Урок 54.

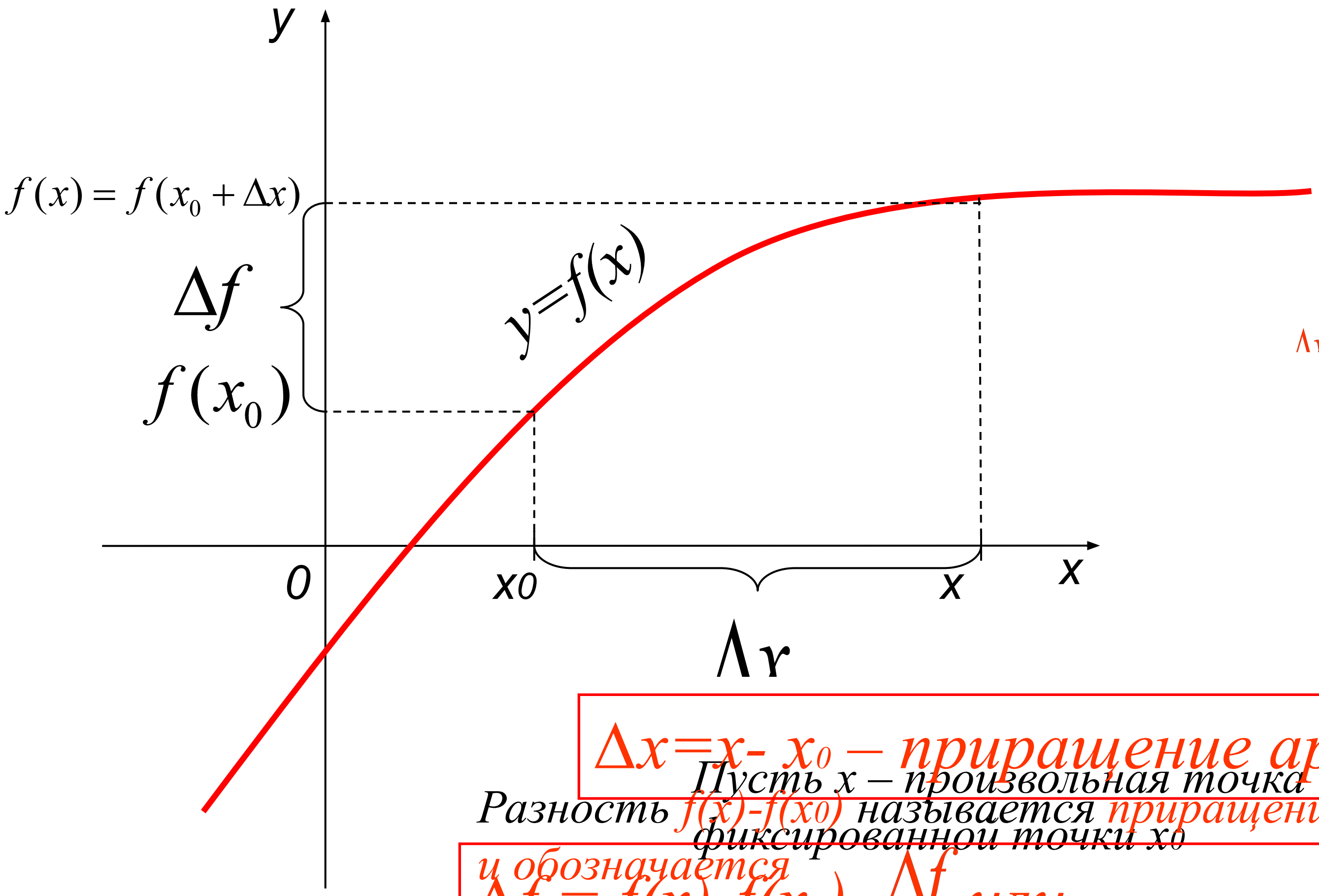
Тема: Определение производной. Правила вычисления производных. Таблица производных

Цели обучения:

- 10.3.1.9 - знать определение производной функции и находить производную функции по определению;
- 10.3.1.10 - находить производные постоянной функции и степенной функции;
- 10.3.1.11 - знать и применять правила дифференцирования

Изучение нового материала

Пусть дана функция $y=f(x)$



$\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента

Пусть x – произвольная точка в окрестности фиксированной точки x_0

Разность $f(x)-f(x_0)$ называется приращением функции и обозначается Δf

$\Delta f = f(x)-f(x_0)$, Δf или

Разность $x-x_0$ называется приращением аргумента и обозначается

$\Delta f = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ – приращение функции

$\Delta x = x - x_0$ $\quad$ $x = x_0 + \Delta x$

Определение производной

Если разностное отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ имеет предел $x \to 0$ при то его называют производной функции в т. x_0

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Вообще данную операцию называют **дифференцированием функции**, а **производная** – это результат дифференцирования

Пример: $f'(x) = (x^2)'$ и найти $f'(x_0)$,

$$\textit{если } x_0 = -3$$

$$1)\ \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0{}^2 = x_0{}^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0{}^2 =$$

$$= 2x_0\Delta x + \Delta x^2$$

$$2)\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$3)\ \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

т.е. $f'(x) = (x^2)' = 2x$ - производная функции

$f'(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$ - производная функции в т. x_0

Схема вычисления производной функции:

1. Найти приращение функции на отрезке [x; x+Δx]:

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$$

2. Разделить приращение функции на приращение аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

3. Найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

Задание: Найти производную функции:

1. $y = x^3$
2. $y = C, где\, C - число$
3. $y = kx + b, где\, k\, и\, b\, числа$
4. $y = \frac{1}{x}$
5. $y = \sqrt{x}$

Решение 1: Вычислить производную функции $y = x^3$

1. $$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 =$$

$$= 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3$$

2. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

3. $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + \lim_{\Delta x \to 0} 3x \cdot \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x^2 =$$

$$= 3x^2 + 0 + 0 = 3x^2$$

Таблица простейших производных

ФУНКЦИЯ	ПРОИЗВОДНАЯ
$(C)'$	0
$(x)'$	1
$(x^n)'$	nx^{n-1}
$\left(\dfrac{1}{x}\right)'$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$(\sqrt{x})'$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Правила дифференцирования (вычисления производных)

- (1) $$(u+v)' = u' + v'$$
- (2) $$(uv)' = u'v + uv'$$
- (3) $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
- **Следствия:**

$$1)\ (Cv)' = Cv' \quad 2)\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}$$

Примеры.

1) $$f'(x)=\left(\frac{x^3}{9}\right)'$$

2) $$f'(x)=(2x^3-\frac{1}{2}x^2+4x-12)'$$

3) $$f'(x)=\left(-\frac{x^4}{8}+\frac{2}{x}+10\right)'$$

4) $$f'(x)=(14\sqrt{x})'$$

Примеры.

6) $f'(x) = \left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{4} \right)'$

7/1) $f'(x) = (x^2(5-2x))'$

7/2) $f'(x) = (x^2(5-2x))' = (5x^2 - 2x^3)'$