Здравствуйте!

Лекция №9

Замена переменных в определенном интеграле

Теорема. Пусть

1. $f(x)$ **интегрируема на** $[a,b]$**;**

2. функция $\varphi(t)$ монотонно возрастает и $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;

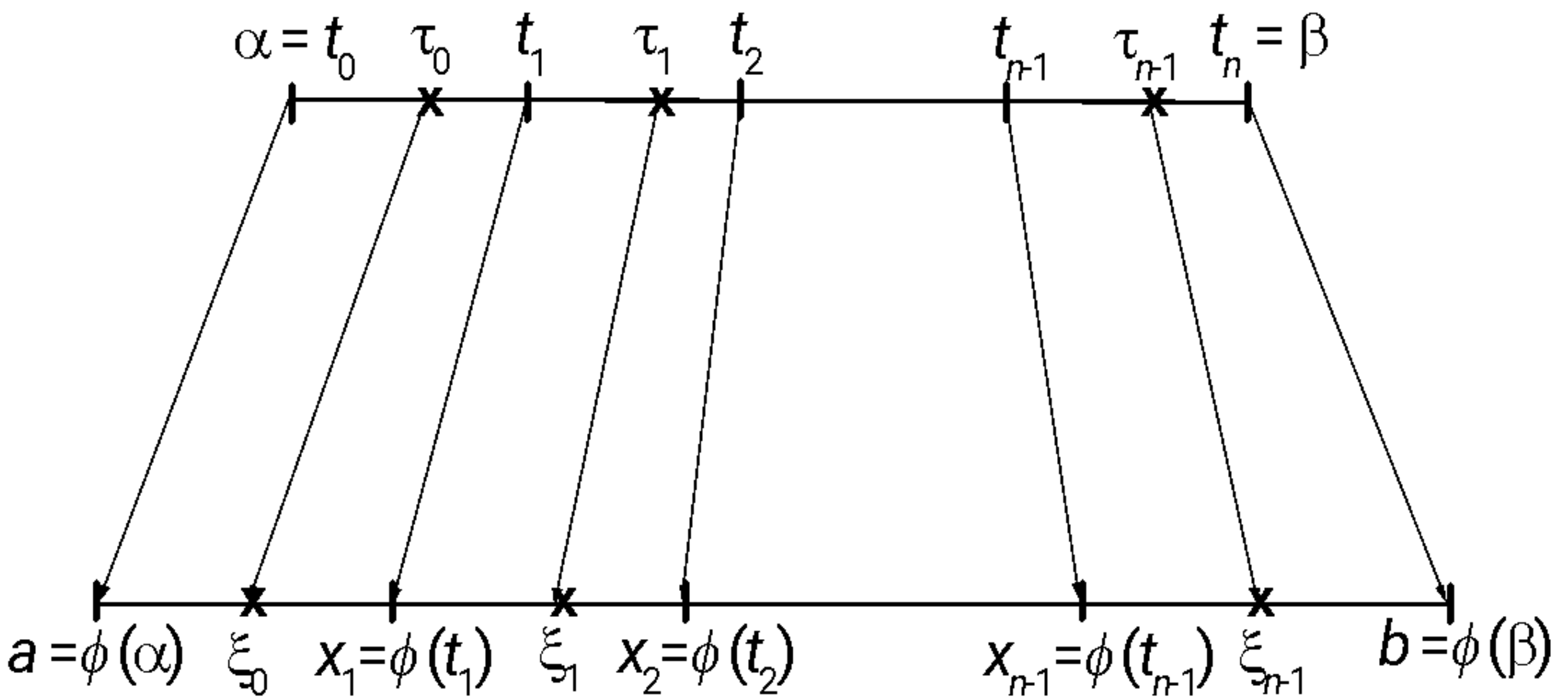
3. $\forall t\in[\alpha,\beta]\ \ \exists\varphi'(t)$**.**

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$**.**

Обратите внимание на пределы интегрирования во втором интеграле.

Доказательство.

Разобьем отрезок $[\alpha,\beta]$ на кусочки точками $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$, и пусть $\lambda = \max_i \Delta t_i$. Тогда отрезок $[a,b]$ также разобьется на кусочки точками $x_i = \varphi(t_i)$, причем $x_0 = \varphi(t_0) = \varphi(\alpha) = a$ и $x_n = \varphi(t_n) = \varphi(\beta) = b$.



Рассмотрим величины $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Для них, используя формулу Лагранжа, имеем

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\tau_i)\Delta t_i,$$

где $t_i \le \tau_i \le t_{i+1}$.

Как говорилось в определении понятия определенного интеграла, предел интегральной суммы не должен зависеть от выбора средней точки. Возьмем поэтому $\xi_i = \varphi(\tau_i)$. Тогда для интегральной суммы получим

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i .$$

Проделаем теперь предельный переход при $\lambda = \max\limits_i \Delta t_i \to 0$. В силу равномерной непрерывности функции $\varphi(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, при этом будет и $\lambda' = \max\limits_i \Delta x_i \to 0$. Мы получим

$$\lim_{\lambda' \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i,$$

что и дает формулу

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Обратите внимание на следующие моменты:

1. В отличие от неопределенного интеграла здесь нет возврата к переменной x.

2. Но зато во втором интеграле **стоят другие пределы!** И это есть тот момент, о котором студенты, решая задачи, часто забывают. Так что **НЕ ЗАБЫВАЙТЕ МЕНЯТЬ ПРЕДЕЛЫ!**

Определенный интеграл как функция верхнего предела

Прежде, чем приступить к изучению данного раздела, обратите внимание на следующее:

1. Неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ это **функция от *x***, а определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ – это **число**.

2. Значение определенного интеграла не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования, то есть $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \ldots$. Поэтому если в процессе выкладок переменная интегрирования вдруг будет обозначена другой буквой – не пугайтесь, это совершенно все равно.

Объектом исследования данного раздела является определенный интеграл с переменным верхним пределом

$$\int_a^x f(t)dt = F(x),$$

который представляет собой **функцию от *x***.

Теорема 1. Пусть $f(x)$ интегрируема на интервале $[a,b]$. Тогда $F(x)$ есть непрерывная функция на этом интервале.

Доказательство.

Так как $f(x)$ интегрируема на интервале $[a,b]$**,** то она ограничена на этом интервале, то есть существуют **конечные** m и M, такие, что $\forall\, x \in [a,b]\;\; m \le f(x) \le M$. Тогда

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = F(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Но, по первой теореме о среднем, $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \mu\Delta x$, где $m \le \mu \le M$**.**

Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \lim_{\Delta x\to 0}(\mu\Delta x) = 0$$

и
$$\lim_{\Delta x\to 0} F(x+\Delta x) = F(x) + \lim_{\Delta x\to 0}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = F(x),$$

что и говорит о непрерывности функции $F(x)$.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ непрерывна на интервале $[a,b]$. Тогда $\exists F'(x) = f(x)$.

Доказательство.

В ходе доказательства теоремы 1 было получено соотношение

$$F(x+\Delta x) = F(x) + \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Но теперь $f(x)$ непрерывна. Поэтому, по следствию из первой теоремы о среднем, мы можем записать:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x,$$

где $x \le c \le x + \Delta x$ и при $\Delta x \to 0 \quad c \to x$.

Тогда имеем

$$F(x+\Delta x) = F(x) + f(c)\Delta x,$$

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(c),$$

и, наконец,

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x).$$

Таким образом, **у каждой непрерывной функции существует первообразная!**

Замечание.

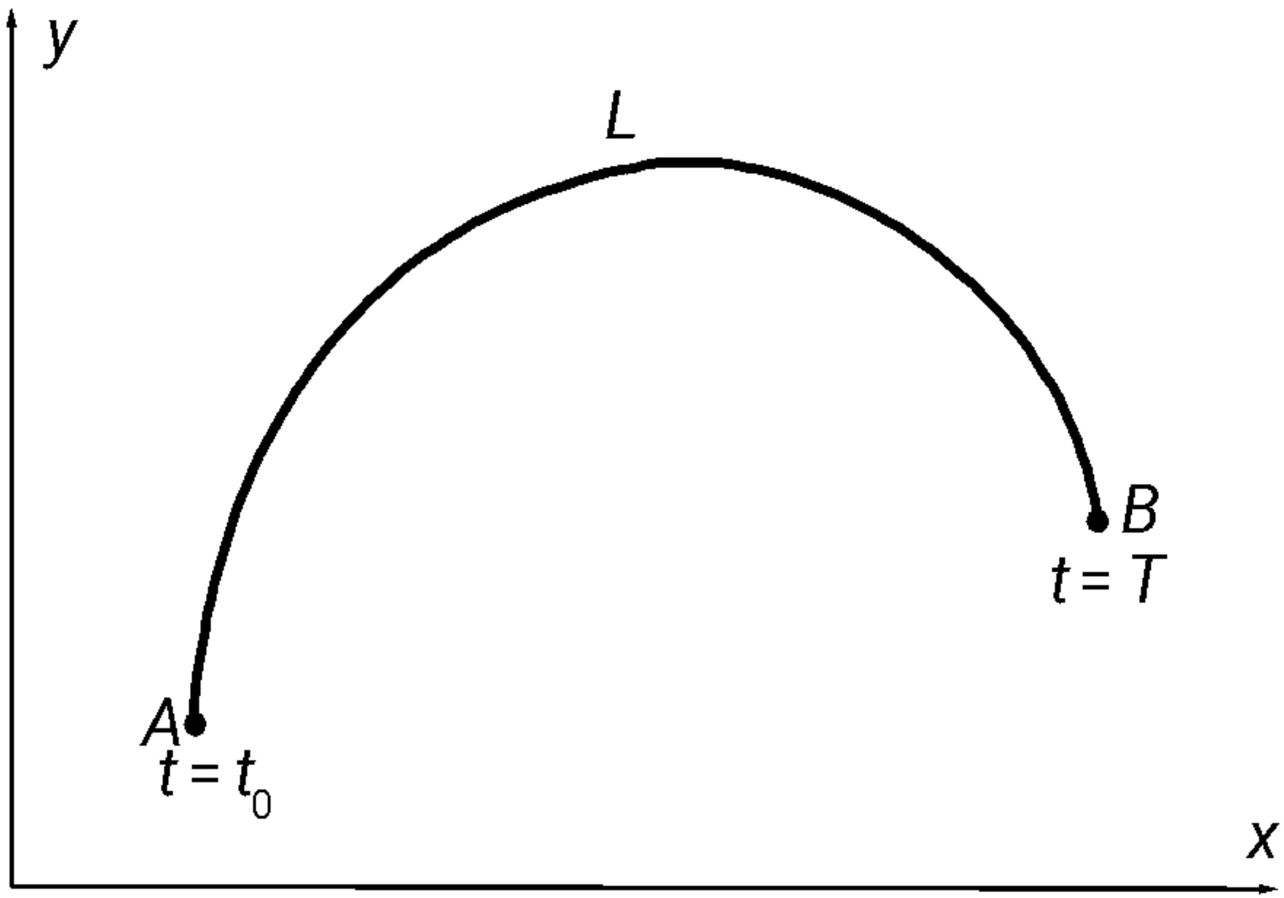
Рассмотрим $\widetilde{F}(x)=\int\limits_x^b f(t)dt$, то есть определенный интеграл с переменным **нижним** пределом. Но так как

$$\widetilde{F}(x)=\int\limits_x^b f(t)dt=-\int\limits_b^x f(t)dt,$$

то этот объект немедленно сводится к предыдущему. Получаем:

1. $\widetilde{F}(x)$ – непрерывная функция;
2. если $f(x)$ непрерывна на интервале $[a,b]$, то $\exists \widetilde{F}'(x)=-f(x)$.

Длина дуги плоской кривой
Параметрическое задание кривой



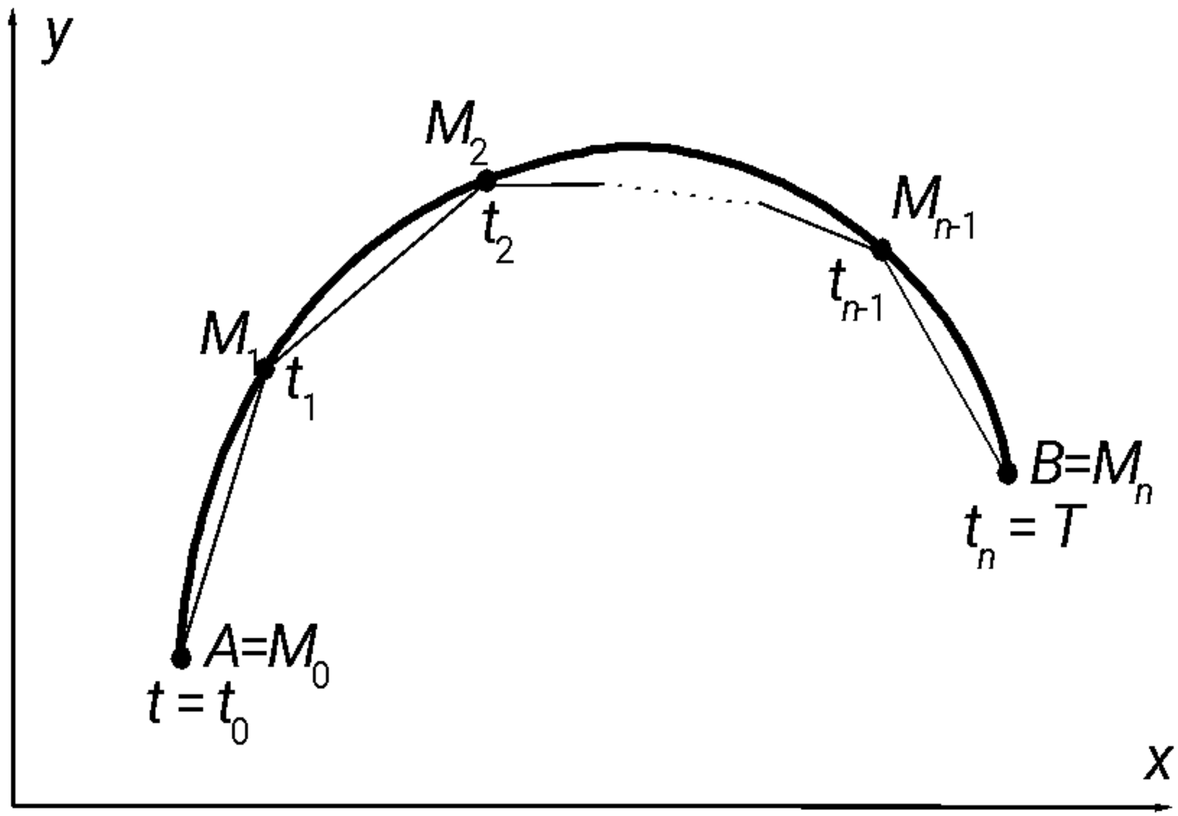
Наиболее общим способом задания кривой на плоскости считается так называемое параметрическое задание кривой, когда кривая L задается системой уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t_0 \le t \le T .$$

Считается, что значение параметра t_0 соответствует точке A (начало кривой), а значение параметра T – точке B (концу кривой).

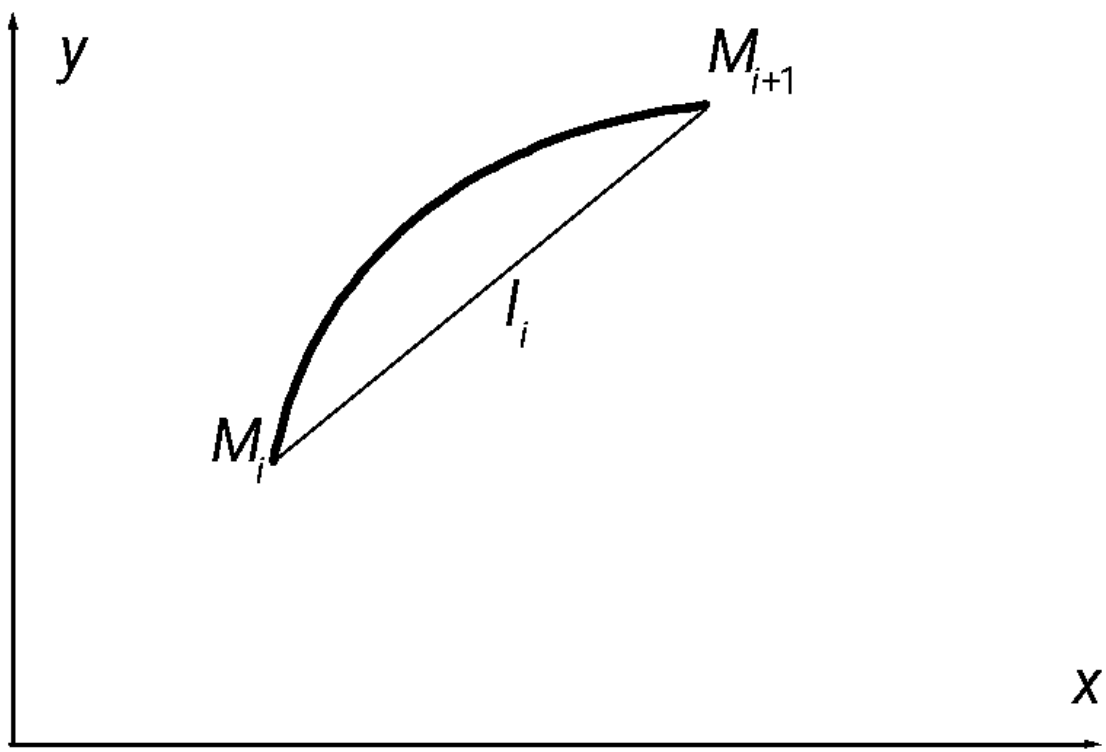
Определение длины дуги кривой

Разобьем отрезок $[t_0, T]$ на части $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T$ и пусть $\lambda = \max\limits_i \Delta t_i$. Тогда кривая L разобьется на кусочки точками $A = M_0,\ M_1,\ M_2,\ \ldots\ ,\ M_n = B$



Соединим точки $A = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n = B$ отрезками прямых и пусть l_i есть длина отрезка прямой, соединяющей точки M_i и M_{i+1}.

Обозначим через $L = \sum_{i=0}^{n-1} l_i$ периметр вписанной ломаной.



Определение. Если существует $\lim\limits_{\lambda\to 0} L = s$ и этот предел не зависит от способа разбиения отрезка $[t_0, T]$ на части, то он называется длиной дуги кривой AB.

Вычисление длины дуги кривой

Теорема. Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют на отрезке $[t_0, T]$ **непрерывные** производные $x'(t)$ и $y'(t)$. Тогда

$$s = \int_{t_0}^{T} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt\,.$$

Доказательство.

Разобьем отрезок $[t_0, T]$ на части $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T$ и пусть $\lambda = \max\limits_i \Delta t_i$. Тогда точка M_i имеет координаты $(x(t_i), y(t_i))$, а точка M_{i+1} имеет координаты $(x(t_{i+1}), y(t_{i+1}))$. Поэтому

$$l_i = \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2}$$

и поэтому

$$L = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2}.$$

Используя два раза формулу Лагранжа, получаем

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\tau_i)\Delta t_i, \quad y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(\bar{\tau}_i)\Delta t_i.$$

Однако здесь возникает одна трудность – величины τ_i и $\bar{\tau}_i$ **разные**.

Теперь имеем

$$L = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\bar{\tau}_i))^2}\,\Delta t_i.$$

Наряду с этой величиной рассмотрим величину

$$\bar{L} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2}\,\Delta t_i$$

и оценим разность между ними.

Для этого выведем одно вспомогательное неравенство. Имеем

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b_1^2}\right|=\left|\frac{b^2-b_1^2}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b_1^2}}\right|\le\left|\frac{b^2-b_1^2}{b+b_1}\right|=\left|b-b_1\right|,$$

так как

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b_1^2}\ge\sqrt{b^2}+\sqrt{b_1^2}=b+b_1$$

и поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b_1^2}}\le\frac{1}{b+b_1}.$$

Поэтому имеем

$$\left|\sqrt{(x'(\tau_i))^2+(y'(\bar{\tau}_i))^2}-\sqrt{(x'(\tau_i))^2+(y'(\tau_i))^2}\right|\le\left|y'(\bar{\tau}_i)-y'(\tau_i)\right|$$

и теперь

$$\left|L-\bar{L}\right|\le\sum_{i=0}^{n-1}\left|\sqrt{(x'(\tau_i))^2+(y'(\bar{\tau}_i))^2}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{(x'(\tau_i))^2+(y'(\tau_i))^2}\right|\Delta t_i\le\sum_{i=0}^{n-1}\left|y'(\bar{\tau}_i)-y'(\tau_i)\right|\Delta t_i.$$

Но, по предположению, $y'(t)$ непрерывна на промежутке $[t_0,T]$, следовательно, по теореме Кантора, она равномерно непрерывна на этом промежутке. Это означает, что

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \forall\Delta t_i<\delta\ \ \left|y'(\tau_i)-y'(\bar{\tau}_i)\right|<\varepsilon.$$

Но тогда

$$\left|L-\bar{L}\right|\le\sum_{i=0}^{n-1}\left|y'(\bar{\tau}_i)-y'(\tau_i)\right|\Delta t_i\le\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}\Delta t_i=\varepsilon(T-t_0),$$

и, в силу произвольности ε, это означает, что $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left|L-\bar{L}\right|=0$.

Но тогда

$$s = \lim_{\lambda \to 0} L = \lim_{\lambda \to 0} \overline{L} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2}\, \Delta t_i =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$