Математический анализ

Лекция 1

2 семестр

Раздел 1. Определенный интеграл.

Раздел 2. Ряды.

Раздел 3. Функции нескольких переменных.

Раздел 4. Кратные интегралы.

Определенный интеграл

- Определенный интеграл. Определение, свойства и вычисление.
- Приложения определенного интеграла. Вычисление площади плоской фигуры, длины дуги кривой, объема и площади поверхности тела вращения.
- Несобственные интегралы. Вычисление, признаки сходимости.

- Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$. Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[a;b]$ точками $a = x_1 < x_2 \ldots < x_{n+1} = b$, то есть $[a;b] = \bigcup_{i=1}^{n}[x_i, x_{i+1}]$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ – длина i-го отрезка разбиения. Мелкостью разбиения называется максимальная длина среди всех отрезков разбиения: $d_n = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$.

На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ выберем произвольную точку t_i и построим интегральную сумму для функции $f(x)$: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$

Определение. Определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется число

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i \,,$$

если этот предел не зависит от последовательности разбиений отрезка $[a; b]$, для которой $d_n \to 0$, и от выбора точек t_i.
В этом случае функция $f(x)$ называется интегрируемой (по Риману) на $[a; b]$.

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b dx = b - a$.

2. Линейность:

$$\int_a^b (C_1 f_1 + C_2 f_2) dx = C_1 \int_a^b f_1 dx + C_2 \int_a^b f_2 dx \,.$$

3. Аддитивность:

$$\forall c \in (a; b) \Rightarrow \int_a^c f dx + \int_c^b f dx = \int_a^b f dx \,.$$

Теорема. Если $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то $f(x)$ ограничена.

Действительно, если $f(x)$ – неограниченная на $[a;b]$ функция, то для любого разбиения $[a;b]=\bigcup_{i=1}^{n}[x_i,x_{i+1}]$ данная функция является неограниченной хотя бы на одном отрезке $[x_k,x_{k+1}]$, поэтому точка t_k при построении интегральной суммы может быть выбрана так, что $f(t_k)$ (и вся интегральная сумма) примет сколь угодно большое значение, и значит, предел таких интегральных сумм не существует.

Свойства определенного интеграла, связанные с неравенствами

Теорема. Если f и g – интегрируемые на $[a; b]$ функции и $f(x) \geq g(x)\ \ \forall x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

В частности, если $f(x) \geq 0\ \ \forall x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

- **Теорема.** Если $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, то $|f(x)|$ также интегрируема, причем $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

  В дальнейшем могут использоваться интегралы, в которых не обязательно $a < b$. Применяются определения

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx\,; \quad \int_a^a f(x)dx = 0.$$

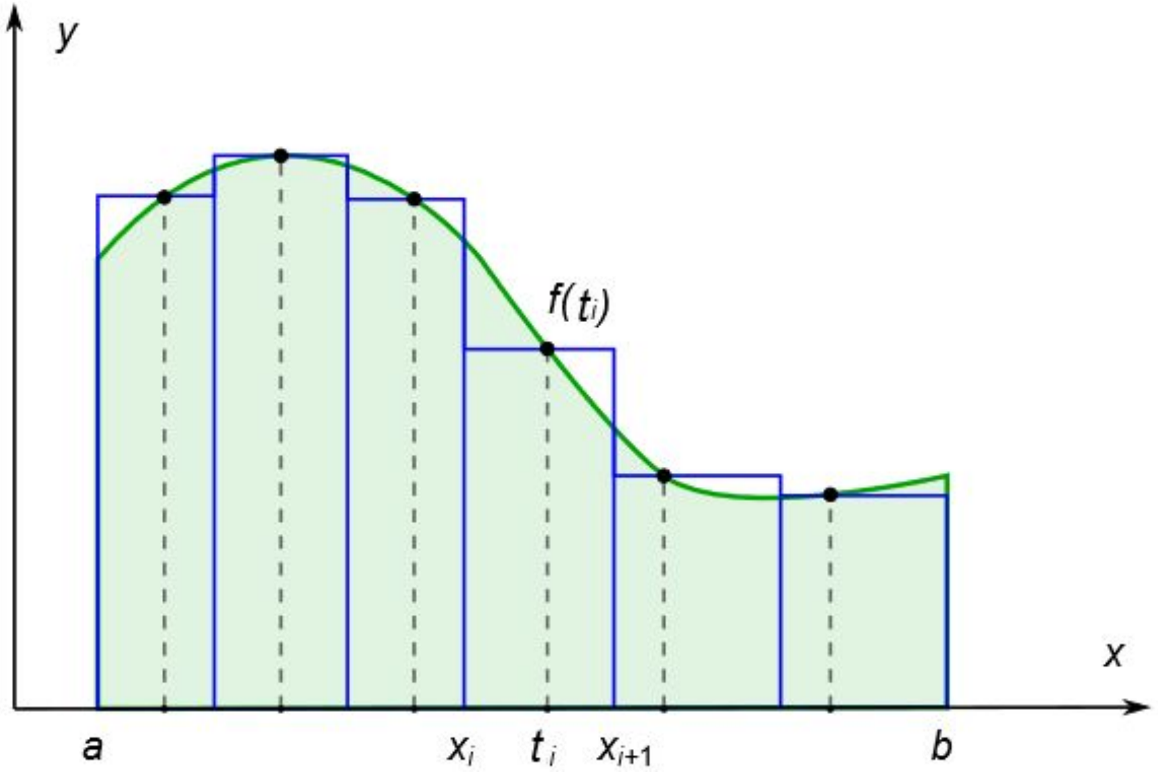
Геометрический смысл определенного интеграла

- Пусть на $[a; b]$ задана непрерывная функция $f(x) \geq 0$.

Тогда $\int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции

$\{(x; y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$ – сумма площадей прямоугольников с длинами оснований Δx_i и высотами $f(t_i)$.



- # Примеры неинтегрируемых функций

Любая неограниченная на $[a;b]$ функция является неинтегрируемой, так как ограниченность есть необходимое условие интегрируемости.

Некоторые неограниченные функции можно интегрировать в некотором обобщенном смысле – в виде несобственного интеграла, который будет рассмотрен позже.

Ограниченная функция также может быть неинтегрируемой. Например,

функция Дирихле $$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное число}, \\ 0, & x - \text{иррациональное число} \end{cases}$$

не является интегрируемой ни на каком $[a;b]$.

Действительно, на любом отрезке разбиения $[x_i, x_{i+1}]$ всегда можно выбрать t_i как рациональное число и как иррациональное. Поэтому

$S_n = 0$, если все t_i иррациональные и

$S_n = b - a$, если все t_i рациональные,

поэтому не существует предел интегральных сумм S_n.

Некоторые классы интегрируемых функций

- монотонные,
- непрерывные,
- кусочно-непрерывные.

Теорема (о среднем)

- Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$,

  то существует $c \in [a; b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Доказательство. Обозначим $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$, $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

Тогда $\forall x \in [a;b] \Rightarrow\ m \le f(x) \le M$ и после интегрирования этого двойного неравенства получим

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx\,;$$

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$, то есть $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$.

Но для любого числа $A \in [m;M]$ по свойству непрерывной на отрезке функции $\exists c \in [a;b]$: $f(c) = A$.

Итак, $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$; $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$, ч. т. д.

Интеграл как функция верхнего предела.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$. Тогда она интегрируема на $[a; x]$ $\forall x \in [a; b]$ и можно рассмотреть функцию

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Теорема.

Если $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, то $F(x)$ непрерывна на $[a; b]$.

- **Доказательство.**

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\,.$$

Интегрируемая функция ограничена $\Rightarrow |f(t)| \le M \ \ \forall t \in [a;b]$,

тогда $|\Delta F| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\right| \le M|\Delta x|$, и значит, ΔF –бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, что равносильно непрерывности $F(x)$, ч. т. д.

- **Теорема.** Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a;b]$. Тогда функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

дифференцируема в точке x_0, причем $F'(x_0) = f(x_0)$.

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ является ее первообразной на $[a;b]$.

- **Теорема**. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $\Phi(x)$ – какая-то ее первообразная на $[a;b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

(формула Ньютона-Лейбница).

Доказательство. Ранее было отмечено, что функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

является в данных условиях первообразной функции $f(x)$ на $[a; b]$, поэтому $\Phi(x) = F(x) + C$.

Таким образом,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = F(b) - F(a) =$$

$$= (\Phi(b) - C) - (\Phi(a) - C) = \Phi(b) - \Phi(a), \text{ч. т. д.}$$

Примеры

$$\int_0^1 (x^2 - 3\sqrt{x})dx = \left(\frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} \cdot 2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\frac{x}{2}dx = -2\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4$$