Обобщение понятия о показателе степени

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$ a – основание степени, n – показатель степени

$a^1 = a$

если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$

0^0 – не существует

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$a^n : a^m = a^{n-m}$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$a^n : b^n = (a : b)^n$

Рациональное число – число, которое можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z, n \in N$.

$a^{\frac{p}{q}}$

Если $\frac{p}{q}$ – обыкновенная дробь $(q \neq 1)$ и $a \geq 0$, то:

$$\boldsymbol{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, a \geq 0.}$$

при $q = 1,\ \frac{p}{q} = p \in Z$

$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5}$

$8^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{8^3}$

$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{s}{t}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{s}{t}}$

$a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{s}{t}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{s}{t}}$

$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{s}{t}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{t}}$

$a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = (a \cdot b)^{\frac{p}{q}}$

$a^{\frac{p}{q}} : b^{\frac{p}{q}} = (a : b)^{\frac{p}{q}}$

Пример:

Перемножить радикалы: $\sqrt[8]{x^3}$ и $\sqrt[12]{x^{11}}$.

$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, a \geq 0$

Решение:

I способ:

$= \sqrt[8\cdot 3]{x^{3\cdot 3}} = \sqrt[24]{x^9}$

$= \sqrt[12\cdot 2]{x^{11\cdot 2}} = \sqrt[24]{x^{22}}$

$\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^{11}} = \qquad \cdot \qquad = \sqrt[24]{x^9 \cdot x^{22}} = \sqrt[24]{x^{9+22}} = \sqrt[24]{x^{31}}$

II способ:

$$\left.\begin{array}{l} = x^{\frac{3}{8}} \\ = x^{\frac{11}{12}} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^{11}} = x^{\frac{3}{8}} \cdot x^{\frac{11}{12}} = x^{\frac{3}{8}+\frac{11}{12}} = x^{\frac{31}{24}} = \sqrt[24]{x^{31}}$$

Пример:

Вычислить: а) $64^{\frac{1}{3}}$; б) $(-8)^{\frac{1}{3}}$

$$\cancel{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p},\ a \geq 0}$$

Решение:

$$64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$(-8)^{\frac{1}{3}}$ – не имеет смысла

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \qquad (-8)^{\frac{1}{3}} = -2 \Leftrightarrow -2 = (-8)^{\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Если $\frac{p}{q}$ – обыкновенная дробь $(q \neq 1)$ и $a > 0$, то:

$$\boldsymbol{a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}, a > 0.}$$

$$3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}$$

$$7^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{7^{\frac{5}{4}}}$$

$$8^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{8^{\frac{3}{5}}}$$

$$a^{-\frac{p}{q}} \cdot a^{-\frac{s}{t}} = a^{-\frac{p}{q}+\left(-\frac{s}{t}\right)}$$

$$a^{-\frac{p}{q}} : a^{-\frac{s}{t}} = a^{\frac{p}{q}-\left(-\frac{s}{t}\right)}$$

$$\left(a^{-\frac{p}{q}}\right)^{-\frac{s}{t}} = a^{-\frac{p}{q}\cdot\left(-\frac{s}{t}\right)}$$

$$a^{-\frac{p}{q}} \cdot b^{-\frac{p}{q}} = (a \cdot b)^{-\frac{p}{q}}$$

$$a^{-\frac{p}{q}} : b^{-\frac{p}{q}} = (a : b)^{-\frac{p}{q}}$$

Пример:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, a \geq 0$$

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}, a > 0$$

Упростить выражение: $\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 2\sqrt[3]{xy} - \frac{1}{\left(\sqrt[3]{y}\right)^{-2}}$.

Решение:

$$= \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 + 2x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} + \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = x^{\frac{2}{3}} + 2(x \cdot y)^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{xy} + y^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\left(\sqrt[3]{y}\right)^2}} = \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 = y^{\frac{2}{3}}$$

$$=$$

$$= x^{\frac{2}{3}}$$

Пример:

Решить уравнение: $x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}} - 8 = 0.$

Решение:

$y = x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow x^{-\frac{2}{3}} = y^2$

$y^2 - 2y - 8 = 0$

$y_1 = -2, \qquad y_2 = 4$

$x^{-\frac{1}{3}} = -2, \qquad x^{-\frac{1}{3}} = 4$

нет решений $\qquad x^{-1} = 64 \Leftrightarrow x = \frac{1}{64}$

Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня или возводиться в дробную степень, называют ***иррациональными****.*

1. Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень.

2. Метод введения новых переменных.

3. Функционально-графический метод.