

Обобщение понятия о показателе степени

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

a – основание степени, n – показатель степени

$$a^1 = a$$

если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$

0^0 – не существует

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

Рациональное число – число, которое можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z, n \in N$.

$$\frac{p}{a^q}$$

Если $\frac{p}{q}$ – обыкновенная дробь ($q \neq 1$) и $a \geq 0$, то:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, a \geq 0.$$

при $q = 1$, $\frac{p}{q} = p \in Z$

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5}$$

$$8^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{8^3}$$

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{s}{t}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{s}{t}}$$

$$a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{s}{t}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{s}{t}}$$

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{s}{t}} = a^{\frac{p \cdot s}{q \cdot t}}$$

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = (a \cdot b)^{\frac{p}{q}}$$

$$a^{\frac{p}{q}} : b^{\frac{p}{q}} = (a : b)^{\frac{p}{q}}$$

Пример:

Перемножить радикалы: $\sqrt[8]{x^3}$ и $\sqrt[12]{x^{11}}$.

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, a \geq 0$$

Решение:

I способ:

$$\begin{aligned} &= \sqrt[8 \cdot 3]{x^{3 \cdot 3}} = \sqrt[24]{x^9} \\ &= \sqrt[12 \cdot 2]{x^{11 \cdot 2}} = \sqrt[24]{x^{22}} \end{aligned}$$

$$\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^{11}} = \sqrt[24]{x^9 \cdot x^{22}} = \sqrt[24]{x^{9+22}} = \sqrt[24]{x^{31}}$$

II способ:

$$\left. \begin{aligned} &= x^{\frac{3}{8}} \\ &= x^{\frac{11}{12}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^{11}} = x^{\frac{3}{8}} \cdot x^{\frac{11}{12}} = x^{\frac{3}{8} + \frac{11}{12}} = x^{\frac{31}{24}} = \sqrt[24]{x^{31}}$$

Пример:

Вычислить: а) ~~$64^{\frac{1}{3}}$~~ б) ~~$(-8)^{\frac{1}{3}}$~~ 0

~~$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, a \geq 0$$~~

Решение:

$$64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$(-8)^{\frac{1}{3}}$ – не имеет смысла

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \quad (-8)^{\frac{1}{3}} = -2 \Leftrightarrow -2 = (-8)^{\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Если $\frac{p}{q}$ – обыкновенная дробь ($q \neq 1$) и $a > 0$, то:

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}, a > 0.$$

$$3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}$$

$$7^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{7^{\frac{5}{4}}}$$

$$8^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{8^{\frac{3}{5}}}$$

$$a^{-\frac{p}{q}} \cdot a^{-\frac{s}{t}} = a^{-\frac{p}{q} + \left(-\frac{s}{t}\right)}$$

$$a^{-\frac{p}{q}} : a^{-\frac{s}{t}} = a^{\frac{p}{q} - \left(-\frac{s}{t}\right)}$$

$$\left(a^{-\frac{p}{q}}\right)^{-\frac{s}{t}} = a^{-\frac{p}{q} \cdot \left(-\frac{s}{t}\right)}$$

$$a^{-\frac{p}{q}} \cdot b^{-\frac{p}{q}} = (a \cdot b)^{-\frac{p}{q}}$$

$$a^{-\frac{p}{q}} : b^{-\frac{p}{q}} = (a : b)^{-\frac{p}{q}}$$

Пример:

Упростить выражение: $(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^2 - 2\sqrt[3]{xy} - \frac{1}{(\sqrt[3]{y})^{-2}}$.

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, a \geq 0$$

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\frac{a^p}{a^q}}, a > 0$$

Решение:

$$\begin{aligned} &= (x^{\frac{1}{3}})^2 + 2x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} + (y^{\frac{1}{3}})^2 = x^{\frac{2}{3}} + 2(x \cdot y)^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{xy} + y^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{(\sqrt[3]{y})^2}} = (\sqrt[3]{y})^2 = y^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

=

$$= x^{\frac{2}{3}}$$

Пример:

Решить уравнение: $x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}} - 8 = 0$.

Решение:

$$y = x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow x^{-\frac{2}{3}} = y^2$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$y_1 = -2, \quad y_2 = 4$$

$$x^{-\frac{1}{3}} = -2, \quad x^{-\frac{1}{3}} = 4$$

нет решений $x^{-1} = 64 \Leftrightarrow x = \frac{1}{64}$

*Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня или возводится в дробную степень, называют **иррациональными**.*

- 1. Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень.*
- 2. Метод введения новых переменных.*
- 3. Функционально-графический метод.*