

Здравствуйте!

Лекция №9

Замена переменных в определенном интеграле

Теорема. Пусть

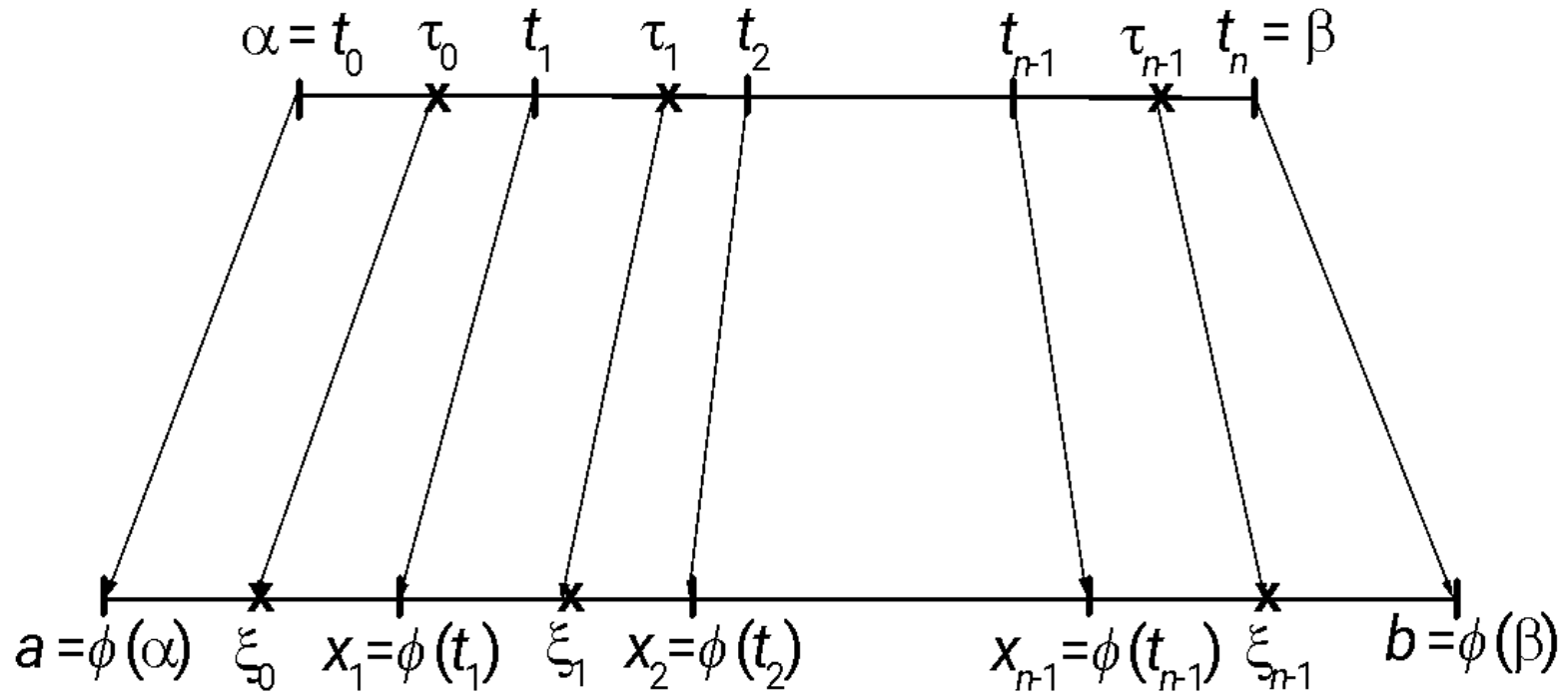
1. $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$;
2. функция $\varphi(t)$ монотонно возрастает и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;
3. $\forall t \in [\alpha, \beta] \exists \varphi'(t)$.

Тогда
$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Обратите внимание на пределы интегрирования во втором интеграле.

Доказательство.

Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ на кусочки точками $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$, и пусть $\lambda = \max_i \Delta t_i$. Тогда отрезок $[a, b]$ также разобьется на кусочки точками $x_i = \phi(t_i)$, причем $x_0 = \phi(t_0) = \phi(\alpha) = a$ и $x_n = \phi(t_n) = \phi(\beta) = b$.



Рассмотрим величины $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Для них, используя формулу Лагранжа, имеем

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\tau_i)\Delta t_i,$$

где $t_i \leq \tau_i \leq t_{i+1}$.

Как говорилось в определении понятия определенного интеграла, предел интегральной суммы не должен зависеть от выбора средней точки. Возьмем поэтому $\xi_i = \varphi(\tau_i)$. Тогда для интегральной суммы получим

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i.$$

Проделаем теперь предельный переход при $\lambda = \max_i \Delta t_i \rightarrow 0$. В силу равномерной непрерывности функции $\varphi(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, при этом будет и $\lambda' = \max_i \Delta x_i \rightarrow 0$. Мы получим

$$\lim_{\lambda' \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i)) \varphi'(\tau_i) \Delta t_i,$$

что и дает формулу

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Обратите внимание на следующие моменты:

1. В отличие от неопределенного интеграла здесь нет возврата к переменной x .

2. Но зато во втором интеграле **стоят другие пределы!** И это есть тот момент, о котором студенты, решая задачи, часто забывают. Так что **НЕ ЗАБЫВАЙТЕ МЕНЯТЬ ПРЕДЕЛЫ!**

Определенный интеграл как функция верхнего предела

Прежде, чем приступить к изучению данного раздела, обратите внимание на следующее:

1. Неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ это **функция от x** , а определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ – это **число**.

2. Значение определенного интеграла не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования, то есть $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$. Поэтому если в процессе выкладок переменная интегрирования вдруг будет обозначена другой буквой – не пугайтесь, это совершенно все равно.

Объектом исследования данного раздела является определенный интеграл с переменным верхним пределом

$$\int_a^x f(t)dt = F(x),$$

который представляет собой **функцию от x** .

Теорема 1. Пусть $f(x)$ интегрируема на интервале $[a, b]$. Тогда $F(x)$ есть непрерывная функция на этом интервале.

Доказательство.

Так как $f(x)$ интегрируема на интервале $[a, b]$, то она ограничена на этом интервале, то есть существуют **конечные** m и M , такие, что $\forall x \in [a, b] \quad m \leq f(x) \leq M$. Тогда

$$F(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = F(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Но, по первой теореме о среднем, $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = \mu \Delta x$, где $m \leq \mu \leq M$.

Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\mu \Delta x) = 0$$

и
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(x + \Delta x) = F(x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = F(x),$$

что и говорит о непрерывности функции $F(x)$.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ непрерывна на интервале $[a, b]$. Тогда $\exists F'(x) = f(x)$.

Доказательство.

В ходе доказательства теоремы 1 было получено соотношение

$$F(x + \Delta x) = F(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Но теперь $f(x)$ непрерывна. Поэтому, по следствию из первой теоремы о среднем, мы можем записать:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(c) \Delta x,$$

где $x \leq c \leq x + \Delta x$ и при $\Delta x \rightarrow 0$ $c \rightarrow x$.

Тогда имеем

$$F(x + \Delta x) = F(x) + f(c)\Delta x,$$
$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(c),$$

и, наконец,

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x).$$

Таким образом, **у каждой непрерывной функции существует первообразная!**

Замечание.

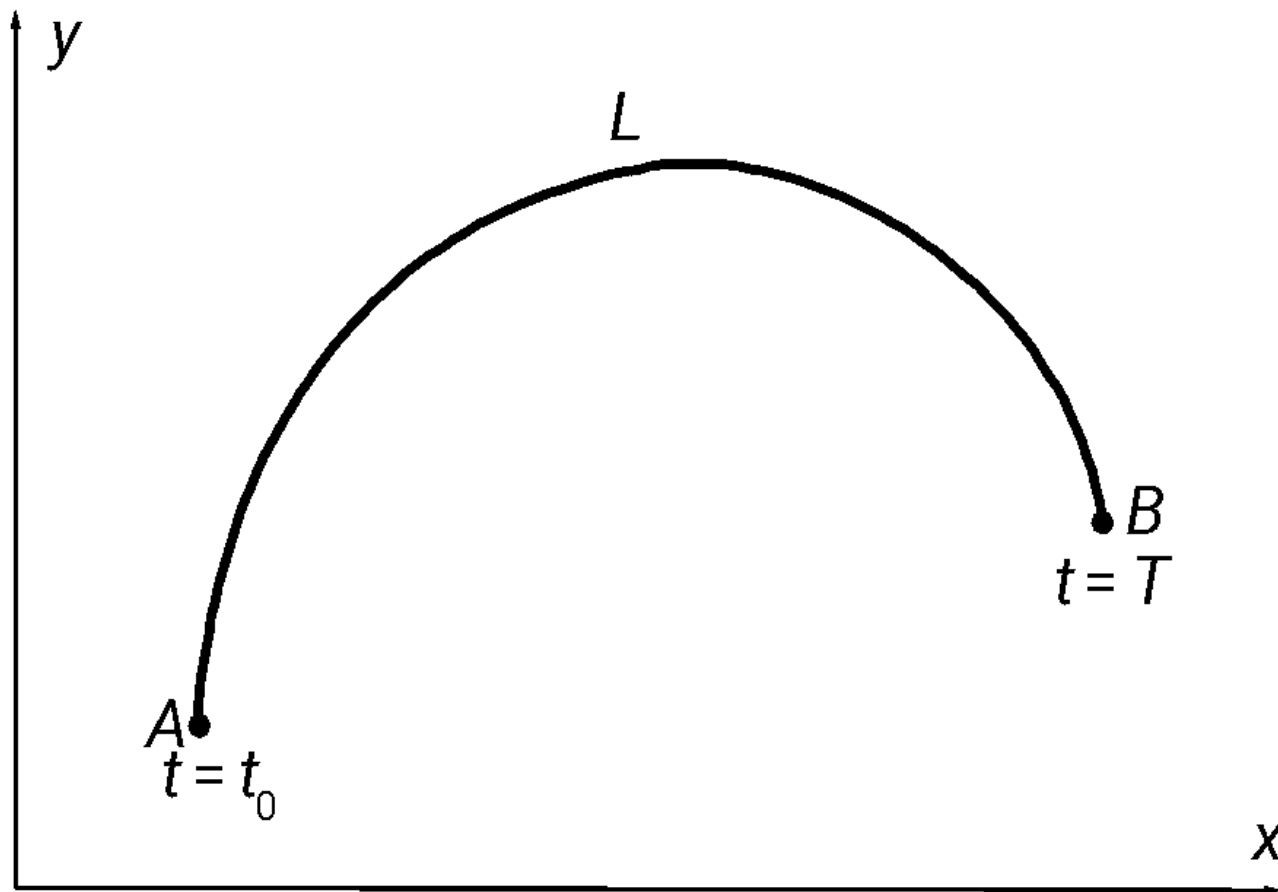
Рассмотрим $\tilde{F}(x) = \int_x^b f(t)dt$, то есть определенный интеграл с переменным **нижним** пределом. Но так как

$$\tilde{F}(x) = \int_x^b f(t)dt = -\int_b^x f(t)dt,$$

то этот объект немедленно сводится к предыдущему. Получаем:

1. $\tilde{F}(x)$ – непрерывная функция;
2. если $f(x)$ непрерывна на интервале $[a, b]$, то $\exists \tilde{F}'(x) = -f(x)$.

Длина дуги плоской кривой
Параметрическое задание кривой



Наиболее общим способом задания кривой на плоскости считается так называемое параметрическое задание кривой, когда кривая L задается системой уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq T.$$

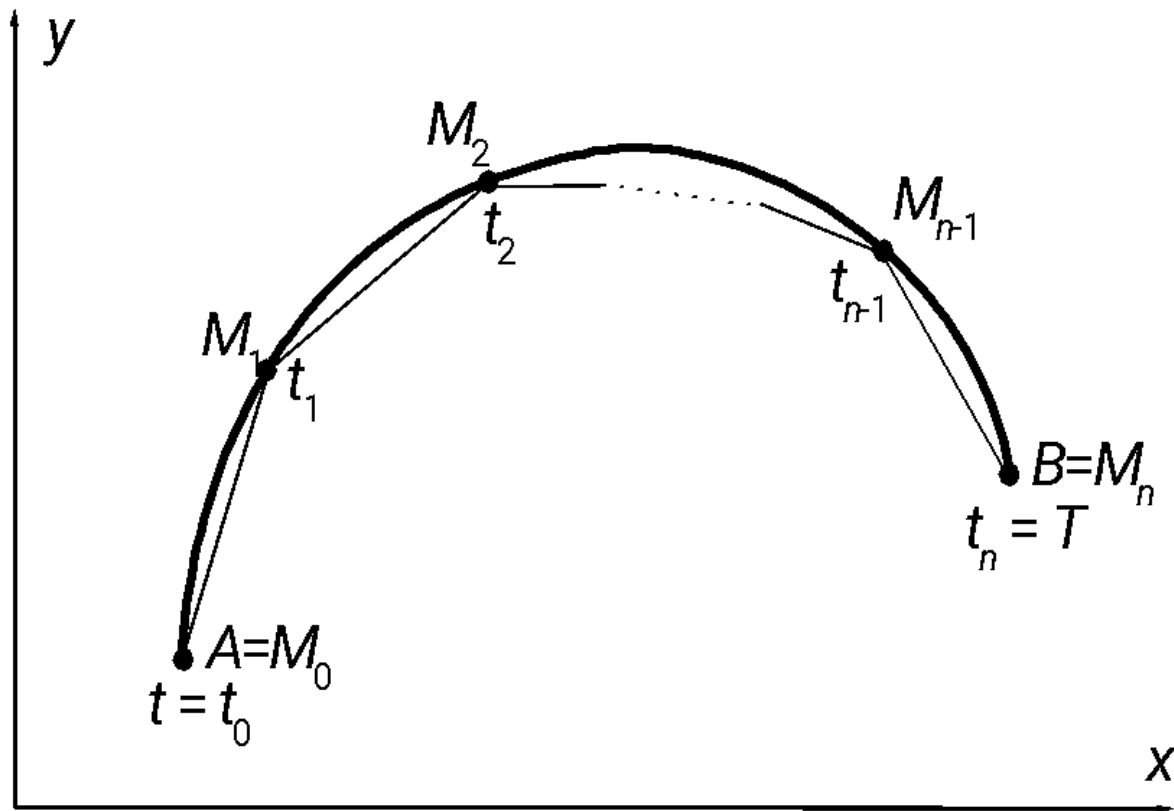
Считается, что значение параметра t_0 соответствует точке A (начало кривой), а значение параметра T – точке B (концу кривой).

Определение длины дуги кривой

Разобьем отрезок $[t_0, T]$ на части

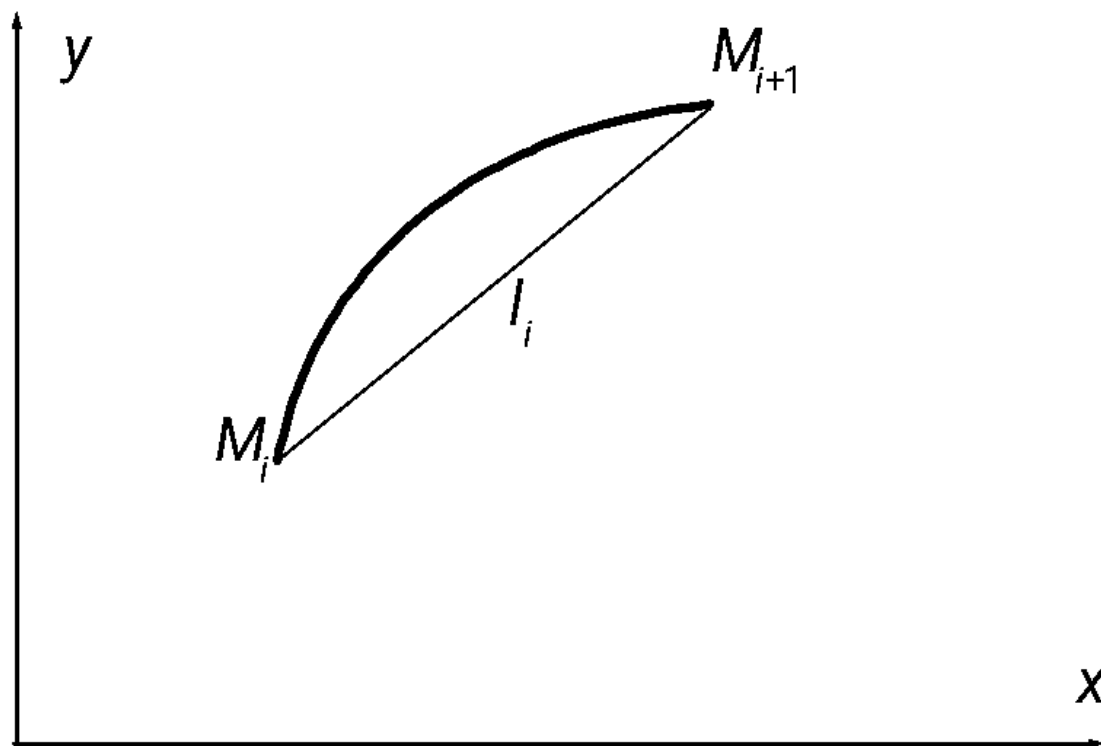
$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$ и пусть $\lambda = \max_i \Delta t_i$. Тогда кривая L

разобьется на кусочки точками $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = B$



Соединим точки $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = B$ отрезками прямых и пусть l_i есть длина отрезка прямой, соединяющей точки M_i и M_{i+1} .

Обозначим через $L = \sum_{i=0}^{n-1} l_i$ периметр вписанной ломаной.



Определение. Если существует $\lim_{\lambda \rightarrow 0} L = s$ и этот предел не зависит от способа разбиения отрезка $[t_0, T]$ на части, то он называется длиной дуги кривой AB .

Вычисление длины дуги кривой

Теорема. Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют на отрезке $[t_0, T]$ непрерывные производные $x'(t)$ и $y'(t)$. Тогда

$$s = \int_{t_0}^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Доказательство.

Разобьем отрезок $[t_0, T]$ на части $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$ и пусть $\lambda = \max_i \Delta t_i$. Тогда точка M_i имеет координаты $(x(t_i), y(t_i))$, а точка M_{i+1} имеет координаты $(x(t_{i+1}), y(t_{i+1}))$. Поэтому

$$l_i = \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2}$$

и поэтому

$$L = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2}.$$

Используя два раза формулу Лагранжа, получаем

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\tau_i)\Delta t_i, \quad y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(\bar{\tau}_i)\Delta t_i.$$

Однако здесь возникает одна трудность – величины τ_i и $\bar{\tau}_i$ **разные**.

Теперь имеем

$$L = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\bar{\tau}_i))^2} \Delta t_i.$$

Наряду с этой величиной рассмотрим величину

$$\bar{L} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2} \Delta t_i$$

и оценим разность между ними.

Для этого выведем одно вспомогательное неравенство. Имеем

$$\left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2} \right| = \left| \frac{b^2 - b_1^2}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2}} \right| \leq \left| \frac{b^2 - b_1^2}{b + b_1} \right| = |b - b_1|,$$

так как

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2} \geq \sqrt{b^2} + \sqrt{b_1^2} = b + b_1$$

и поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2}} \leq \frac{1}{b + b_1}.$$

Поэтому имеем

$$\left| \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\bar{\tau}_i))^2} - \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2} \right| \leq |y'(\bar{\tau}_i) - y'(\tau_i)|$$

и теперь

$$\begin{aligned} |L - \bar{L}| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\bar{\tau}_i))^2} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2} \right| \Delta t_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} |y'(\bar{\tau}_i) - y'(\tau_i)| \Delta t_i. \end{aligned}$$

Но, по предположению, $y'(t)$ непрерывна на промежутке $[t_0, T]$, следовательно, по теореме Кантора, она равномерно непрерывна на этом промежутке. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \Delta t_i < \delta \quad |y'(\tau_i) - y'(\bar{\tau}_i)| < \varepsilon.$$

Но тогда

$$|L - \bar{L}| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |y'(\bar{\tau}_i) - y'(\tau_i)| \Delta t_i \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i = \varepsilon(T - t_0),$$

и, в силу произвольности ε , это означает, что $\lim_{\lambda \rightarrow 0} |L - \bar{L}| = 0$.

Но тогда

$$\begin{aligned} s &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} L = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{L} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2} \Delta t_i = \\ &= \int_{t_0}^T \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \end{aligned}$$