Лекция № 5

Вероятностные характеристики огибающей и фазы узкополосногонормального процесса

При решении этой задачи будем исходить из введенного ранее представления узкополосного процесса

$$\xi(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

Поскольку $\xi(t)$ представляет собой нормальный процесс, сопряженное колебание $\hat{\xi}(t)$ будет также нормальным в силу линейности преобразования Гильберта.

Найдем взаимные корреляционные функции процессов $\xi(t)$ и $\hat{\xi}(t)$

$$\langle \hat{\xi}(t)\xi(t_1)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\langle \xi(\tau)\xi(t_1)\rangle}{t-\tau}d\tau,$$

$$\langle \hat{\xi}(t)\hat{\xi}(t_1)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\langle \xi(\tau)\hat{\xi}(t_1)\rangle}{t-\tau}d\tau,$$

что соответствует

$$K_{\hat{\xi}\xi}(t,t_1) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K_{\xi}(\tau,t_1)}{t-\tau}d\tau, \qquad (5.1)$$

$$K_{\hat{\xi}}(t,t_1) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K_{\xi\hat{\xi}}(\tau,t_1)}{t-\tau}d\tau. \qquad (5.2)$$

Для стационарного процесса

$$\square_{\square}(\square, \square_1) = \square_{\square}(\square - \square_1) = \square_{\square}(\square_1 - \square).$$

Поэтому (1.2) принимает вид

$$\square_{\square}(\square, \square_1) = \frac{1}{\square}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\square_{\square}(\square, \square_1)}{\square - \square}\square\square = \frac{1}{\square}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\square_{\square}(\square)}{\square - \square_1 - \square}\square\square = \square_{\square}(\square - \square_1) = \square_{\square}(\square).$$

Таким образом,

$$\square_{\square}(\square) = \frac{1}{\square}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\square_{\square}(\square)}{\square}\square\square. \qquad (5.3)$$

Из (1.3) вытекает, что при $\square = 0$

$$\square_{\square}(0) = -\frac{1}{\square}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\square_{\square}(\square)}{\square}\square\square = 0$$

выражение для совместной плотности вероятности процессов $x(t)$ и $y(t)$ выражение

$$W_{x,y}(x, y)\,dx\,dy = \frac{1}{2\pi\sigma_{x}^{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^{2}+y^{2}}{2\sigma_{x}^{2}}\right)dx\,dy, \tag{5.4}$$

как для совокупности двух независимых нормальных величин x и y.

Из математики известно, что отношение элементарных площадок

$$\frac{dS_{x,y}}{dS_{A,\varphi}} = \frac{dx\,dy}{dA\,d\varphi} = |J|,$$

где J – якобиан преобразования.

находим:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial A} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial A} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] & -A\sin[\omega_0 t + \varphi(t)] \\ \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] & A\cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \end{vmatrix} = A, \tag{5.5}$$

Осуществляя в (1.4) замену

$$x^2 + y^2 = A^2 \text{ и } dx\,dy = A\,dA\,d\varphi,$$

получаем

$$W_{A,\varphi}(A, \varphi)\,dA\,d\varphi = \frac{A\,dA}{\sigma_{x}^{2}}\,e^{-\frac{A^2}{2\sigma_{x}^{2}}}\,\frac{d\varphi}{2\pi}. \tag{5.6}$$

Из выражения (1.144) следует, что A и φ независимы, причем огибающая распределена по закону Релея

$$w_A(A) = \frac{A}{\sigma_x^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}} \frac{\ldots}{2\pi};\ A \in [0, \infty), \qquad (5.7)$$

а фаза имеет равно мерное распределение в интервале $[0,2\pi)$:

$$w_\varphi(\varphi) = \frac{1}{2\pi},\ \varphi \in [0,2\pi).$$

В заключение отметим, что корреляционная функция огибающей $A(t)$ и фазы $\varphi(t)$ узкополосного нормального процесса описываются достаточно сложными выражениями,