Лекция № 5

Вероятностные характеристики огибающей и фазы узкополосногонормального процесса

При решении этой задачи будем исходить из введенного ранее представления узкополосного процесса

$$\xi(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

Поскольку $\xi(t)$ представляет собой нормальный процесс, сопряженное колебание $\hat{\xi}(t)$ будет также нормальным в силу линейности преобразования Гильберта.

Найдем взаимные корреляционные функции процессов $\xi(t)$ и $\hat{\xi}(t)$

$$M[\xi(t)\hat{\xi}(t_1)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{M[\xi(t)\xi(\tau)]}{t_1-\tau}d\tau,$$

$$M[\hat{\xi}(t)\xi(t_1)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{M[\xi(\tau)\xi(t_1)]}{t-\tau}d\tau,$$

что соответствует

$$B_{\xi\hat{\xi}}(t,t_1) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_{\xi}(t,\tau)}{t_1-\tau}d\tau, \qquad (5.1)$$

$$B_{\hat{\xi}\xi}(t,t_1) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_{\xi}(\tau,t_1)}{t-\tau}d\tau \qquad (5.2)$$

Для стационарного процесса

$$\square\square_{\square}\square\square\square, \square_1\square = \square\square_{\square}\square\square\square - \square_1\square = \square\square_{\square}\square\square_1 - \square\square\square.$$

Поэтому (1.2) принимает вид

$$\square\square_{\square}\square\square\square, \square_1\square = \frac{1}{\square}\square_{-\infty}^{\infty}\frac{\square\square_{\square}\square\square\square, \square_1\square}{\square - \square}\square\square\square = \frac{1}{\square}\square_{-\infty}^{\infty}\frac{\square\square_{\square}\square\square\square}{\square - \square_1 - \square}\square\square\square = \square\square_{\square}\square\square\square - \square_1\square = \square\square_{\square}\square\square\square.$$

Таким образом,

$$\square\square_{\square}\square\square\square = \frac{1}{\square}\square_{-\infty}^{\infty}\frac{\square\square_{\square}\square\square\square}{\square}\square\square\square. \qquad (5.3)$$

Из (1.3) вытекает, что при $\square = 0$

$$\square\square_{\square}\square 0\square = -\frac{1}{\square}\square_{-\infty}^{\infty}\frac{\square\square_{\square}\square\square\square}{\square}\square\square\square = 0$$

выражение для совместной плотности вероятности процессов □□□ и □□□ выражение

$$□_{□□}(□,□)□□□□ = \frac{1}{2□□□_□^2}□□□□\left(-\frac{1}{2}\frac{□^2+□^2}{□_□^2}\right)□□□□, \tag{5.4}$$

как для совокупности двух независимых нормальных величин □ и □.

Из математики известно, что отношение элементарных площадок

$$\frac{□□_{□,□}}{□□_{□,□}} = \frac{□□□□}{□□□□} = □,$$

где □ – якобиан преобразования.

находим:

$$□ = \begin{vmatrix} \frac{□□}{□□} & \frac{□□}{□□} \\ \frac{□□}{□□} & \frac{□□}{□□} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos□□_0□+□(□) & -□\sin□□_0□+□□□ \\ \sin□□_0□+□(□) & □\cos□□_0□+□(□) \end{vmatrix} = □, \tag{5.5}$$

Осуществляя в (1.4) замену

$$□^2 + □^2 = □^2 \text{ и } □□□□ = □□□□□,$$

получаем

$$□_{□,□}(□,□)□□□□ = \frac{□□□}{□_□^2}□^{-\frac{□^2}{2□_□^2}}\frac{□□}{2□}. \tag{5.6}$$

Из выражения (1.144) следует, что A и φ независимы, причем огибающая распределена по закону Релея

$$W_A(A) = \frac{A}{\sigma_x^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}}; \quad A \in [0, \infty), \tag{5.7}$$

а фаза имеет равно мерное распределение в интервале $[0,2\pi]$:

$$W_\varphi(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad \varphi \in [0,2\pi].$$

В заключение отметим, что корреляционная функция огибающей $A(t)$ и фазы $\varphi(t)$ узкополосного нормального процесса описываются достаточно сложными выражениями,