Подготовка к олимпиадам

Дробь

- Про данную дробь известно, что если ее числитель увеличить на $\frac{1}{2}$, то дробь станет равна $\frac{1}{2}$, а если числитель увеличить на 2, то дробь станет равна 1. Найдите эту дробь.

*
* $\frac{1}{3}$

* Какие предпоследние цифры могут быть у степеней тройки (степень больше или равна 3)?
* **Укажите сумму всех возможных вариантов предпоследней цифры степени тройки**
* **Укажите наименьшее возможное значение для предпоследней цифры степени тройки**

* 20
* 0

Борьба бобра с ослом

* Серёжа написал на доске в некотором порядке 2012 плюсов и 2013 минусов. Время от времени Леша подходит к доске, стирает любые два знака и пишет вместо них один, причем если он стер одинаковые знаки, то вместо них он пишет плюс, а если разные, то минус. После нескольких таких действий на доске остался только один знак. Какой это мог быть знак?

* минус

Куб

* Какие из правильных многоугольников могут являться сечениями куба?

* Сечением куба могут быть только равносторонний треугольник, квадрат и правильный шестиугольник (треугольник и квадрат получить легко, а шестиугольник получается в сечении плоскостью, проходящей через середины шести ребер куба - кстати, эта плоскость проходит через центр куба и перпендикулярна его диагонали).
* Больше шести сторон у сечения быть не может, так как у куба лишь шесть граней. А правильный пятиугольник не может получиться, так как стороны сечения образующиеся при пересечении плоскости сечения с противоположными гранями куба параллельны, а у правильного пятиугольника нет параллельных сторон.

* Решите в натуральных числах (a,b) уравнение
* НОК(a,b)–НОД(a,b)=$\frac{ab}{5}$.
* В ответ укажите a+b.
* Если решений несколько, укажите наибольшее значение a+b.

* 24

* На шахматной доске расположено несколько ладей. Ладьи атакуют друг друга, если стоят на одной линии (горизонтали или вертикали) и между ними нет других ладей. Для каждой ладьи посчитали количество атакованных ею ладей. Пусть m - наименьшее из найденных чисел. Ясно, что m - характеристика расстановки. Каково наибольшее возможное значение m, если рассматривать все возможные расстановки?

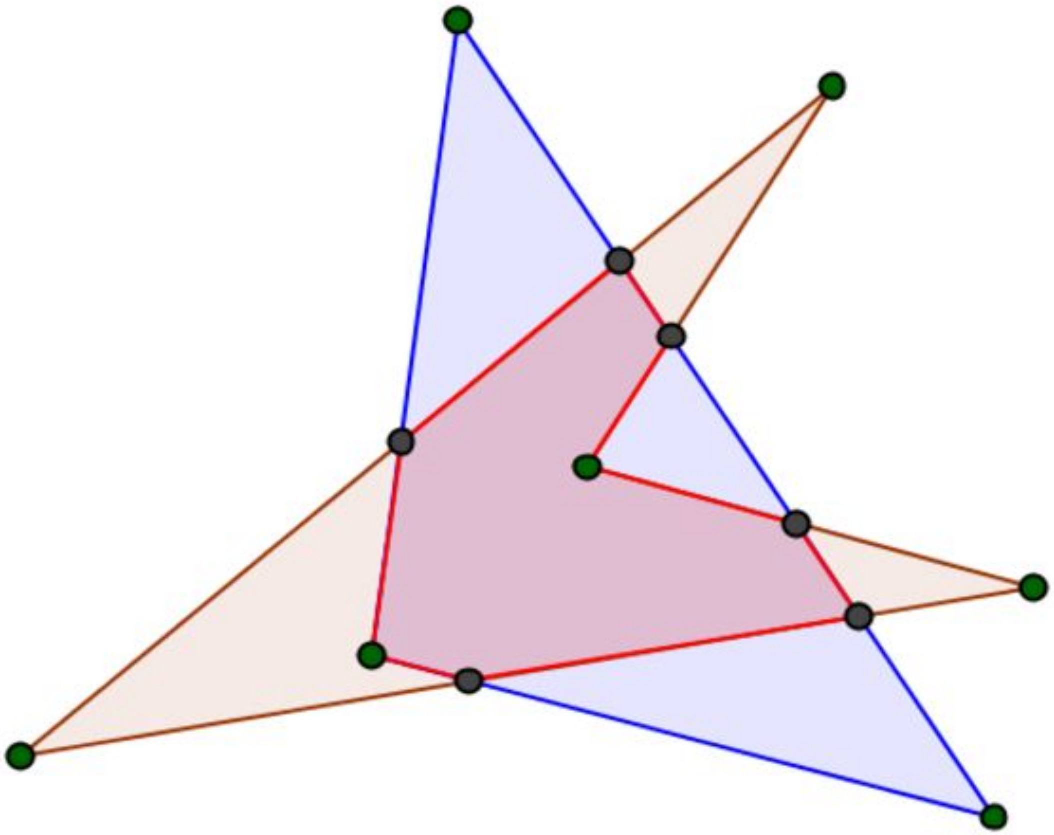
* Если на доске всего 4 ладьи, расположенные в вершинах прямоугольника, то каждая атакует ровно 2 других - для такой расстановки m=2. Докажем, что всегда есть ладья, которая атакует не более двух других.
* Рассмотрим самую левую вертикаль, содержащую хотя бы одну ладью. В этой вертикали выберем самую верхнюю ладью. Выше и левее этой ладьи других ладей нет, значит, она атакует не более двух других.
* (Заметим, что формулировка *крайняя в углу* недостаточно аккуратная, т.к. самая верхняя среди самых левых (выбранная нами) может не совпадать с самой левой среди самых верхних. Впрочем, такая, конечно, тоже атакует не более двух других.)

* В ряд лежат n монет. За ход разрешается брать одну или две рядом лежащие монеты. Проигрывает тот, кому нечего брать. При каких n у первого игрока есть выигрышная стратегия?

* Если n — нечетное, то пусть первый заберет центральную монету. Если же n — четное, то пусть первый заберет две центральных монеты. Тогда (в обоих случаях) у нас останется две одинаковые кучи монет. Теперь заметим, что по правилам игры мы не можем брать монеты из разных куч, поэтому можно применить симметричную стратегию (её может применить первый игрок). Эта стратегия такова: мы будем брать то же количество монет, которое взял второй игрок, на соответствующих симметричных позициях из другой кучи. Так как после нашего хода всегда получаются две кучи с одинаковым числом монет и симметричным расположением, а после хода второго количество монет в кучах разное, то при такой стратегии первый игрок победит.

Шутка

* Какое наибольшее число сторон может иметь многоугольник, являющийся пересечением четырехугольника и треугольника?



* Оценка. Докажем, что в пересечении не может образоваться многоугольник с 9 или больше сторонами. Заметим, что каждая сторона треугольника не может пересекать внутренность четырехугольника больше двух раз (т.е. на стороне треугольника не может быть больше двух непересекающихся «участков», которые лежат внутри четырехугольника), в этом несложно убедиться перебором случаев (два раза сторона треугольника может пересекать внутренность четырехугольника, см. на картинке выше на самую длинную сторону). Аналогично, каждая сторона четырехугольника может пересекать внутренность треугольника не более одного раза (в этом тоже можно убедить простым перебором). Тогда для того, чтобы у пересечения треугольника и четырехугольника было по крайней мере 9 сторон, необходимо, чтобы две стороны треугольника пересекали внутренность четырехугольника два раза. Но нетрудно убедиться, что такое невозможно (тоже перебор случаев, ниже есть рисунок одной из возможных ситуаций), т.к. в этом случае в пересечении треугольника и четырехугольника будут получаться два многоугольника. Т.е. наибольшее число сторон у многоугольника, который образовался в пересечении треугольника и четырехугольника, равно 8.

ЗАКРЫТО НА РЕМОНТ

* В некоторой стране 30 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый?

- Изначально было $\frac{30 \cdot 29}{2}$=435 дорог. Для того чтобы из каждого города можно было проехать в каждый достаточно оставить 29 дорог (например, все дороги ведущие из какого-то одного города). Поэтому можно закрыть 435–29=406 дорог.