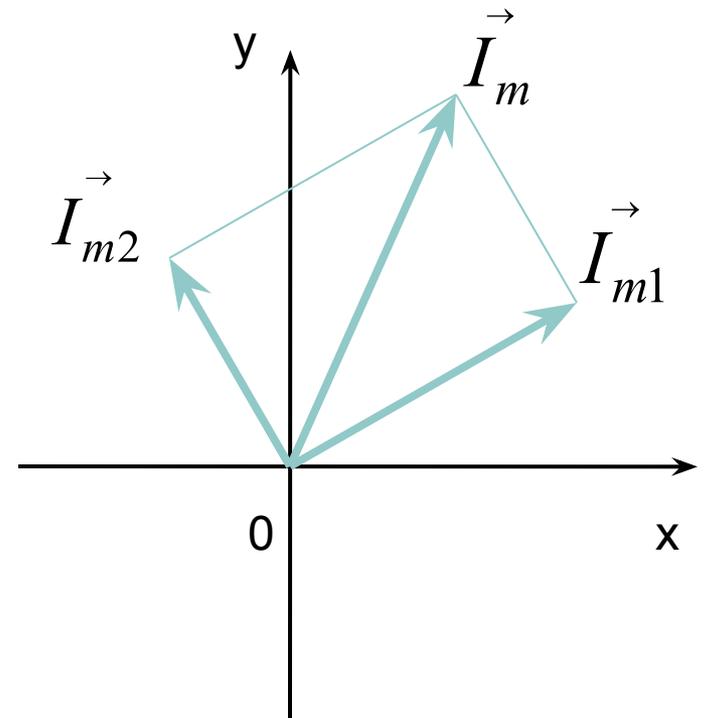
Дано:

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega i + \varphi_{i1});$$

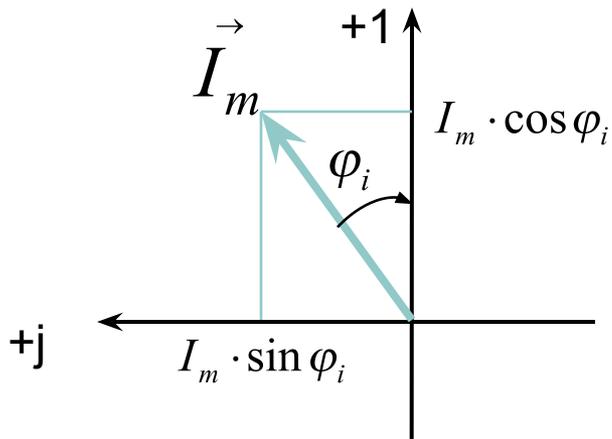
$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega i + \varphi_{i2})$$

Определить:

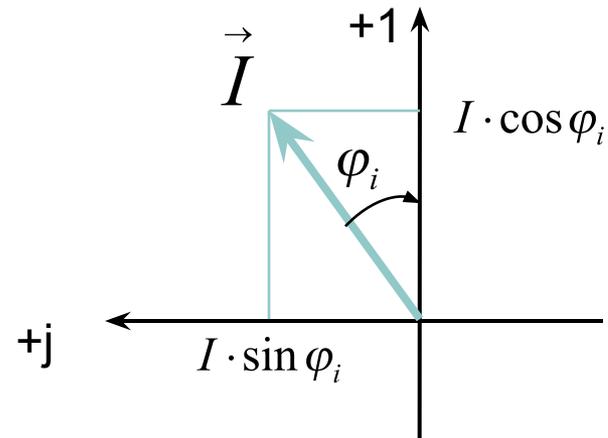
$$i_1 + i_2 = i = I_m \sin(\omega i + \varphi_i)$$



Представление синусоидального тока с ПОМОЩЬЮ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ



$$j = \sqrt{-1}$$



$$I' = I \cos \varphi_i,$$

$$I'' = I \sin \varphi_i$$

$$\dot{I} = I' + jI'' = I e^{j\varphi_i},$$

Представление синусоидального тока с ПОМОЩЬЮ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Дано:

$$\dot{I}_1 = I_1' + jI_1''$$

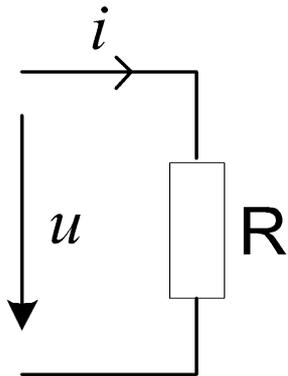
$$\dot{I}_2 = I_2' + jI_2''$$

$$\dot{I} = (I_1' + I_2') + j(I_1'' + I_2'')$$

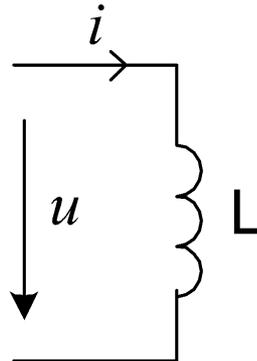
Определить:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

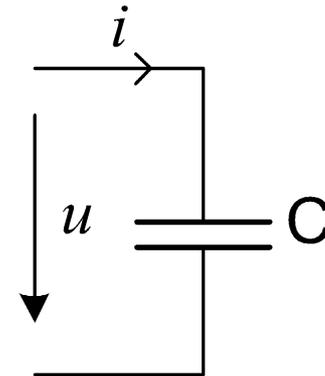
Активное сопротивление, индуктивность, емкость в цепях синусоидального тока



резистор

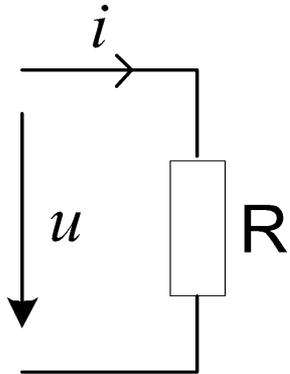


ИНДУКТИВНОСТЬ



емкость

Цепь с резистором



$$i = \frac{u}{R}$$

Закон Ома для цепи
с резистором

$$i = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \varphi_u) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Дано:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$\frac{U_m}{R} = I_m; \quad \varphi_i = \varphi_u;$$

Определить:

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Цепь с резистором

$$\frac{U_m}{\sqrt{2}} = U \quad \frac{I_m}{\sqrt{2}} = I \quad \text{действующие значения}$$

$$I = \frac{U}{R} \quad \text{закон Ома для действующих значений напряжения и тока на резисторе}$$

Цепь с резистором

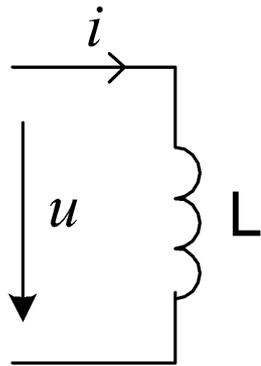
В комплексной форме:

$$\dot{U} = Ue^{j\varphi_u}; \dot{I} = Ie^{j\varphi_i}$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}} = \frac{\dot{U}}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Re^{j0} = R$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R} \quad \text{закон Ома в комплексной форме для цепи с активным сопротивлением}$$

Цепь с индуктивностью



Дано:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Определить:

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

По закону электромагнитной индукции

$$u = L \frac{di}{dt} \quad u \cdot dt = L \cdot di$$

$$di = \frac{u}{L} dt$$

$$i = \frac{1}{L} \int u dt = \frac{1}{L} \int U_m \sin(\omega t + \varphi_u) dt$$

Цепь с индуктивностью

$$i = \frac{U_m}{\omega L} (-\cos(\omega t + \varphi_u)) + A$$

$$-\cos(\omega t + \varphi_u) = \sin(\omega t + \varphi_u - 90^\circ)$$

$A = 0$ т.к. в линейных электрических цепях синусоидального тока ток и напряжение изменяются по синусоидальному закону

$$i = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \varphi_u - 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Цепь с индуктивностью

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}; \quad \omega L = \frac{U}{I} \quad \text{индуктивное сопротивление}$$

$$I = \frac{U}{\omega L}; \quad x_L = \omega L; \quad [\omega L] = \frac{B}{A} = \text{Ом}$$

$$\varphi_i = \varphi_u - 90^\circ; \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i = 90^\circ.$$

Ток на участке цепи синусоидального тока, содержащем индуктивность, отстает от напряжения на угол 90°

Цепь с индуктивностью

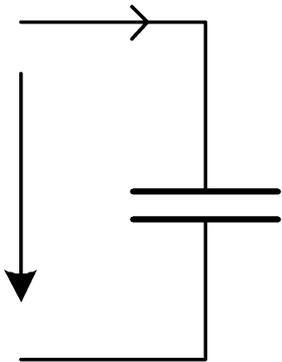
В комплексной форме:

$$\dot{U} = Ue^{j\varphi_u}; \dot{I} = Ie^{j\varphi_i}$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = x_L e^{j90^\circ} = jx_L$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{jx_L} \quad \text{закон Ома в комплексной форме для цепи с индуктивным сопротивлением}$$

Цепь с емкостью



Электрический ток, протекающий через конденсатор, есть скорость изменения заряда на его обкладках:

Дано:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(C \cdot u)}{dt} = C \cdot \frac{du}{dt}$$

Определить:

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Цепь с емкостью

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(uC)}{dt} = C \frac{du}{dt}$$

$$i = C \frac{d}{dt} (U_m \sin(\omega t + \varphi_u)) = C \omega U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$i = C \omega U_m \sin(\omega t + \varphi_u + 90^\circ) =$$

$$= I_m \sin(\omega t + \varphi_u + 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Цепь с емкостью

$$I_m = C\omega U_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U_m}{x_C}$$

$$x_C = \frac{1}{\omega C} \quad \text{емкостное сопротивление}$$

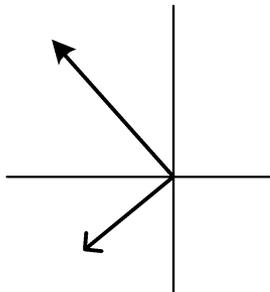
Цепь с емкостью

$$I = \frac{U}{x_C}$$

закон Ома для действующих значений тока и напряжения на участке цепи, содержащем емкость.

$$\varphi_u - \varphi_i = -90^\circ < 0$$

ток на емкости опережает напряжение на угол 90° , или напряжение отстает от тока на угол 90°

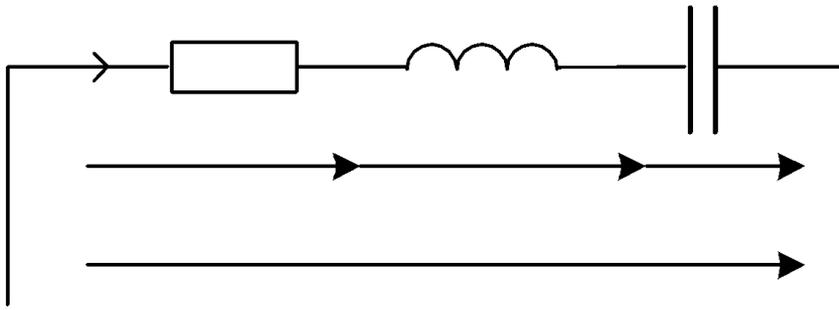


Цепь с емкостью

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = x_C e^{-j90^\circ} = -jx_C$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{-jx_C} \quad \text{- закон Ома в комплексной форме}$$

Последовательное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений



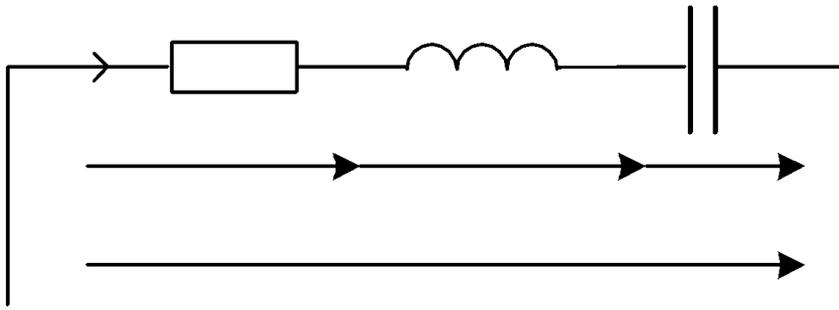
Дано:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Определить:

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Последовательное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений



По второму закону Кирхгофа

$$u = u_R + u_L + u_C$$

В комплексной форме: $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$

$$\dot{U}_R = \dot{I} R \quad \dot{U}_L = \dot{I} jx_L \quad \dot{U}_C = \dot{I}(-jx_C)$$

$$\dot{U} = \dot{I} R + \dot{I} jx_L + \dot{I}(-jx_C) = \dot{I}(R + jx_L - jx_C) = \dot{I} \underline{Z}$$

Последовательное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений

$$\dot{U} = \dot{I}R + \dot{I}jx_L + \dot{I}(-jx_C) = \dot{I}(R + jx_L - jx_C) = \dot{I}\underline{Z}$$

$$\underline{Z} = R + jx_L - jx_C \quad \text{комплексное сопротивление цепи}$$

$$\underline{Z} = R + j(x_L - x_C) = R + jx \quad \text{где } x = x_L - x_C \text{ — реактивное сопротивление цепи}$$

Последовательное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений

Комплексное сопротивление в показательной форме

$$\underline{Z} = R + j(x_L - x_C) = R + jx$$

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$$

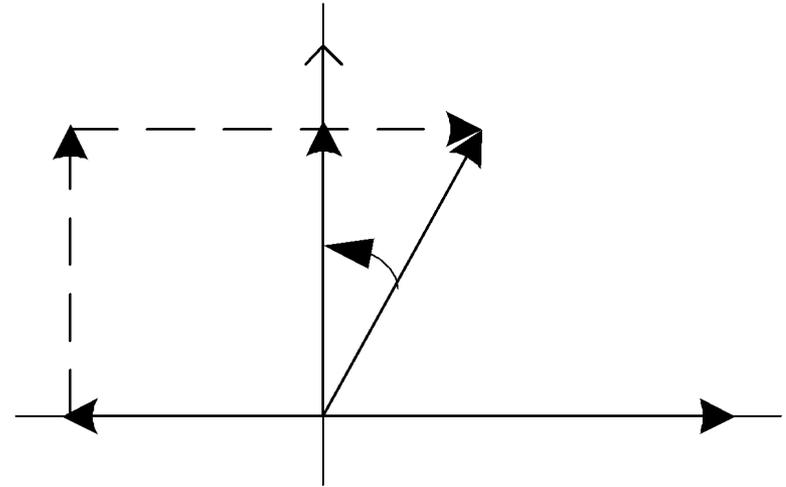
$$Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x_L - x_C}{R}$$

Последовательное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

Пусть вектор тока совпадает с положительным направлением оси действительных чисел

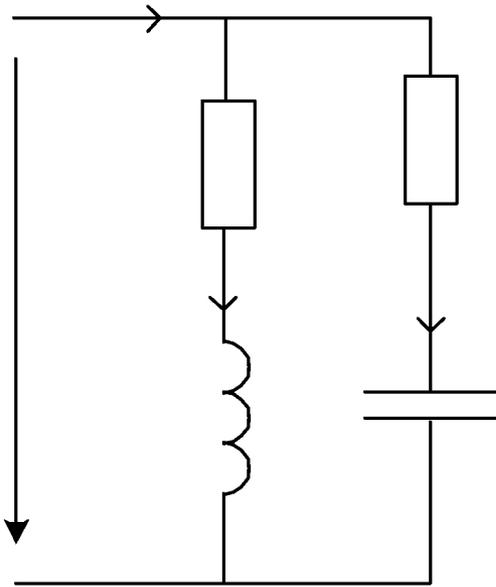


Вектор падения напряжения на резисторе совпадает по направлению с вектором тока, протекающего через него.

Вектор падения напряжения на индуктивности опережает вектор тока, протекающего через него, на угол 90°

Вектор падения напряжения на емкости отстает от вектора тока, протекающего через него, на угол 90°

Параллельное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений



$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Параллельное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений

По I закону Кирхгофа для мгновенных значений токов

$$i = i_1 + i_2$$

По I закону Кирхгофа для комплексов токов

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2.$$

Параллельное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений

Разделим обе части уравнения на одно и то же напряжение U

$$\frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}} + \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}}; \quad \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}; \quad \underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$$

\underline{Y} - полная проводимость

$$\underline{Y} = G - jB$$

Параллельное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений

$$\underline{Y} = G - jB$$

G - активная проводимость,

$B = B_L - B_C$ - реактивная проводимость

$$[Y] = [G] = [B] = Cм$$

Если известны параметры цепи, то проводимости:

$$G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2}; \quad G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2}; \quad B_L = \frac{x_L}{Z_1^2}; \quad B_C = \frac{x_C}{Z_2^2}$$

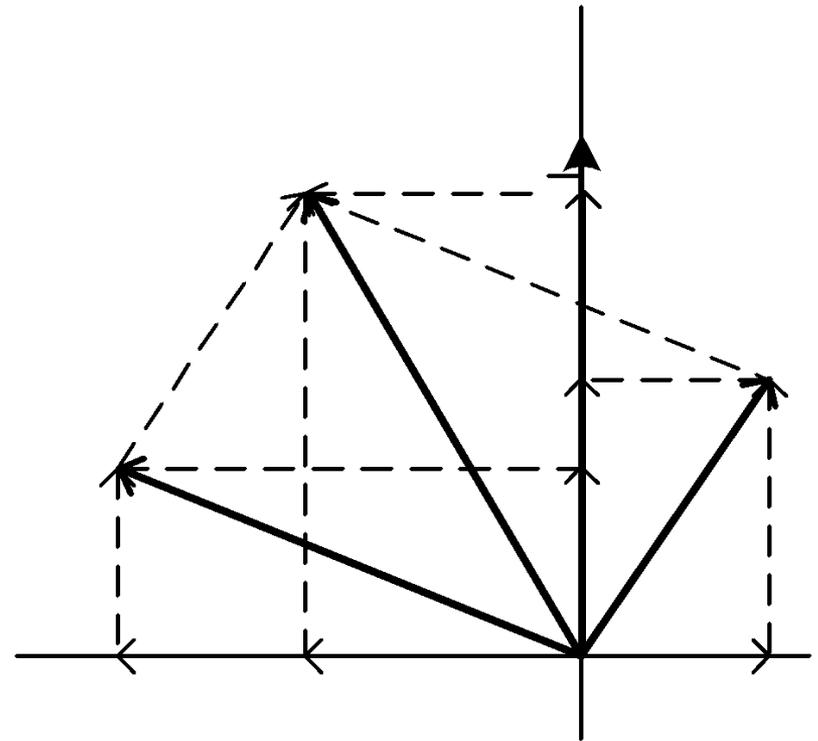
Параллельное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений

Пусть вектор приложенного
напряжения совпадает с
положительным направлением
оси действительных чисел

$$\varphi_u = 0$$

Ток I_1 отстает от приложенного
напряжения на угол, меньше 90°

Ток I_2 опережает приложенное
напряжение на угол, меньше 90°



Параллельное соединение активного, индуктивного, емкостного сопротивлений

Угол сдвига фаз между током в неразветвленном участке цепи и напряжением на концах этого участка

$$\varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G_1 + G_2}$$

$B_L > B_C; \varphi > 0$, вектор тока отстает от вектора напряжения,
цепь носит активно-индуктивный характер

$B_L < B_C; \varphi < 0$, вектор тока опережает вектор напряжения,
цепь носит активно-емкостный характер

$B_L = B_C; \varphi = 0$ цепь носит активный характер, в цепи
наблюдается резонанс токов

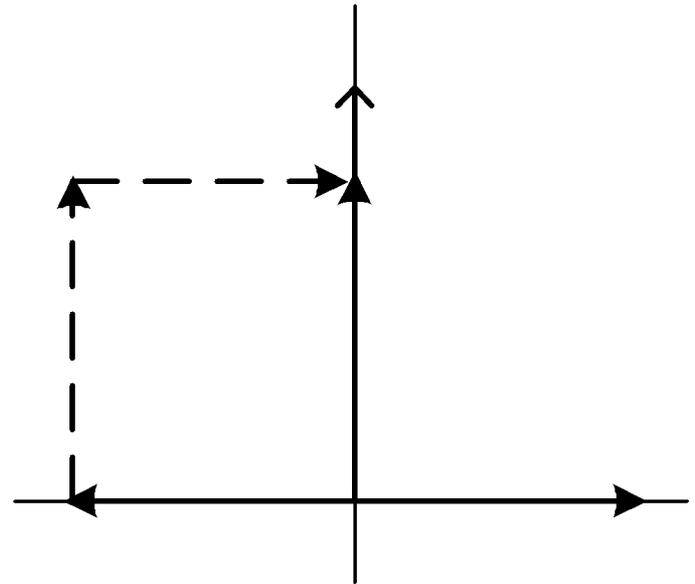
Резонанс в цепи однофазного синусоидального тока

Резонанс в электрических цепях - режим участка цепи, содержащий индуктивный и емкостный элементы, при котором угол сдвига фаз между напряжением и током равен 0°

- **резонанс напряжений** (при последовательном соединении индуктивного и емкостного сопротивлений)
- **резонанс токов** (при параллельном соединении ветвей, содержащих индуктивность и емкость)

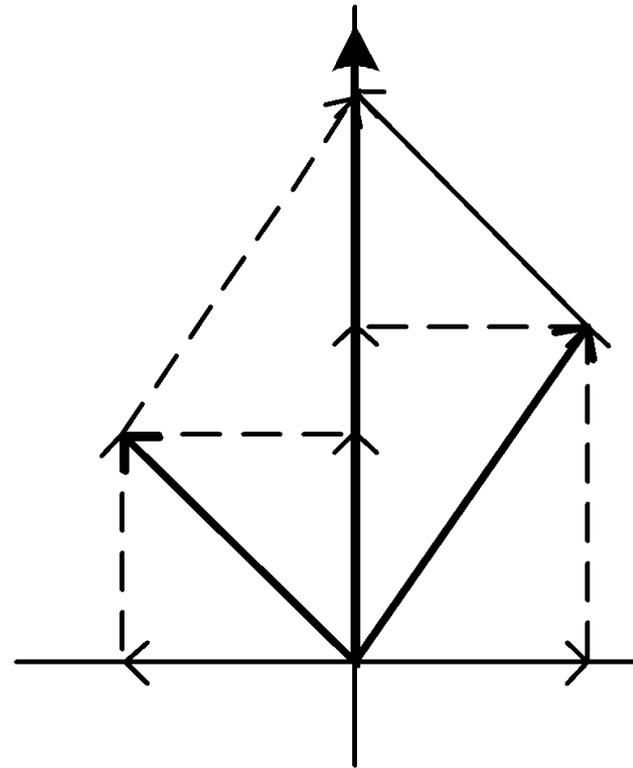
Резонанс в цепи однофазного синусоидального тока

Резонанс напряжений



Резонанс в цепи однофазного синусоидального тока

Резонанс токов



Мощность цепи синусоидального тока

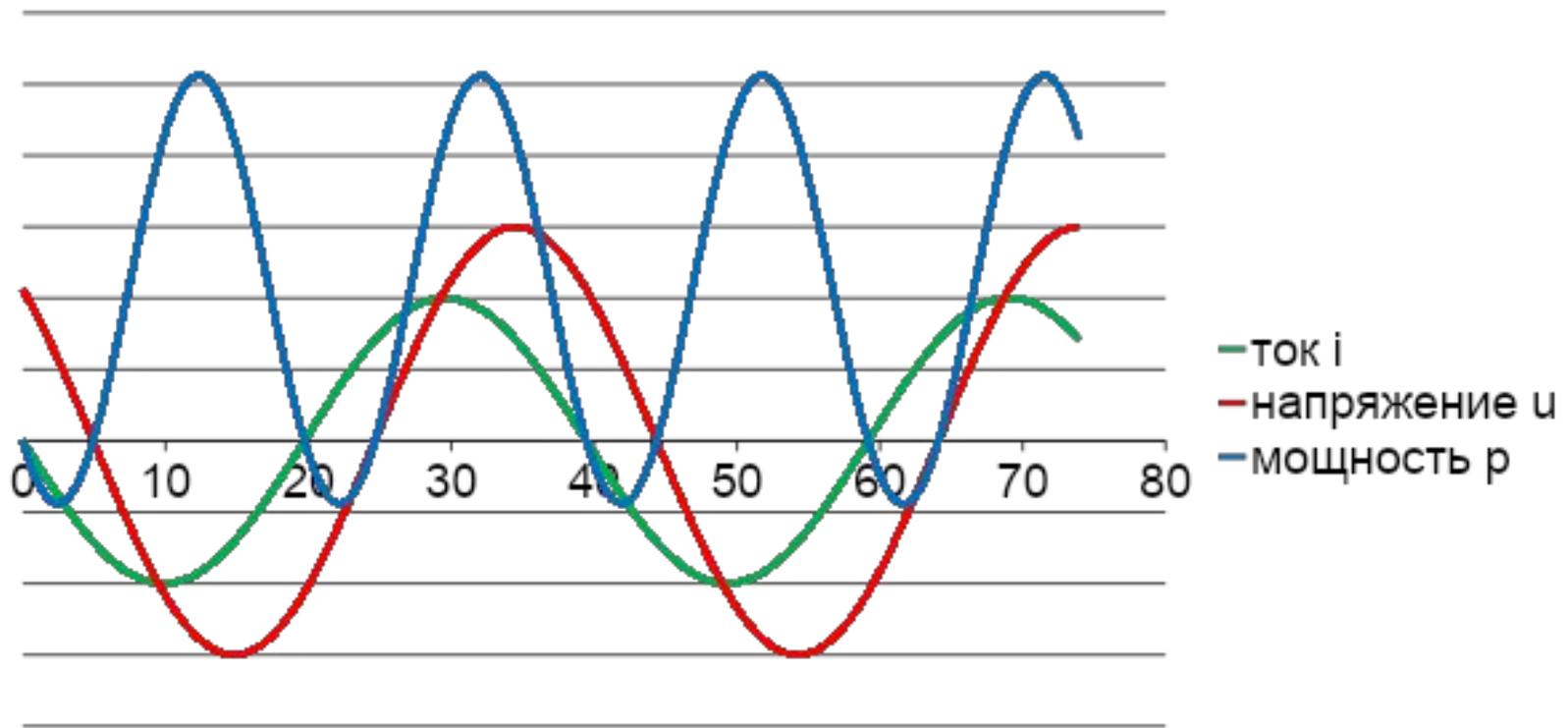
- Мгновенная мощность
- Активная мощность
- Реактивная мощность
- Полная мощность

Мощность цепи синусоидального тока

Под мгновенной мощностью (мощностью в данный момент времени) понимается произведение мгновенных значений тока и напряжения

$$p = ui = p_R + p_L + p_C.$$

Мощность цепи синусоидального тока



Мощность цепи синусоидального тока

$$\left. \begin{array}{l} u > 0; i > 0 \\ u < 0; i < 0 \end{array} \right\} p > 0$$

в рассматриваемый участок цепи
поступает энергия

Мощность цепи синусоидального тока

$$\left. \begin{array}{l} u > 0; i < 0 \\ u < 0; i > 0 \end{array} \right\} p < 0$$

участок отдает энергию

Мощность цепи синусоидального тока

Среднее значение мощности

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt$$

за период всегда положительное, т. к. на участке всегда есть необратимые преобразования энергии

Мощность цепи синусоидального тока

Средняя за период мощность называется активной:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = UI \cos \varphi$$

$$[P] = \text{Вт}$$

Мощность цепи синусоидального тока

- мощность реактивных элементов в среднем за период равна 0,
- в течение четверти периода она положительна, что физически означает накопление энергии в магнитном поле катушки или в электрическом поле конденсатора,
- в течении следующей четверти – отрицательна, что соответствует расходу энергии

Мощность цепи синусоидального тока

Имеет место процесс колебания энергии, но необратимых преобразований энергии нет

Мощность колебаний энергии называют реактивной

$$Q = UI \sin \varphi.$$

$$[Q] = \text{вар}$$

Мощность цепи синусоидального тока

Полная мощность - максимально возможная мощность при заданных напряжении U и токе I

$$S = UI$$

$$[S] = \text{ВА}$$

Мощность цепи синусоидального тока

Связь между различными мощностями:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{Q}{P}$$

Мощность цепи синусоидального тока

Полная мощность в комплексной форме

$$\underline{S} = \dot{U} I^*$$

I^* - сопряженный ток

$$\dot{I} = I e^{j\varphi_i} = I' + jI''$$

$$I^* = I e^{-j\varphi_i} = I' - jI''.$$

$$\begin{aligned} \underline{S} &= U e^{j\varphi_u} I e^{-j\varphi_i} = UI e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = UI e^{j\varphi} = \\ &= UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ. \end{aligned}$$

Расчет однофазных цепей синусоидального тока символическим методом

Суть метода:

если в цепи переменного тока токи, напряжения, сопротивления записаны в комплексной форме, то для этих цепей справедливы законы и методы расчета цепей постоянного тока

Расчет однофазных цепей синусоидального тока символическим методом

Величина, закон	Цепи постоянного тока	Цепи однофазного синусоидального тока
Ток		
Напряжение		
Сопротивление		
Закон Ома для участка цепи		
I закон Кирхгофа		
II закон Кирхгофа		

Расчет однофазных цепей синусоидального тока символическим методом

- 1.** Записать в комплексной форме сопротивления всех ветвей.
- 2.** Задать направление на комплексной плоскости известного тока или напряжения; представить в комплексной форме этот ток или напряжение.
- 3.** Любым способом определить комплексы остальных токов и напряжений.
- 4.** Правильность решения проверить, составив уравнения баланса активной и реактивной мощностей.