Лекция 5 Непрерывные функции одной и двух переменных.

Литература.

В.Г. Зубков, В.А.Ляховский, А.И.Мартыненко, В.Б.Миносцев. Курс математики для технических высших учебных заведений Учебное пособие часть I Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А. Пушкаря. 2012г. Лекция 9.

В.А.Ляховский, А.И.Мартыненко, В.Б.Миносцев. Курс математики для технических высших учебных заведений Учебное пособие часть II Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А. Пушкаря. 2012г. Лекция 38.

Непрерывные функции, действия над непрерывными функциями, точки разрыва и их классификация, свойства функций, непрерывных на сегменте.

Предел функции двух переменных. Точки и линии разрыва. Функции непрерывные в ограниченной замкнутой области.

9.1. Непрерывные функции

Определение 9.1. Функция y = f(x) называется непрерывной в точке x_0 , если:

- функция определена в точке x_0 и в некоторой её окрестности, содержащей эту точку;
- функция имеет предел при $x \to x_0$;
- предел функции при $x \to x_0$ равен значению функции в точке x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{9.1}$$

Если в точке x_0 функция непрерывна, то точка x_0 называется точкой непрерывности функции.

Решение: Чтобы доказать, что функция $y = e^x$ непрерывна в точке x = 1, необходимо проверить выполнение трёх следующих условий (определение непрерывности):

- функция $y = e^x$ определена в точке $x = 1 \Rightarrow f(1) = e$;
- существует $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} e^x = e;$
- этот предел равен значению функции в точке x = 1:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = e.$$

Таким образом, доказано, что функция $y = e^x$ непрерывна в точке x = 1.

Замечание 9.1. Формулу (9.1) можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x), \tag{9.2}$$

 $ma\kappa \ \kappa a\kappa \ \lim \ x = x_0$. Это значит, что при нахождении предела непрерывной функции можно переходить к пределу под знаком функции.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{9.1}$$

Введем понятие непрерывности функции в точке x_0 справа и слева. Если существует $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной в точке x_0 слева. Аналогично определяется непрерывность функции справа.

Так как $\Delta x = x - x_0$, а $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, то условие (9.1) равносильно следующему:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0 \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Определение 9.2. Функция y = f(x) называется непрерывной в точке x_0 , если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{9.3}$$

ПРИМЕР 9.2. Показать, что функция $y = x^3$ непрерывна для любого значения аргумента x.

Решение: Найдем приращение функции Δy .

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Используя теоремы о пределе суммы и произведения функции, получим $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3) = 0.$

Следовательно, функция $y = x^3$ непрерывна при $-\infty < x < +\infty$.

9.2. Действия над непрерывными функциями

ТЕОРЕМА 9.1. (Непрерывность суммы, произведения и частного непрерывных функций.) Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны в точке x_0 , то их сумма и произведение также непрерывны в точке x_0 . Если, кроме того, знаменатель в рассматриваемой точке не равен нулю, то частное непрерывных функций есть функция непрерывная.

Можно строго доказать, что все основные элементарные функции непрерывны при всех значениях x, для которых они определены.

Например, степенная $y=x^n$, показательная $y=a^x$, тригонометрические $y=\sin x$ и $y=\cos x$ функции непрерывны на всей числовой оси $(x\in R)$, логарифмическая функция $y=\log_a x$ непрерывна при x>0, а тригонометрическая $y=\operatorname{tg} x$ непрерывна в каждом из интервалов $(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi)$ и терпит разрыв II рода в точках $x_k=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0;\pm 1;\pm 2;\ldots)$.

ТЕОРЕМА 9.2. (Непрерывность сложной функции.) Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция y = f(u) непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0 .

Отсюда следует, что элементарные функции непрерывны во всех точках, в которых они определены. И, следовательно, при исследовании на непрерывность элементарных функций, необходимо исследовать поведение функции лишь в окрестности точек, в которых они неопределены.

В заключение этого раздела рассмотрим два предела, которые нам понадобятся в дальнейшем.

ПРИМЕР 9.3. Вычислить $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$.

Р е ш е н и е: Заметим, что при $x \to 0$ числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю, т.е. имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Выполним преобразование

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} \log_a(1+x) \right] = \lim_{x \to 0} \log_a \left(1+x \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Так как данная логарифмическая функция непрерывна в окрестности точки x=0, то можно перейти к пределу под знаком функции

$$\left(\lim_{x \to x_o} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_o} x\right)\right). \qquad \qquad \lim_{x \to 0} \log_a \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = \log_a \left[\lim_{x \to 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}}\right],$$

но $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ – второй замечательный предел.

Следовательно,
$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e. \tag{9.4}$$

В частности, при
$$a = e$$
 $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln e = 1$ (9.5)

Таким образом, $y = \ln(1+x)$ и y = x – эквивалентные бесконечно малые функции при $x \to 0$. (9.5) принято называть третьим замечательным пределом.

ПРИМЕР 9.4. $Haŭmu \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$.

Решение: Здесь мы имеем дело с неопределённостью вида $\frac{0}{0}$.

Для нахождения предела сделаем замену переменной, положив $a^x-1=t$. Тогда $x=\log_a(t+1)$. При $x\to 0$ также и $t\to 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\log_a(t+1)} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\frac{\log_a(t+1)}{t}} = \frac{1}{\lim_{t \to 0} \frac{\log_a(t+1)}{t}}.$$

Так как на основании результата, полученного в предыдущем примере,

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log_a(1+t)}{t} = \log_a e, \text{ TO} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a. \tag{9.6}$$

В частности, если a = e, имеем

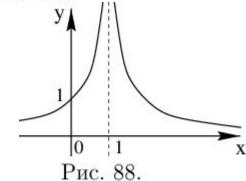
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1,$$

т.е. $y = e^x - 1$ и y = x — эквивалентные бесконечно малые функции при $x \to 0$.

9.3. Точки разрыва функции и их классификация

Определение 9.3. Точка x_0 называется точкой разрыва функции y = f(x), если она принадлежит области определения функции или её границе и не является точкой непрерывности.

Так, например, функция $y = \frac{1}{(1-x)^2}$ (рис. 88) терпит разрыв при x=1. Эта функция не определена в точке x=1, и не существует предела функции в этой точке.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.4. Точка разрыва x_0 функции y = f(x) называется точкой устранимого разрыва, если существуют оба односторонних предела в точке x_0 и они равны, т. е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

ПРИМЕР 9.5. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{\sin x}{x}$

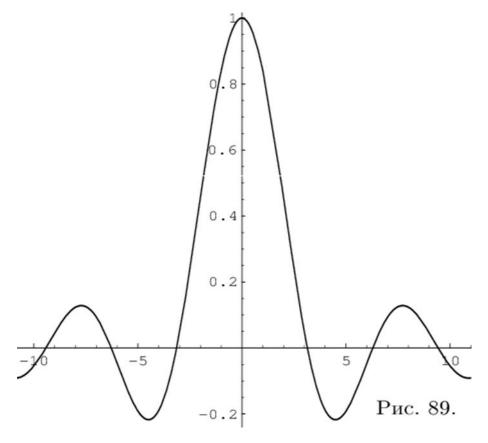
Решение: Функция $\frac{\sin x}{x}$ не определена в точке x=0. Точка x=0 является точкой устранимого разрыва, так как при $x\to 0$ существуют пределы справа и слева и они равны:

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1, \ \lim_{x \to 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Если доопределить функцию $\frac{\sin x}{x}$ в точке x=0, полагая f(0)=1, то получим уже непрерывную функцию, определённую так:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$
, если $x \neq 0$; $f(0) = 1$.

Доопределив функцию в точке x = 0, мы устранили разрыв.

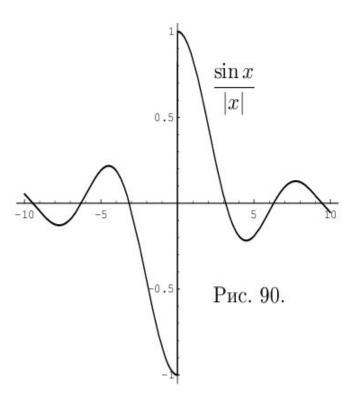


Определение 9.5. Если в точке x_0 односторонние пределы слева и справа существуют, но не равны, точка x_0 называется точкой разрыва I рода.

ПРИМЕР 9.6. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{\sin x}{|x|}$

Решение: В точке x=0 функция терпит разрыв І-го рода, так как односторонние пределы существуют в этой точке, но не равны:

предел слева
$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{-x} = -1,$$
 предел справа $\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$



Определение 9.6. Точки разрыва, не являющиеся точками разрыва I рода, называются точками разрыва II рода.

В точках разрыва II рода не существует хотя бы один из односторонних пределов. Функция $y=\frac{1}{(1-x)^2}$, представленная на рис. 88, не имеет ни левого, ни правого конечного предела в точке x=1. Следовательно, для данной функции x=1 является точкой разрыва II рода.

ПРИМЕР 9.7. Исследовать на непрерывность функцию $y = \sin \frac{1}{x}$.

Решение:

Функция $y = \sin \frac{1}{x}$ определена для всех значений x, кроме x = 0. В этой точке она имеет разрыв. Точка x = 0 есть точка разрыва II рода, так как при $x \to 0$ как справа, так и слева, функция $\sin \frac{1}{x}$, колеблясь между —1 и 1, не приближается ни к какому числовому значению. График её приведен на рис. 91.

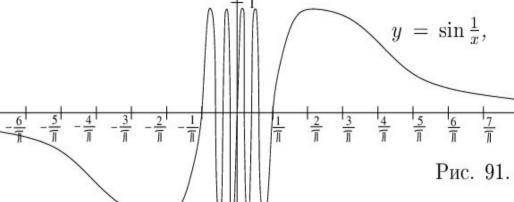


Рис. 92.

9.4. Свойства функций, непрерывных на сегменте

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.7. Функция y = f(x) непрерывна на сегменте [a,b], если она непрерывна во всех внутренних точках этого сегмента, а на концах сегмента (в точках а и b) непрерывна соответственно справа и слева.

ТЕОРЕМА 9.3. Если функция y = f(x) непрерывна на сегменте [a,b], то она достигает на этом сегменте своего наибольшего $u(u \wedge u)$ наименьшего значения.

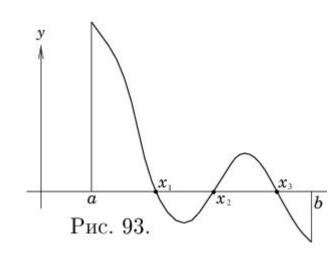
Простым доказательством этой теоремы является геометрическая иллюстрация функции y = f(x) на рисунке 92. Непрерывная на сегменте [a,b] функция достигает наименьшего своего значения в точке $x = x_1 = a$, а наибольшего значения в точке x_2 .

Следствие. Если функция y = f(x) непрерывна на сегменте [a, b], то она ограничена на этом сегменте.

Действительно, если по теореме 9.3 функция достигает на сегменте наибольшего M и наименьшего m значений, то имеет место неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$ для всех значений функции на рассматриваемом сегменте. Т. е. $|f(x)| \leqslant M$ и, следовательно, функция y = f(x) ограничена на сегменте [a,b].

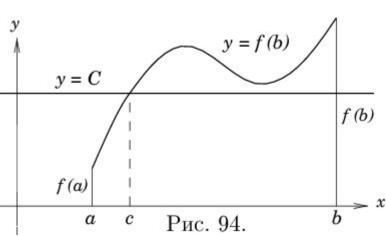
ТЕОРЕМА 9.4. Если функция y = f(x) непрерывна на сегменте [a,b] и на её концах принимает значения разных знаков, то внутри этого сегмента найдется, по крайней мере, одна точка C, в которой функция равна нулю.

Геометрический смысл теоремы заключается в следующем: если точки графика функции y = f(x), соответствующие концам сегмента [a,b], лежат по разные стороны от оси OX, то этот график хотя бы в одной точке сегмента пересекает ось OX. На данном рисунке 93 это три точки x_1, x_2, x_3 .



ТЕОРЕМА 9.5. (О промежуточных значениях функции.) Если функция y = f(x) непрерывна на сегменте [a,b] и f(a) = A и f(b) = B, то

Из графика на рисунке 94 видно, что непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно проходит через все промежуточные значения.



ТЕОРЕМА 9.6. (О непрерывности обратной функции.) Если функция y = f(x) непрерывна на сегменте [a,b] и возрастает (убывает) на этом сегменте, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ на соответствующем сегменте оси ОҮ существует и является также непрерывной возрастающей (убывающей) функцией.

Примеры из практического занятия 9

Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{1+x^3}{1+x}$.

Решение: В точке x=-1 функция не определена, так как, выполнив подстановку, получаем неопределенность $\frac{0}{0}$. В других точках дробь можно сократить на (1+x), так как в них $1+x\neq 0$. Легко видеть, что односторонние пределы слева и справа в точке x=-1 равны между собой и их можно вычислить:

$$\lim_{x \to -1-0} y = \lim_{x \to -1+0} y = \lim_{x \to -1+0} \frac{1+x^3}{1+x} =$$

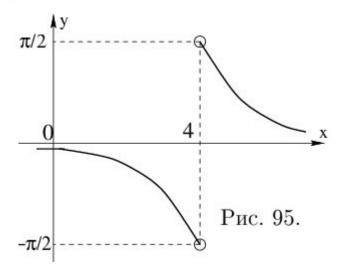
$$= \lim_{x \to -1+0} \frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x} = \lim_{x \to -1+0} (1-x+x^2) = 1+1+1=3.$$

Таким образом, при x=-1 данная функция имеет устранимый разрыв. Он будет устранен, если положить, что при $x=-1 \Rightarrow y=\frac{1+x^3}{1+x}=3$.

Исследовать на непрерывность функцию $y = \arctan \frac{1}{x-4}$

P е ш е н и е: Вычислим односторонние пределы функции в точке её разрыва x=4.

Предел слева –
$$\lim_{x\to 4-0}(\arctan\frac{1}{x-4})=\arctan(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$$
. Предел справа – $\lim_{x\to 4+0}(\arctan\frac{1}{x-4})=\arctan(+\infty)=\frac{\pi}{2}$. $-\pi/2$



Пределы слева и справа существуют, но не равны, следовательно, точка x=4 для данной функции – точка разрыва I рода.

При рассмотрении предела функции одной переменной (часть I курса) было введено понятие δ -окрестности точки x_0 – интервал с центром в точке x_0 вида $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Введем аналогичное понятие для функции двух переменных.

Определение 38.1. δ -окрестностью точки $P_0(x_0; y_0)$ называется внутренняя часть круга с центром в этой точке радиуса δ :

$$\delta(P_0) = \left\{ P(x;y) | \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \right\}.$$

Любая точка P этой δ -окрестности находится от точки P_0 на расстоянии меньшем δ .

Определение 38.2. Число b называется пределом функции двух переменных или двойным пределом функции z=f(x;y) при $P\to P_0$, если для любого числа ε найдется такая δ -окрестность точки $P_0(x_0;y_0)$, что для любой точки P(x;y) этой окрестности, за исключением, быть может, точки P_0 , будет выполнено неравенство:

$$|f(x;y) - b| < \varepsilon.$$

При этом записывают:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = b \quad u \land u \quad \lim_{P \to P_0} f(P) = b.$$

Символическая запись определения 38.2 $\lim_{P\to P_0} f(P) = b$:

$$\exists (\varepsilon > 0) \ \forall (\delta(P_0)) \exists (P \in \delta(P_0), \text{ м.б.кр. } P = P_0) \Rightarrow |f(P) - b| < \varepsilon.$$

Для двойного предела справедливы все свойства предела функции одного переменного: предел суммы, разности, произведения равен соответственно сумме, разности, произведению пределов, если каждый из них существует; предел частного равен частному пределов, если каждый из них существует и предел знаменателя не равен нулю; постоянный множитель можно выносить за знак предела и т.д. Из определений (38.1) и (38.2) следует, что $\lim_{x \to x_0} f(x;y) = b \Leftrightarrow$

 $\lim_{\delta \to 0} f(x;y) = b$, где $\delta = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ – расстояние между точками Pи P_0 . Поэтому для вычисления пределов функции двух переменных мы будем пользоваться равносильным определением (38.3)

Определение 38.3. Число в называется пределом функции двух переменных или двойным пределом функции z = f(x;y) при $P \to P_0$, если функция определена в некоторой окрестности точки P_0 за исключением, быть может, точки P_0 и $\lim_{\delta \to 0} f(x; y) = b$, где $\delta = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

$$\delta = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

ПРИМЕР 38.1.
$$Haŭmu \lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$$
.

Решение: В данном примере $x_0 = 0, y_0 = 0, P_0(0; 0) \Rightarrow \delta = \sqrt{x^2 + y^2}$. Таким образом:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\delta^2}{\sqrt{\delta^2 + 4} - 2} =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{\delta^2 \left(\sqrt{\delta^2 + 4} + 2\right)}{\delta^2 + 4 - 4} = \lim_{\delta \to 0} \left(\sqrt{\delta^2 + 4} + 2\right) = 4.$$

В данном примере функция $\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$ не определена в точке $P_0(0;0)$, но имеет предел при $P\to P_0$.

Заметим, что двойной предел $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y)$ при одновременном стремлении обоих аргументов не обязательно совпадает с повторными пределами

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x; y) \right) \qquad \text{if} \qquad \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x; y) \right),$$

которые не являются новыми понятиями, а вычисляются последовательно как обычные пределы функции одной переменной.

Однако существует теорема, которая позволяет заменять двойной предел функции двух переменных повторным пределом при достаточно широких предположениях.

ТЕОРЕМА 38.1. Если существует $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y)$ и при $\forall y \in \delta$ окрестности

 $y_0, y \neq y_0, \exists \lim_{x \to x_0} f(x; y), a npu \forall x \in \delta \text{ окрестности } x_0, x \neq x_0,$

 $\exists \lim_{y \to y_0} f(x;y), \ mo \ \exists \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x;y), \ \exists \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x;y) \ u$ $\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x;y) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x;y) = \lim_{x \to x_0} f(x;y).$

ПРИМЕР 38.2. В условиях примера (38.1) вычислить повторные пределы.

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} = \lim_{y \to 0} \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + 4} - 2} = \lim_{y \to 0} \frac{y^2 \left(\sqrt{y^2 + 4} + 2\right)}{y^2 + 4 - 4} = \lim_{y \to 0} \left(\sqrt{y^2 + 4} + 2\right) = 4.$$

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} = 4.$$

Для функций одной переменной y = f(x) были введены односторонние пределы $\lim_{x \to x_0 \to 0}$ и $\lim_{x \to x_0 + 0}$ и отмечалось, что для существования $\lim_{x \to x_0} f(x)$ они должны быть равны. Для функции 2^x переменных $\lim_{x \to 0 \ y \to 0} f(x;y)$ существует, если он не зависит от способа стремления точки P(x;y) к точке $P_0(x_0;y_0)$.

ПРИМЕР 38.3.
$$Haŭmu \lim_{\substack{x \to 0 \ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$
.

Решение: Пусть $y=\lambda x$, т.е. подход к началу координат совершается вдоль прямых $y=\lambda x$, тогда $\lim_{\stackrel{x\to 0}{y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\lambda^2x^2}{x^2+\lambda^2x^2}=\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$ зависит от λ и, следовательно, не существует.

Определение 38.4. Функция f(x;y) называется бесконечно малой при $P \to P_0$, если её двойной предел равен нулю.

Определение предела естественным образом распространяется на случай функции 3-х и более переменных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38.5. Функция п переменных u = f(P) называется непрерывной в точке P_0 , если функция определена в этой точке u в некоторой её окрестности $u\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Определение 38.6. Точка P_0 , в которой функция u = f(P) непрерывна, называется точкой непрерывности этой функции.

Свойства непрерывных функций сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 38.2. Если функция п переменных $f_1(P)$ и $f_2(P)$ непрерывны в точке P_0 , то в этой же точке непрерывны и их сумма $f_1(P)+f_2(P)$, разность $f_1(P)-f_2(P)$, произведение $f_1(P)\cdot f_2(P)$ и частное $f_1(P)/f_2(P)$, если $f_2(P_0)\neq 0$.

На основании этой теоремы легко устанавливается непрерывность многочлена от двух переменных при любом их значении и непрерывность рациональной функции во всех точках плоскости, в которых знаменатель не равен нулю.

Определение 38.7. Точка P_0 называется точкой разрыва функции f(P), если она принадлежит области определения этой функции или её границе и не является точкой непрерывности.

ПРИМЕР 38.4. Найти точки разрыва функции $z = \frac{1}{x - y + 1}$.

 ${\rm P}$ е ш е н и е: Функция определена и непрерывна всюду, кроме точек с координатами, удовлетворяющими уравнению: x-y+1=0. Это уравнение прямой y=x+1, являющейся границей области определения функции. Каждая точка этой прямой есть точка разрыва.

Ответ: точки разрыва образуют прямую y = x + 1.

Ранее были рассмотрены свойства функции одной переменной, непрерывной на отрезке. Аналогичными свойствами обладают функции нескольких переменных, непрерывные в ограниченной замкнутой области.

Определение 38.8. Функция z = f(P) называется непрерывной в ограниченной замкнутой области D, если она непрерывна в каждой точке этой области. При этом для непрерывности f(P) в граничной точке P_0 траекторию движения точки P при стремлении $P \to P_0$ выбираем внутри D.

ТЕОРЕМА 38.3. Если функция z = f(P) непрерывна в ограниченной замкнутой области D, то она в этой области:

- (1) ограничена: $\exists N > 0 : |f(P)| \leq N$ для $\forall P \in D$;
- (2) достигает своего наименьшего m и наибольшего M значений: $\exists P_1 \in D : f(P_1) = m \ u \ \exists P_2 \in D : f(P_2) = M;$
- (3) любое значение между m и M принимает хотя бы в одной точке области: для $\forall c \in [m; M] \exists P_0 : f(P_0) = c$.

ПРИМЕР 38.5. Функция $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ определена и непрерывна в ограни- 25 ченной замкнутой области $D = \{(x;y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ – круге с центром в точке O(0;0) u paduyca 1.

Она ограничена: $|\sqrt{1-x^2-y^2}| \le 1$ при $x^2+y^2 \le 1$.

Наименьшее значение m=0 достигается в точках окружности $x^2+y^2=1$ – на границе области, наибольшее значение M=1 достигается в начале координат – внутренней точке области.

Функция принимает любое значение $0 \le c \le 1$ в точках окружности $c = \sqrt{1-x^2-y^2} \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1-c^2$. Графиком функции является верхняя полусфера, изображенная на рис. 25.

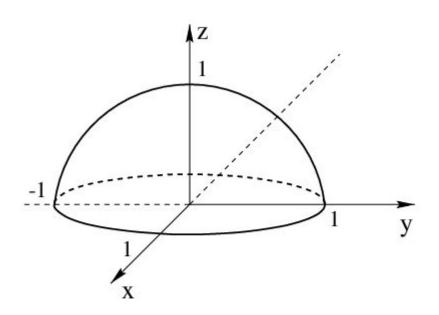


Рис. 25. График функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Спасибо за внимание