Лекция 5
Непрерывные функции одной и двух переменных.

Литература.

В.Г. Зубков, В.А.Ляховский, А.И.Мартыненко, В.Б.Миносцев. Курс математики для технических высших учебных заведений Учебное пособие часть I Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А. Пушкаря. 2012г. Лекция 9.

В.А.Ляховский, А.И.Мартыненко, В.Б.Миносцев. Курс математики для технических высших учебных заведений Учебное пособие часть II Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А. Пушкаря. 2012г. Лекция 38 .

Непрерывные функции, действия над непрерывными функциями, точки разрыва и их классификация, свойства функций, непрерывных на сегменте.

Предел функции двух переменных. Точки и линии разрыва. Функции непрерывные в ограниченной замкнутой области.

9.1. Непрерывные функции

Определение 9.1. *Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если:*

- *функция определена в точке x_0 и в некоторой её окрестности, содержащей эту точку;*
- *функция имеет предел при $x \to x_0$;*
- *предел функции при $x \to x_0$ равен значению функции в точке x_0:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{9.1}$$

Если в точке x_0 функция непрерывна, то точка x_0 называется точкой непрерывности функции.

Пример 9.1. *Исследовать на непрерывность функцию $y = e^x$ в точке $x = 1$.*

Р е ш е н и е: Чтобы доказать, что функция $y = e^x$ непрерывна в точке $x = 1$, необходимо проверить выполнение трёх следующих условий (определение непрерывности):

- функция $y = e^x$ определена в точке $x = 1 \Rightarrow f(1) = e$;
- существует $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} e^x = e$;
- этот предел равен значению функции в точке $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = e.$$

Таким образом, доказано, что функция $y = e^x$ непрерывна в точке $x = 1$.

Замечание 9.1. *Формулу (9.1) можно записать в виде*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x), \tag{9.2}$$

так как $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$. Это значит, что при нахождении предела непрерывной функции можно переходить к пределу под знаком функции.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{9.1}$$

Введем понятие непрерывности функции в точке x_0 справа и слева. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной в точке x_0 слева. Аналогично определяется непрерывность функции справа.

Так как $\Delta x = x - x_0$, а $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, то условие (9.1) равносильно следующему:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x-x_0\to 0}[f(x) - f(x_0)] = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Определение 9.2. *Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции*

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0. \tag{9.3}$$

Пример 9.2. *Показать, что функция $y = x^3$ непрерывна для любого значения аргумента x.*

Р е ш е н и е: Найдем приращение функции Δy.

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Используя теоремы о пределе суммы и произведения функции, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}(3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) = 0.$$

Следовательно, функция $y = x^3$ непрерывна при $-\infty < x < +\infty$.

9.2. Действия над непрерывными функциями

Теорема 9.1. *(Непрерывность суммы, произведения и частного непрерывных функций.) Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма и произведение также непрерывны в точке x_0. Если, кроме того, знаменатель в рассматриваемой точке не равен нулю, то частное непрерывных функций есть функция непрерывная.*

Можно строго доказать, что все основные элементарные функции непрерывны при всех значениях x, для которых они определены.

Например, степенная $y = x^n$, показательная $y = a^x$, тригонометрические $y = \sin x$ и $y = \cos x$ функции непрерывны на всей числовой оси ($x \in R$), логарифмическая функция $y = \log_a x$ непрерывна при $x > 0$, а тригонометрическая $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна в каждом из интервалов $(-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi)$ и терпит разрыв II рода в точках $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0; \pm1; \pm2; \ldots)$.

Теорема 9.2. *(Непрерывность сложной функции.) Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.*

Отсюда следует, что *элементарные функции непрерывны во всех точках, в которых они определены. И, следовательно, при исследовании на непрерывность элементарных функций, необходимо исследовать поведение функции лишь в окрестности точек*, в которых они неопределены.

В заключение этого раздела рассмотрим два предела, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пример 9.3. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

Р е ш е н и е: Заметим, что при $x \to 0$ числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю, т.е. имеет место неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Выполним преобразование

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\log_a(1+x)\right] = \lim_{x\to 0}\log_a\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Так как данная логарифмическая функция непрерывна в окрестности точки $x = 0$, то можно перейти к пределу под знаком функции

$(\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_o} x))$.

$$\lim_{x\to 0}\log_a\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = \log_a\left[\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}\right],$$

но $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e$ – второй замечательный предел.

Следовательно, $$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e. \qquad (9.4)$$

В частности, при $a = e$ $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln e = 1 \qquad (9.5)$$

Таким образом, $y = \ln(1+x)$ и $y = x$ – эквивалентные бесконечно малые функции при $x \to 0$. (9.5) принято называть третьим замечательным пределом.

Пример 9.4. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

Р е ш е н и е: Здесь мы имеем дело с неопределённостью вида $\dfrac{0}{0}$.
Для нахождения предела сделаем замену переменной, положив $a^x-1=t$.

Тогда $x=\log_a(t+1)$. При $x\to 0$ также и $t\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\dfrac{\log_a(t+1)}{t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\log_a(t+1)}{t}}.$$

Так как на основании результата, полученного в предыдущем примере,
$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\log_a(1+t)}{t}=\log_a e$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a. \qquad (9.6)$$

В частности, если $a=e$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\ln e=1,$$

т.е. $y=e^x-1$ и $y=x$ – эквивалентные бесконечно малые функции при $x\to 0$.

9.3. Точки разрыва функции и их классификация

Определение 9.3. *Точка x_0 называется точкой разрыва функции $y = f(x)$, если она принадлежит области определения функции или её границе и не является точкой непрерывности.*

Так, например, функция $y = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ (рис. 88) терпит разрыв при $x = 1$. Эта функция не определена в точке $x = 1$, и не существует предела функции в этой точке.

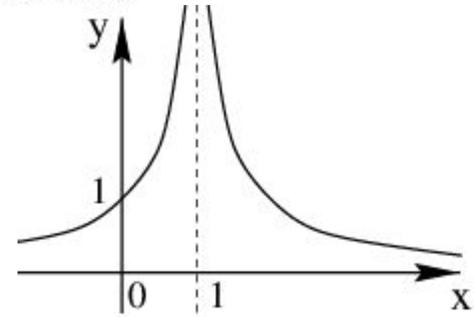

Рис. 88.

Определение 9.4. *Точка разрыва x_0 функции $y = f(x)$ называется точкой устранимого разрыва, если существуют оба односторонних предела в точке x_0 и они равны, т. е.*
$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$

Пример 9.5. *Исследовать на непрерывность функцию $y = \dfrac{\sin x}{x}$*

Р е ш е н и е: Функция $\dfrac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x = 0$. Точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва, так как при $x \to 0$ существуют пределы справа и слева и они равны:

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1, \ \lim_{x \to 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Если доопределить функцию $\dfrac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$, полагая $f(0) = 1$, то получим уже непрерывную функцию, определённую так:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x},\ \text{если } x \neq 0;\ \ f(0) = 1.$$

Доопределив функцию в точке $x = 0$, мы устранили разрыв.

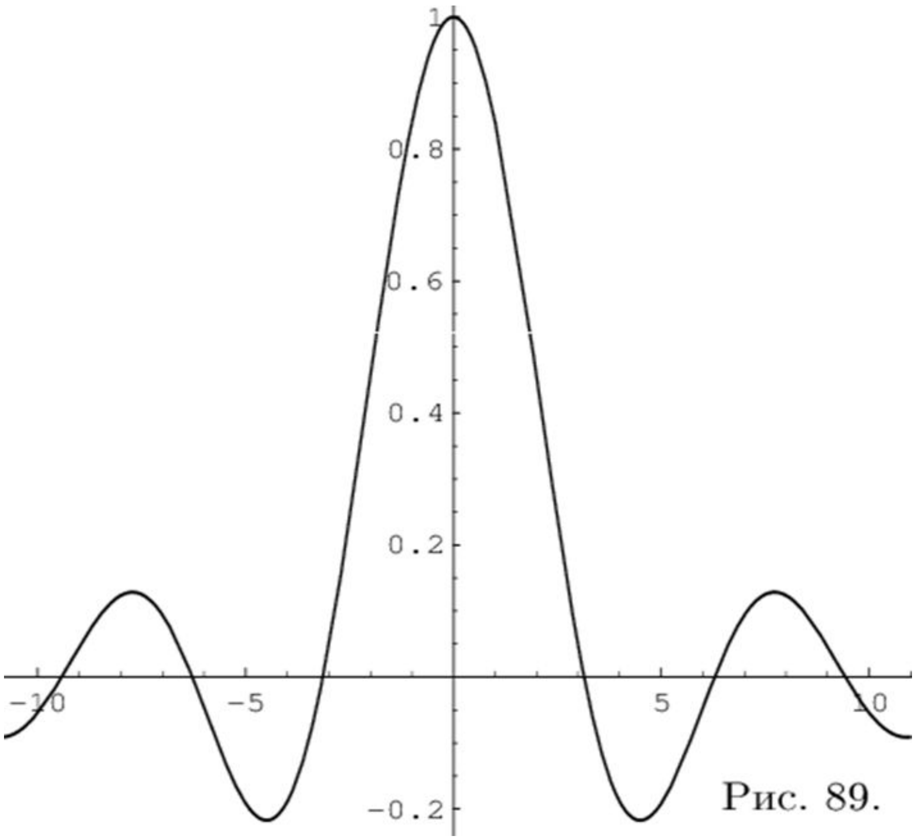

Рис. 89.

Определение 9.5. *Если в точке x_0 односторонние пределы слева и справа существуют, но не равны, точка x_0 называется точкой разрыва I рода.*

Пример 9.6. *Исследовать на непрерывность функцию* $y = \dfrac{\sin x}{|x|}$

Р е ш е н и е:
В точке $x = 0$ функция терпит разрыв I-го рода, так как односторонние пределы существуют в этой точке, но не равны:

$$\text{предел слева } \lim_{x\to -0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to -0} \frac{\sin x}{-x} = -1,$$

$$\text{предел справа } \lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

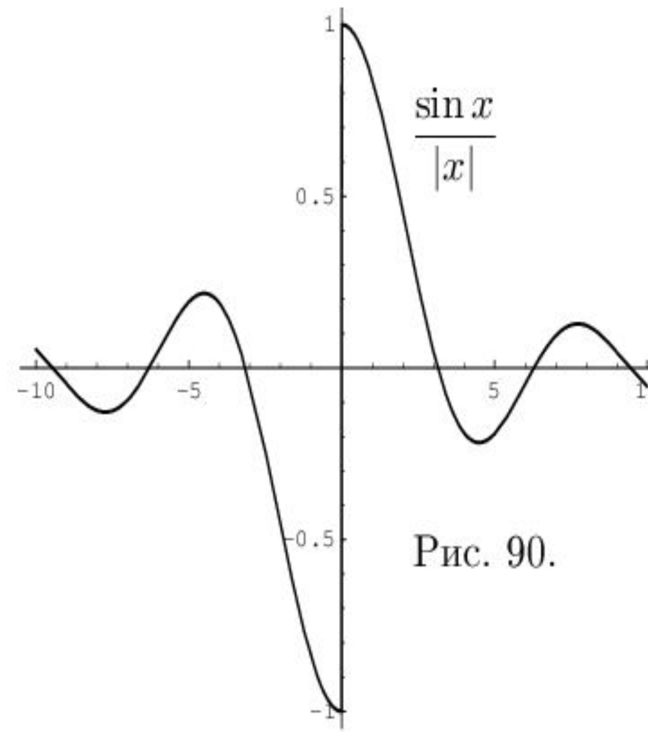

Рис. 90.

Определение 9.6. *Точки разрыва, не являющиеся точками разрыва I рода, называются точками разрыва II рода.*

В точках разрыва II рода не существует хотя бы один из односторонних пределов. Функция $y = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, представленная на рис. 88, не имеет ни левого, ни правого конечного предела в точке $x = 1$. Следовательно, для данной функции $x = 1$ является точкой разрыва II рода.

Пример 9.7. *Исследовать на непрерывность функцию* $y = \sin\dfrac{1}{x}$.

Р е ш е н и е:

Функция $y = \sin\dfrac{1}{x}$ определена для всех значений x, кроме $x = 0$. В этой точке она имеет разрыв. Точка $x = 0$ есть точка разрыва II рода, так как при $x \to 0$ как справа, так и слева, функция $\sin\dfrac{1}{x}$, колеблясь между -1 и 1, не приближается ни к какому числовому значению. График её приведен на рис. 91.

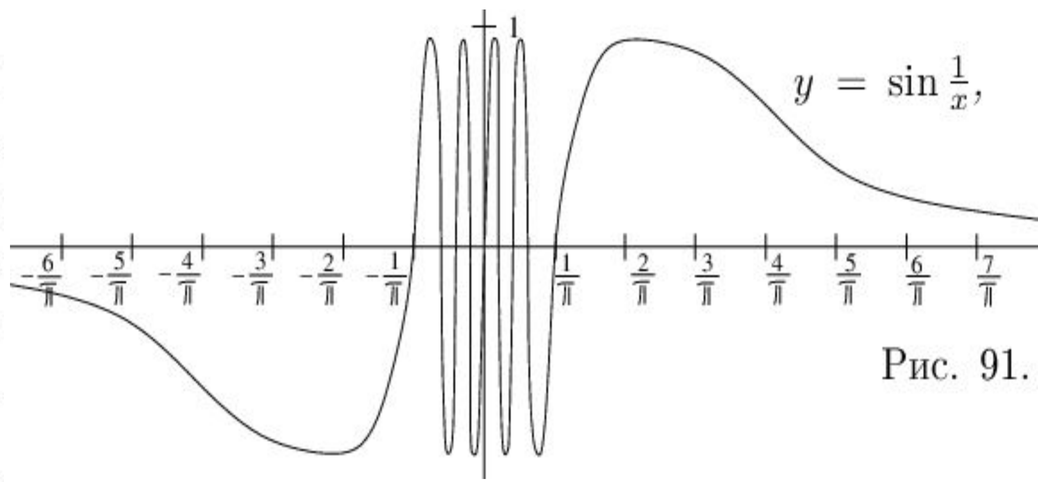

Рис. 91.

9.4. Свойства функций, непрерывных на сегменте

Определение 9.7. *Функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках этого сегмента, а на концах сегмента (в точках a и b) непрерывна соответственно справа и слева.*

Теорема 9.3. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она достигает на этом сегменте своего наибольшего и(или) наименьшего значения.*

Простым доказательством этой теоремы является геометрическая иллюстрация функции $y = f(x)$ на рисунке 92. Непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция достигает наименьшего своего значения в точке $x = x_1 = a$, а наибольшего значения в точке x_2.

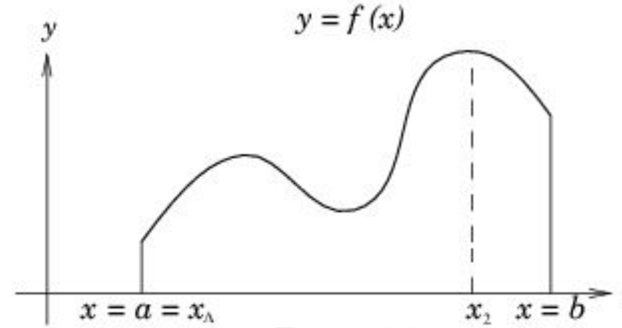

Рис. 92.

Следствие. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она ограничена на этом сегменте.

Действительно, если по теореме 9.3 функция достигает на сегменте наибольшего M и наименьшего m значений, то имеет место неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$ для всех значений функции на рассматриваемом сегменте. Т. е. $|f(x)| \leqslant M$ и, следовательно, функция $y = f(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$.

Теорема 9.4. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и на её концах принимает значения разных знаков, то внутри этого сегмента найдется, по крайней мере, одна точка C, в которой функция равна нулю.*

Геометрический смысл теоремы заключается в следующем: если точки графика функции $y = f(x)$, соответствующие концам сегмента $[a, b]$, лежат по разные стороны от оси OX, то этот график хотя бы в одной точке сегмента пересекает ось OX. На данном рисунке 93 это три точки x_1, x_2, x_3.

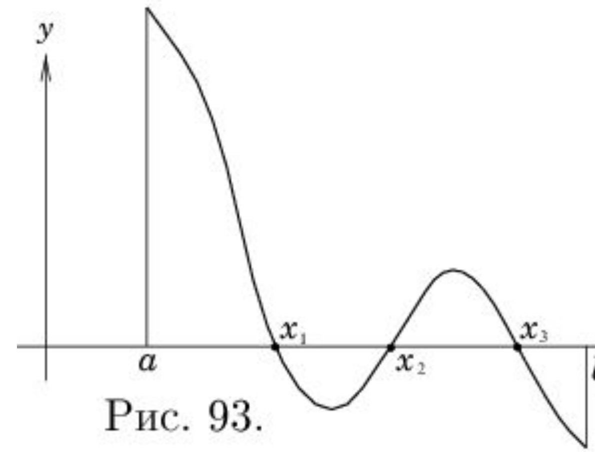

Рис. 93.

Теорема 9.5. *(О промежуточных значениях функции.) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то*

Из графика на рисунке 94 видно, что непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно проходит через все промежуточные значения.

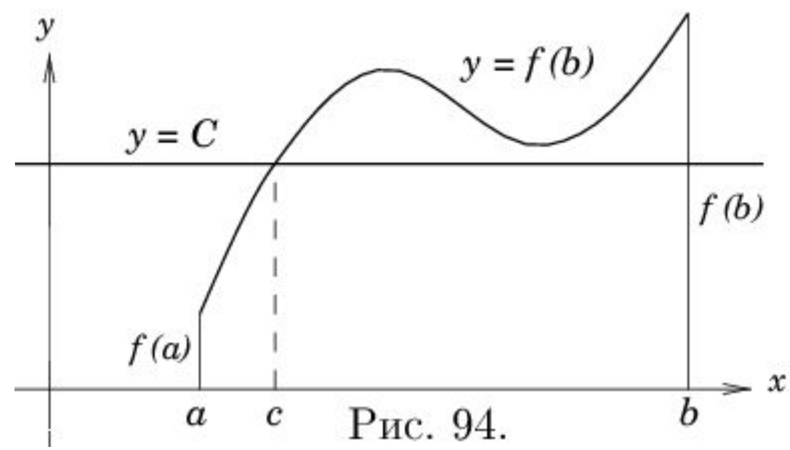

Рис. 94.

Теорема 9.6. *(О непрерывности обратной функции.) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и возрастает (убывает) на этом сегменте, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ на соответствующем сегменте оси OY существует и является также непрерывной возрастающей (убывающей) функцией.*

Примеры из практического занятия 9

Исследовать на непрерывность функцию $y = \dfrac{1+x^3}{1+x}$.

Р е ш е н и е: В точке $x = -1$ функция не определена, так как, выполнив подстановку, получаем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. В других точках дробь можно сократить на $(1+x)$, так как в них $1 + x \neq 0$. Легко видеть, что односторонние пределы слева и справа в точке $x = -1$ равны между собой и их можно вычислить:

$$\lim_{x\to -1-0} y = \lim_{x\to -1+0} y = \lim_{x\to -1+0} \frac{1+x^3}{1+x} =$$

$$= \lim_{x\to -1+0} \frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x} = \lim_{x\to -1+0} (1-x+x^2) = 1+1+1 = 3.$$

Таким образом, при $x = -1$ данная функция имеет устранимый разрыв. Он будет устранен, если положить, что при $x = -1 \Rightarrow y = \dfrac{1+x^3}{1+x} = 3$.

Исследовать на непрерывность функцию $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}$ (*рис.* 95).

Р е ш е н и е: Вычислим односторонние пределы функции в точке её разрыва $x = 4$.

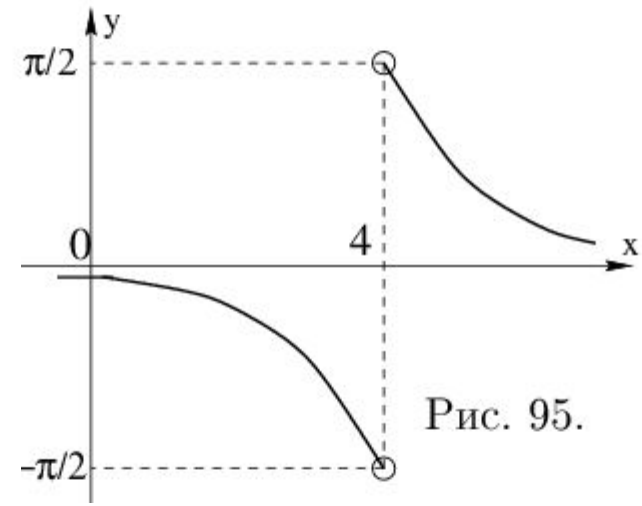

Рис. 95.

Предел слева – $\lim\limits_{x\to 4-0}(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Предел справа – $\lim\limits_{x\to 4+0}(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \dfrac{\pi}{2}$.

Пределы слева и справа существуют, но не равны, следовательно, точка $x = 4$ для данной функции – точка разрыва I рода.

38.1. Предел функции двух переменных

При рассмотрении предела функции одной переменной (часть I курса) было введено понятие δ-окрестности точки x_0 – интервал с центром в точке x_0 вида $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Введем аналогичное понятие для функции двух переменных.

Определение 38.1. *δ-окрестностью точки $P_0(x_0; y_0)$ называется внутренняя часть круга с центром в этой точке радиуса δ:*

$$\delta(P_0) = \left\{ P(x; y) \middle| \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \right\}.$$

Любая точка P этой δ-окрестности находится от точки P_0 на расстоянии меньшем δ.

Определение 38.2. *Число b называется пределом функции двух переменных или двойным пределом функции $z = f(x; y)$ при $P \to P_0$, если для любого числа ε найдется такая δ-окрестность точки $P_0(x_0; y_0)$, что для любой точки $P(x; y)$ этой окрестности, за исключением, быть может, точки P_0, будет выполнено неравенство:*

$$|f(x; y) - b| < \varepsilon.$$

При этом записывают:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = b \quad \textit{или} \quad \lim_{P \to P_0} f(P) = b.$$

Символическая запись определения 38.2 $\lim_{P \to P_0} f(P) = b$:

$\exists(\varepsilon > 0)\ \forall(\delta(P_0))\exists(P \in \delta(P_0),$ м.б.кр. $P = P_0) \Rightarrow |f(P) - b| < \varepsilon.$

Для двойного предела справедливы все свойства предела функции одного переменного: предел суммы, разности, произведения равен соответственно сумме, разности, произведению пределов, если каждый из них существует; предел частного равен частному пределов, если каждый из них существует и предел знаменателя не равен нулю; постоянный множитель можно выносить за знак предела и т.д. Из определений (38.1) и (38.2) следует, что $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = b \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta\to 0} f(x;y) = b$, где $\delta = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ – расстояние между точками P и P_0. Поэтому для вычисления пределов функции двух переменных мы будем пользоваться равносильным определением (38.3)

Определение 38.3. *Число b называется пределом функции двух переменных или двойным пределом функции $z = f(x;y)$ при $P \to P_0$, если функция определена в некоторой окрестности точки P_0 за исключением, быть может, точки P_0 и $\lim\limits_{\delta\to 0} f(x;y) = b$, где*

$\delta = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

Пример 38.1. *Найти* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$.

Р е ш е н и е: В данном примере $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $P_0(0;0) \Rightarrow$ $\Rightarrow \delta = \sqrt{x^2+y^2}$. Таким образом:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} = \lim_{\delta\to 0} \frac{\delta^2}{\sqrt{\delta^2+4}-2} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \frac{\delta^2\left(\sqrt{\delta^2+4}+2\right)}{\delta^2+4-4} = \lim_{\delta\to 0}\left(\sqrt{\delta^2+4}+2\right) = 4.$$

В данном примере функция $\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$ не определена в точке $P_0(0;0)$, но имеет предел при $P \to P_0$.

Заметим, что двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)$ при одновременном стремлении обоих аргументов не обязательно совпадает с повторными пределами

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x;y)\right) \qquad \text{и} \qquad \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x;y)\right),$$

которые не являются новыми понятиями, а вычисляются последовательно как обычные пределы функции одной переменной.

Однако существует теорема, которая позволяет заменять двойной предел функции двух переменных повторным пределом при достаточно широких предположениях.

Теорема 38.1. *Если существует* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)$ *и при* $\forall y \in \delta$ *окрестности* y_0, $y \neq y_0$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x;y)$, *а при* $\forall x \in \delta$ *окрестности* x_0, $x \neq x_0$, $\exists \lim\limits_{y\to y_0} f(x;y)$, *то* $\exists \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x;y)$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x;y)$ *и* $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x;y) = \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x;y) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)$.

Пример 38.2. *В условиях примера (38.1) вычислить повторные пределы.*

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{\sqrt{y^2+4}-2} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y^2\left(\sqrt{y^2+4}+2\right)}{y^2+4-4} = \lim_{y\to 0}\left(\sqrt{y^2+4}+2\right) = 4.$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} = 4.$$

Для функций одной переменной $y = f(x)$ были введены односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0}$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0}$ и отмечалось, что для существования $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ они должны быть равны. Для функции 2^x переменных $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)$ существует, если он не зависит от способа стремления точки $P(x;y)$ к точке $P_0(x_0;y_0)$.

Пример 38.3. *Найти* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Р е ш е н и е: Пусть $y = \lambda x$, т.е. подход к началу координат совершается вдоль прямых $y = \lambda x$, тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-\lambda^2x^2}{x^2+\lambda^2x^2} = \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$ зависит от λ и, следовательно, не существует.

Определение 38.4. *Функция $f(x;y)$ называется бесконечно малой при $P \to P_0$, если её двойной предел равен нулю.*

Определение предела естественным образом распространяется на случай функции 3-х и более переменных.

38.2. Непрерывность функции нескольких переменных

Определение 38.5. *Функция n переменных $u = f(P)$ называется непрерывной в точке P_0, если функция определена в этой точке и в некоторой её окрестности и $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.*

Определение 38.6. *Точка P_0, в которой функция $u = f(P)$ непрерывна, называется точкой непрерывности этой функции.*

Свойства непрерывных функций сформулируем в виде теоремы.

Теорема 38.2. *Если функция n переменных $f_1(P)$ и $f_2(P)$ непрерывны в точке P_0, то в этой же точке непрерывны и их сумма $f_1(P)+f_2(P)$, разность $f_1(P)-f_2(P)$, произведение $f_1(P) \cdot f_2(P)$ и частное $f_1(P)/f_2(P)$, если $f_2(P_0) \neq 0$.*

На основании этой теоремы легко устанавливается непрерывность многочлена от двух переменных при любом их значении и непрерывность рациональной функции во всех точках плоскости, в которых знаменатель не равен нулю.

Определение 38.7. *Точка P_0 называется точкой разрыва функции $f(P)$, если она принадлежит области определения этой функции или её границе и не является точкой непрерывности.*

Пример 38.4. *Найти точки разрыва функции* $z = \dfrac{1}{x - y + 1}$.

Р е ш е н и е: Функция определена и непрерывна всюду, кроме точек с координатами, удовлетворяющими уравнению: $x - y + 1 = 0$. Это уравнение прямой $y = x + 1$, являющейся границей области определения функции. Каждая точка этой прямой есть точка разрыва.
Ответ: точки разрыва образуют прямую $y = x + 1$.

38.3. Функции непрерывные в ограниченной замкнутой области

Ранее были рассмотрены свойства функции одной переменной, непрерывной на отрезке. Аналогичными свойствами обладают функции нескольких переменных, непрерывные в ограниченной замкнутой области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38.8. *Функция $z = f(P)$ называется непрерывной в ограниченной замкнутой области D, если она непрерывна в каждой точке этой области. При этом для непрерывности $f(P)$ в граничной точке P_0 траекторию движения точки P при стремлении $P \to P_0$ выбираем внутри D.*

ТЕОРЕМА 38.3. *Если функция $z = f(P)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D, то она в этой области:*

(1) *ограничена:* $\exists\ N > 0 :\ |f(P)| \leqslant N$ *для* $\forall P \in D$;

(2) *достигает своего наименьшего m и наибольшего M значений:* $\exists\ P_1 \in D :\ f(P_1) = m$ *и* $\exists\ P_2 \in D :\ f(P_2) = M$;

(3) *любое значение между m и M принимает хотя бы в одной точке области: для* $\forall\ c \in [m; M]\ \exists\ P_0 : f(P_0) = c$.

Пример 38.5. *Функция* $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ *определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области* $D = \{(x; y)|x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ *– круге с центром в точке* $O(0; 0)$ *и радиуса 1.*

Она ограничена: $|\sqrt{1 - x^2 - y^2}| \leqslant 1$ при $x^2 + y^2 \leqslant 1$.
Наименьшее значение $m = 0$ достигается в точках окружности $x^2 + y^2 = 1$ – на границе области, наибольшее значение $M = 1$ достигается в начале координат – внутренней точке области.
Функция принимает любое значение $0 \leqslant c \leqslant 1$ в точках окружности $c = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 - c^2$. Графиком функции является верхняя полусфера, изображенная на рис. 25.

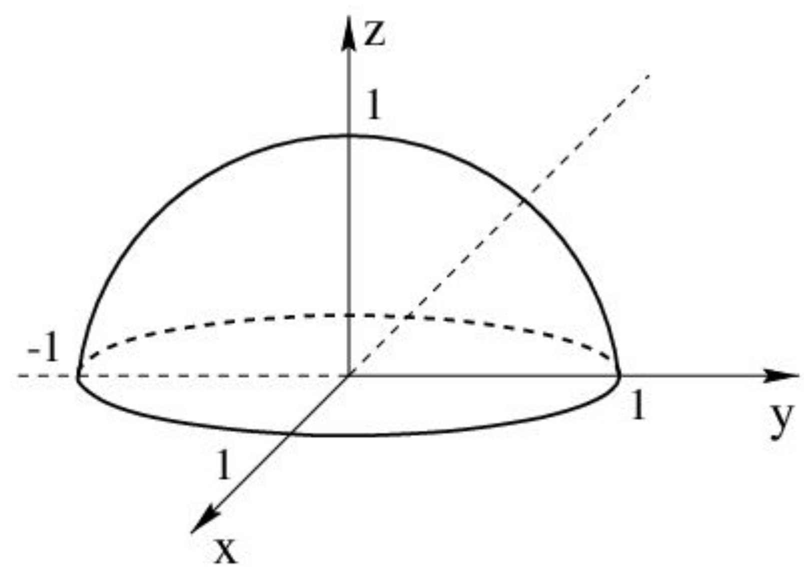

Рис. 25. *График функции* $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Спасибо за внимание