

# Математический анализ

## Лекция 1

# 2 семестр

Раздел 1. Определенный интеграл.

Раздел 2. Ряды.

Раздел 3. Функции нескольких переменных.

Раздел 4. Кратные интегралы.

# Определенный интеграл

- Определенный интеграл. Определение, свойства и вычисление.
- Приложения определенного интеграла.  
Вычисление площади плоской фигуры, длины дуги кривой, объема и площади поверхности тела вращения.
- Несобственные интегралы.  
Вычисление, признаки сходимости.

Пусть функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[a; b]$ .

Рассмотрим произвольное разбиение отрезка  $[a; b]$  точками

$a = x_1 < x_2 \dots < x_{n+1} = b$ , то есть  $[a; b] = \bigcup_{i=1}^n [x_i, x_{i+1}]$ ,

где  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  — длина  $i$ -го отрезка разбиения. Мелкостью разбиения называется максимальная длина среди всех отрезков

разбиения:  $d_n = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ .

На каждом отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  выберем произвольную точку  $t_i$  и

построим интегральную сумму для функции  $f(x)$ :  $S_n =$

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$$

**Определение.** Определенным интегралом функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  называется число

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i,$$

если этот предел не зависит от последовательности разбиений отрезка  $[a; b]$ , для которой  $d_n \rightarrow 0$ , и от выбора точек  $t_i$ . В этом случае функция  $f(x)$  называется интегрируемой (по Риману) на  $[a; b]$ .

# Свойства определенного интеграла

- 1.  $\int_a^b dx = b - a.$

2. Линейность:

$$\int_a^b (C_1 f_1 + C_2 f_2) dx = C_1 \int_a^b f_1 dx + C_2 \int_a^b f_2 dx .$$

3. Аддитивность:

$$\forall c \in (a; b) \Rightarrow \int_a^c f dx + \int_c^b f dx = \int_a^b f dx .$$

**Теорема.** Если  $f(x)$  интегрируема на  $[a; b]$ , то  $f(x)$  ограничена.

Действительно, если  $f(x)$  – неограниченная на  $[a; b]$  функция, то для любого разбиения  $[a; b] = \cup_{i=1}^n [x_i, x_{i+1}]$  данная функция является неограниченной хотя бы на одном отрезке  $[x_k, x_{k+1}]$ , поэтому точка  $t_k$  при построении интегральной суммы может быть выбрана так, что  $f(t_k)$  ( и вся интегральная сумма) примет сколь угодно большое значение, и значит, предел таких интегральных сумм не существует.

# Свойства определенного интеграла, связанные с неравенствами

**Теорема.** Если  $f$  и  $g$  – интегрируемые на  $[a; b]$  функции и  $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

В частности, если  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

- **Теорема.** Если  $f(x)$  интегрируема на  $[a; b]$ , то  $|f(x)|$  также интегрируема, причем

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

В дальнейшем могут использоваться интегралы, в которых не обязательно  $a < b$ .

Применяются определения

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx; \quad \int_a^a f(x) dx = 0.$$

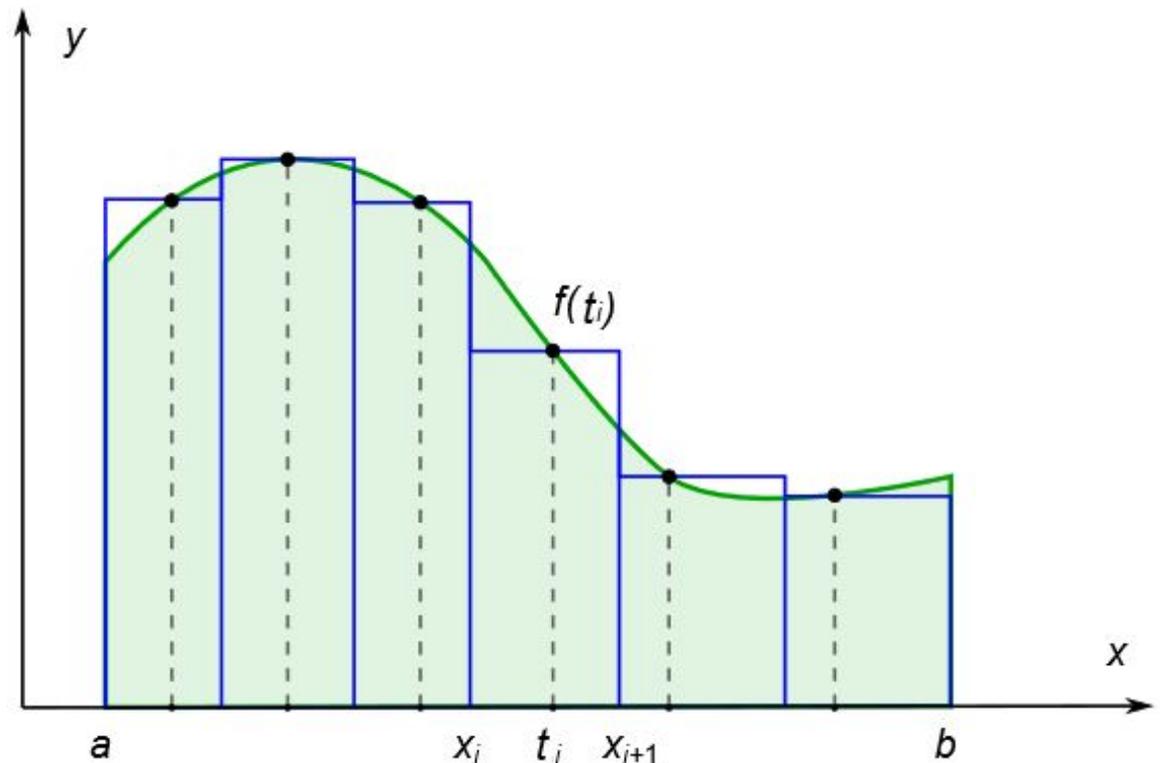
# Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть на  $[a; b]$  задана непрерывная функция  $f(x) \geq 0$ .

Тогда  $\int_a^b f(x)dx$  равен площади криволинейной трапеции

$\{(x; y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ .

$S_n = \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i$  – сумма площадей прямоугольников с длинами оснований  $\Delta x_i$  и высотами  $f(t_i)$ .



- ## Примеры неинтегрируемых функций

Любая неограниченная на  $[a; b]$  функция является неинтегрируемой, так как ограниченность есть необходимое условие интегрируемости.

Некоторые неограниченные функции можно интегрировать в некотором обобщенном смысле – в виде несобственного интеграла, который будет рассмотрен позже.

Ограниченная функция также может быть неинтегрируемой.

Например,

функция Дирихле  $\delta(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное число,} \\ 0, & x - \text{иррациональное число} \end{cases}$

не является интегрируемой ни на каком  $[a; b]$ .

Действительно, на любом отрезке разбиения  $[x_i, x_{i+1}]$  всегда можно выбрать  $t_i$  как рациональное число и как иррациональное. Поэтому

$S_n = 0$ , если все  $t_i$  иррациональные и

$S_n = b - a$ , если все  $t_i$  рациональные,

поэтому не существует предел интегральных сумм  $S_n$ .

# Некоторые классы интегрируемых функций

- монотонные,
- непрерывные,
- кусочно-непрерывные.

# Теорема (о среднем)

- Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ ,  
то существует  $c \in [a; b]$ :

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

**Доказательство.** Обозначим  $M = \max_{[a;b]} f(x)$ ,  $m = \min_{[a;b]} f(x)$ .

Тогда  $\forall x \in [a; b] \Rightarrow m \leq f(x) \leq M$  и после интегрирования этого двойного неравенства получим

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx ;$$

$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$ , то есть  $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$ .

Но для любого числа  $A \in [m; M]$  по свойству непрерывной на отрезке функции  $\exists c \in [a; b]: f(c) = A$ .

Итак,  $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ ;  $f(c)(b - a) = \int_a^b f(x) dx$ , ч. т. д.

- Интеграл как функция верхнего предела.

Пусть функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a; b]$ . Тогда она интегрируема на  $[a; x] \forall x \in [a; b]$  и можно рассмотреть функцию

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

**Теорема.**

Если  $f(x)$  интегрируема на  $[a; b]$ , то  $F(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ .

- **Доказательство.**

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Интегрируемая функция ограничена  $\Rightarrow |f(t)| \leq M \quad \forall t \in [a; b]$ ,

тогда  $|\Delta F| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \leq M|\Delta x|$ , и значит,  $\Delta F$  – бесконечно

малая при  $\Delta x \rightarrow 0$ , что равносильно непрерывности  $F(x)$ , ч. т. д.

- **Теорема.** Пусть функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a; b]$  и непрерывна в точке  $x_0 \in [a; b]$ . Тогда функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

дифференцируема в точке  $x_0$ , причем  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

**Следствие.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то функция  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  является ее первообразной на  $[a; b]$ .

- **Теорема.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и  $\Phi(x)$  – какая-то ее первообразная на  $[a; b]$ . Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(x) \Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

(формула Ньютона-Лейбница).

**Доказательство.** Ранее было отмечено, что функция

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

является в данных условиях первообразной функции  $f(x)$  на  $[a; b]$ , поэтому  $\Phi(x) = F(x) + C$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt = F(b) - F(a) = \\ &= (\Phi(b) - C) - (\Phi(a) - C) = \Phi(b) - \Phi(a), \text{ ч. т. д.} \end{aligned}$$

# Примеры

$$\int_0^1 (x^2 - 3\sqrt{x}) dx = \left( \frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \cdot 2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \frac{x}{2} dx = -2 \cos \frac{x}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4$$