Лекция 7
Раскраска графов

Раскраска графов

Определение. Пусть $G=(V, E)$ – неориентированный граф и k – натуральное число.

Функция f: $V \to \{1,\ldots,k\}$ называется *раскраской* графа.

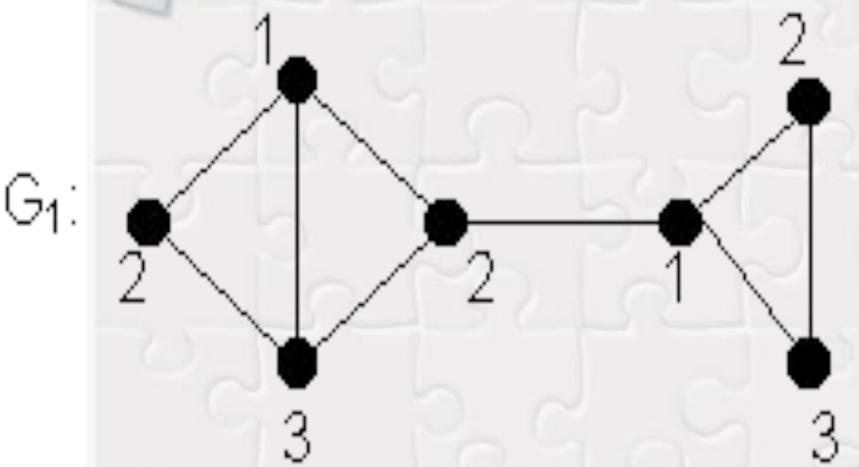
Раскраска называется *правильной*, если для любых смежных вершин $x,y \in V$ справедливо неравенство $f(x) \neq f(y)$. Число k – *количество красок* раскраски f.

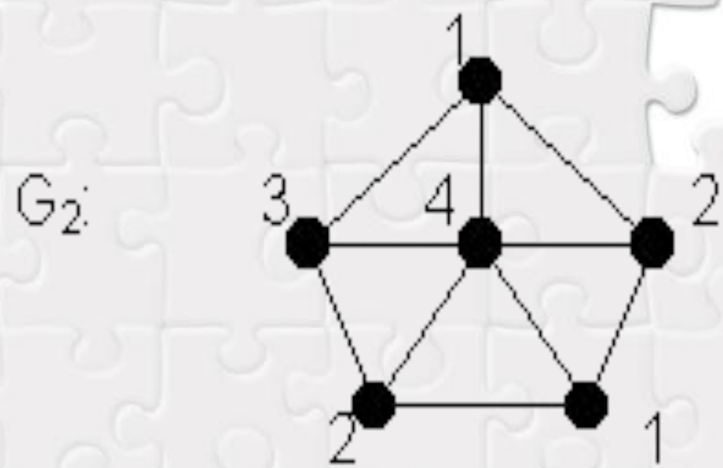
Определение. Наименьшее число красок, необходимое для правильной раскраски графа G называется *хроматическим числом* графа G.

Правильную раскраску таким числом красок будем называть *оптимальной*.

Хроматическое число обозначается через $\chi(G)$.

Пример





$\chi(G_1) = 3$

$\chi(G_2) = 4$

Задача составления расписаний

Предположим, что в учебном центре надо провести несколько занятий за кратчайшее время.

Длительность всех занятий одинакова, например, один час. Некоторые занятия не могут проводиться одновременно, например, это занятия в одной и той же учебной группе (по разным предметам), или занятия проводит один и тот же преподаватель.

Для решения задачи построим граф *G*, вершинам которого взаимнооднозначно соответствуют занятия. Две вершины соединены ребром, если соответствующие занятия нельзя проводить одновременно.

Ясно, что правильная раскраска графа *G* определяет расписание, удовлетворяющее требованиям несовместимости по времени: занятия, соответствующие вершинам, окрашенным одинаково, можно проводить одновременно.

Справедливо и обратное, любое такое расписание определяет правильную раскраску графа G. Следовательно, кратчайшее время необходимое для проведения всех занятий равно $\chi(G)$, а из оптимальной раскраски графа *G* получается необходимое расписание.

Задача распределения ресурсов

Необходимо выполнить некоторое множество $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ работ.

Имеется множество $S=\{s_1,s_2,\ldots,s_r\}$ ресурсов, требуемых для выполнения этих работ.

- Каждая работа использует часть указанных ресурсов.
- Одновременно могут выполняться работы, использующие разные ресурсы.
- Все работы выполняются за одно и то же время t.

Нужно распределить ресурсы так, чтобы общее время выполнения всех работ было минимальным.

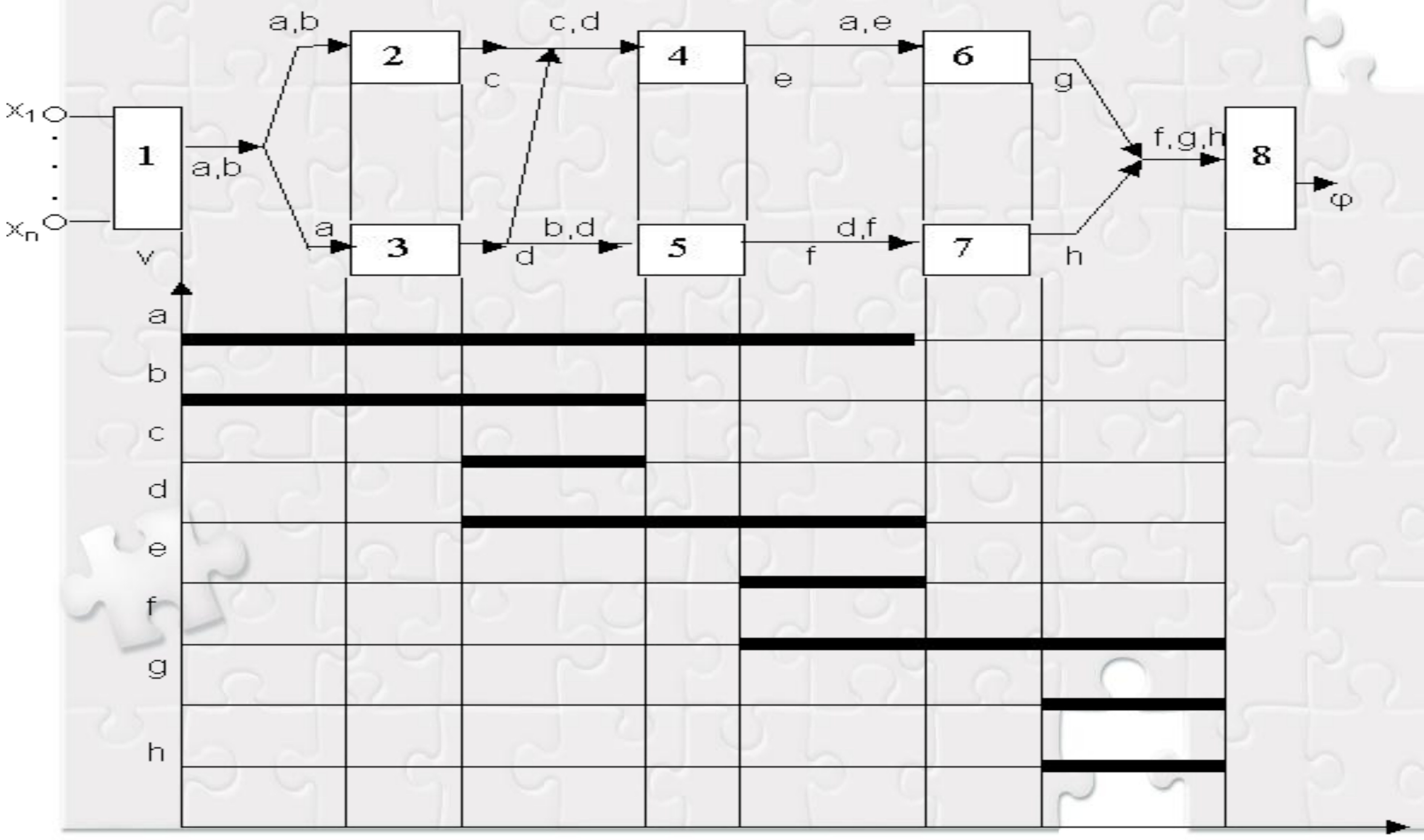
Рассмотрим граф G с множеством вершин V. Две различные вершины v и v' графа G смежны тогда и только тогда, когда для выполнения работ v и v' требуется хотя бы один общий ресурс.

Наименьшее время выполнения всех работ равно $\chi(G)\cdot t$.

Оптимальная раскраска графа G определяет распределение ресурсов.

Задача экономии памяти

Предположим, что необходимо написать программу для вычисления функции $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Вычисление этой функции разбито на ряд блоков, у каждого из блоков имеются входные и выходные переменные.



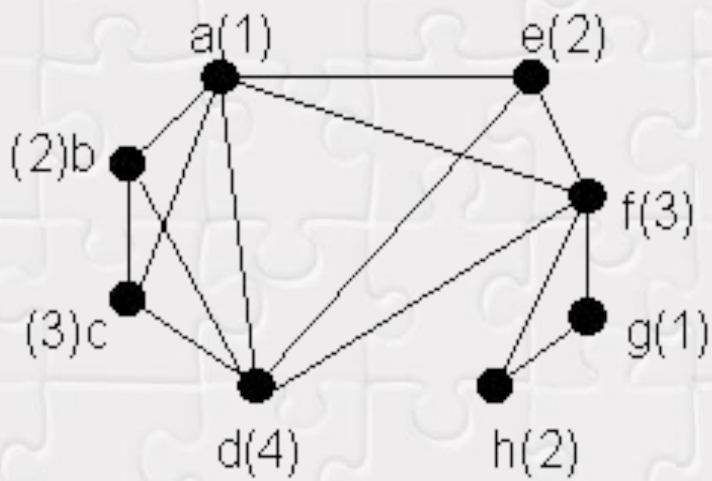
Предположим, что значения переменной занимают одну ячейку памяти.

Задача состоит в том, чтобы определить наименьшее число ячеек памяти, необходимое для хранения указанных в блок – схеме переменных.

Решить эту задачу можно следующим образом. На множестве переменных $V=\{a,b,\ldots,g,h\}$ введем структуру графа: две переменных соединим ребром, если времена их жизни пересекаются. Полученный граф будем называть графом несовместимости переменных.

Значения переменных не могут занимать одну ячейку памяти тогда и только тогда, когда переменные соединены ребром в графе несовместимости.

Следовательно, задача экономии памяти сводится к нахождению оптимальной раскраски графа несовместимости.



Алгоритм последовательной раскраски

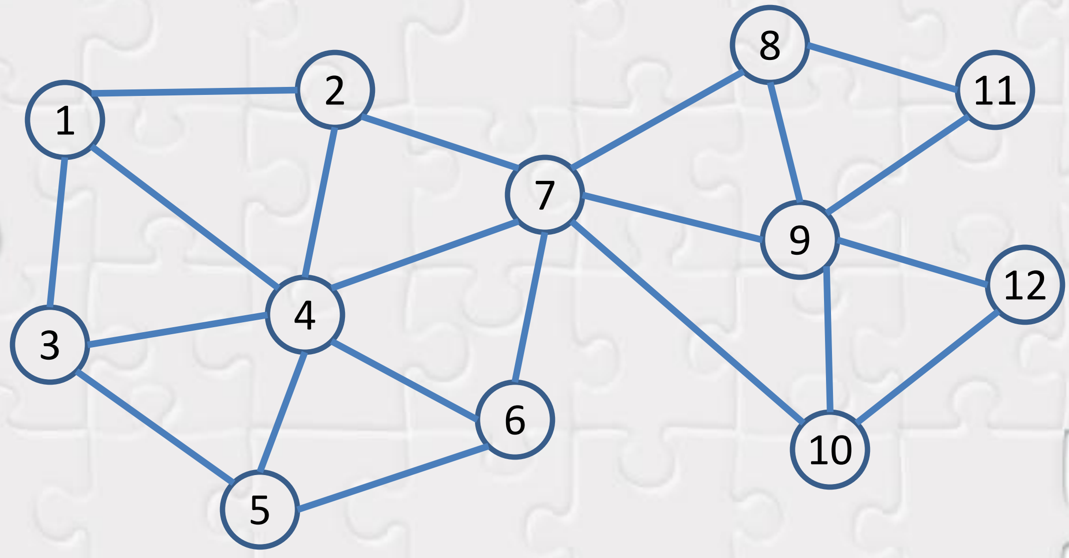
Упорядочиваем вершины графа G: $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$.

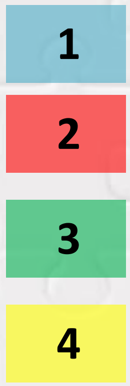
Вершину v_1 красим первой краской.

Предположим, что вершины $v_1,\ldots,v_i$ уже раскрашены и на это использовано k красок.

Если на раскрашенные вершины, смежные с v_{i+1}, использованы все краски, то v_{i+1} раскрашиваем k+1 краской.

Если среди k красок найдется краска, которая не использована для вершин, смежных с v_{i+1}, то вершину v_{i+1} красим этой краской.





Раскраска ребер

Реберная раскраска называется правильной, если смежные ребра имеют различные цвета.

Граф, доаускающий правильную реберную *k*-раскраску, называется реберно *k-раскрашиваемым*.

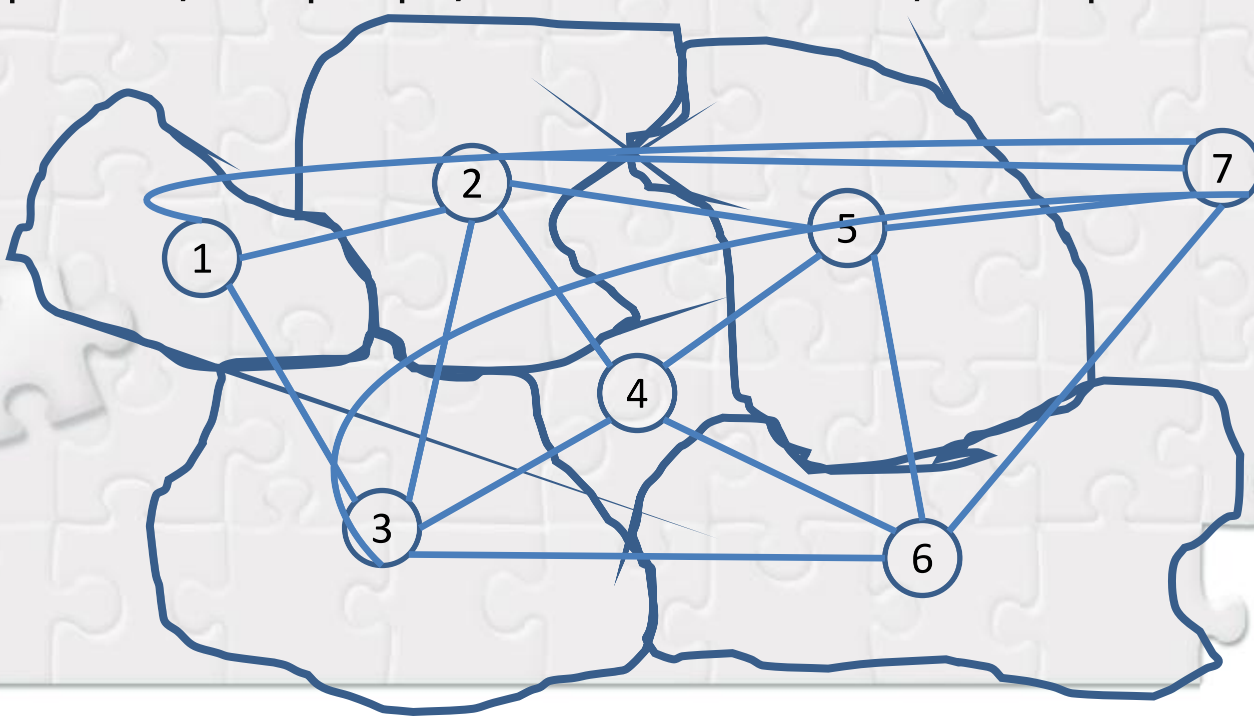
Проблема четырех красок

Проблема возникла в математике в середине 19 века.

Первоначально вопрос формулировался так: сколько нужно красок для раскраски любой географической карты, при которой соседние страны раскрашены в разные цвета?

Достаточно ли четырех красок для раскраски любой географической карты?

Достаточно ли четырех красок, чтобы раскрасить любой планарный граф (граф, в котором можно так расположить вершины, что ребра, соединяющие их, не пересекаются).



Проблема четырех красок

Эта проблема вызвала большой интерес в математике.

Есть свидетельства, что ей занимались известные математики Мебиус и де Морган.

В 1880 году А. Компе опубликовал положительное решение проблемы четырех красок.

Однако в 1890 году Р. Хивуд обнаружил ошибку в этом доказательстве. Он доказал, что любой планарный граф можно раскрасить пятью красками.

После этого появлялось довольно много «доказательств» гипотезы четырех красок и «контрпримеров» к ней, в которых обнаруживались ошибки.

В 1969 году Х. Хели свел проблему четырех красок к исследованию множества С так называемых неустранимых конфигураций. Множество С является конечным. Но довольно большим (порядка нескольких тысяч).

Несколькими годами позже, в 1976 году математикам К. Аппелю и В. Хейкену удалось показать, что все конфигурации из множества С можно правильно раскрасить в четыре цвета. В возникающем при этом переборе существенно использовался компьютер.

Такое решение проблемы четырех красок долгое время не признавалось многими математиками, поскольку его сложно повторить. Однако сейчас практически общепризнано, что К. Аппелем и В. Хейкеном доказана гипотеза четырех красок.