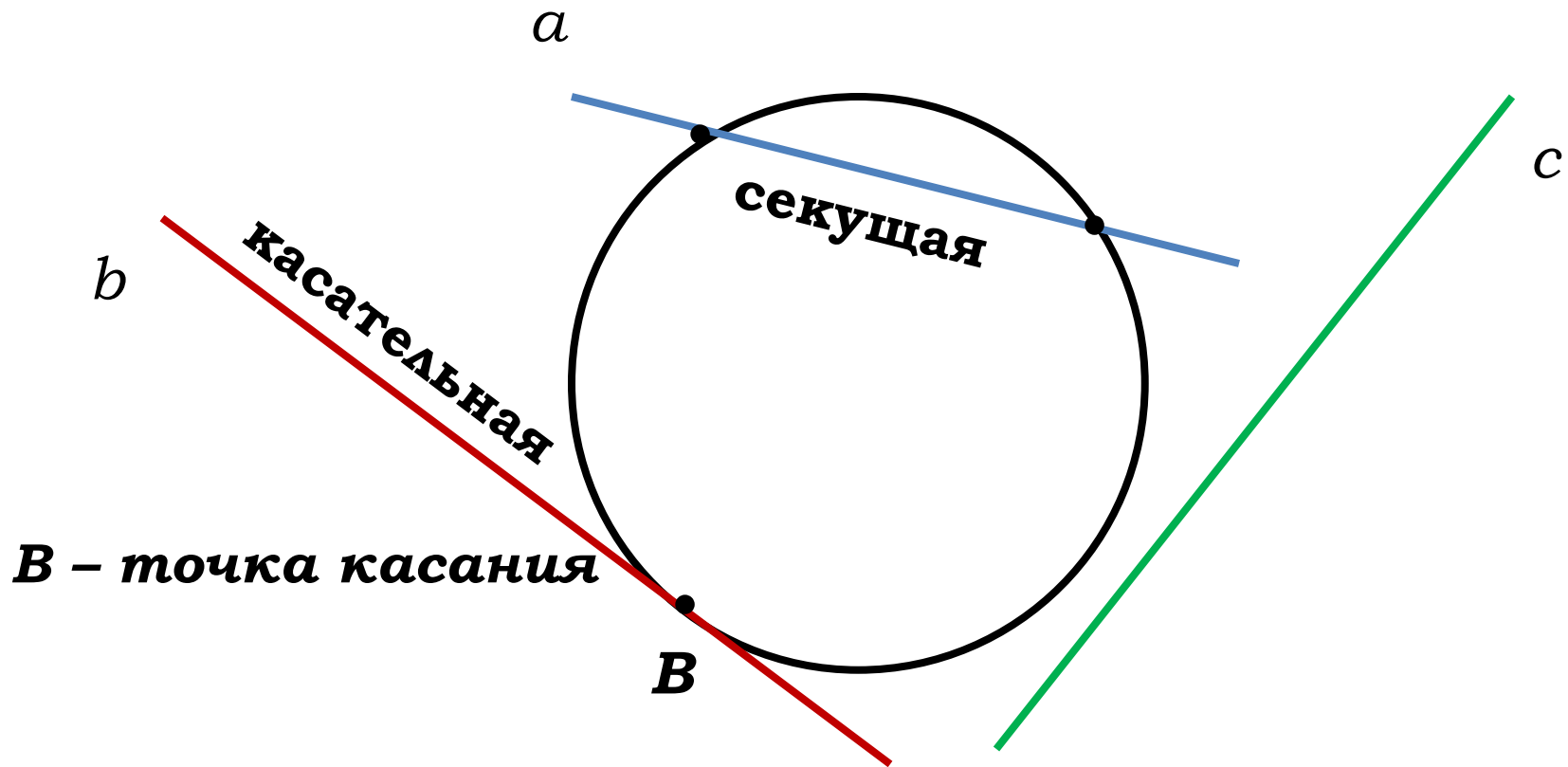


# Взаимное расположение прямой и окружности



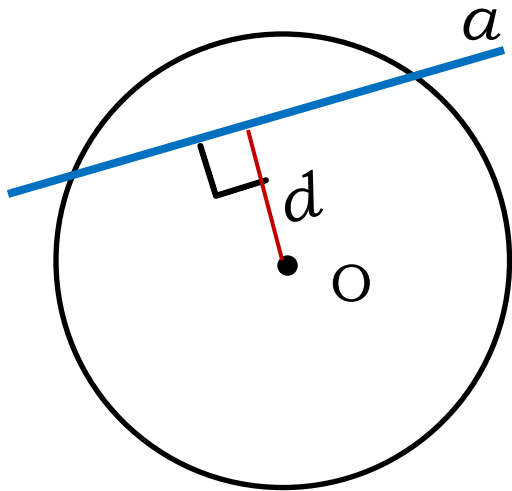
*В* – точка касания

**Подумайте, какая прямая называется секущей?**

**Подумайте, какая прямая называется касательной?**

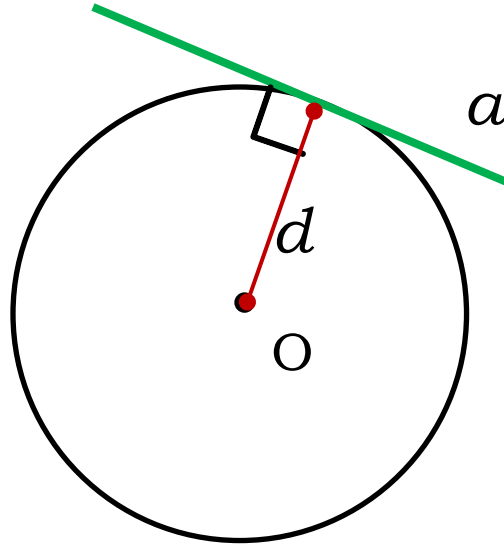
# Взаимное расположение прямой и окружности

$d$  – расстояние от центра  $O$  окружности до прямой  $a$



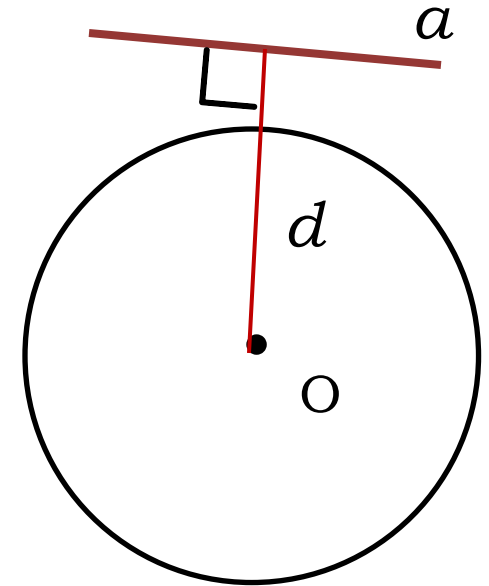
$$d < R$$

$a$  - секущая



$$d = R$$

$a$  - касательная

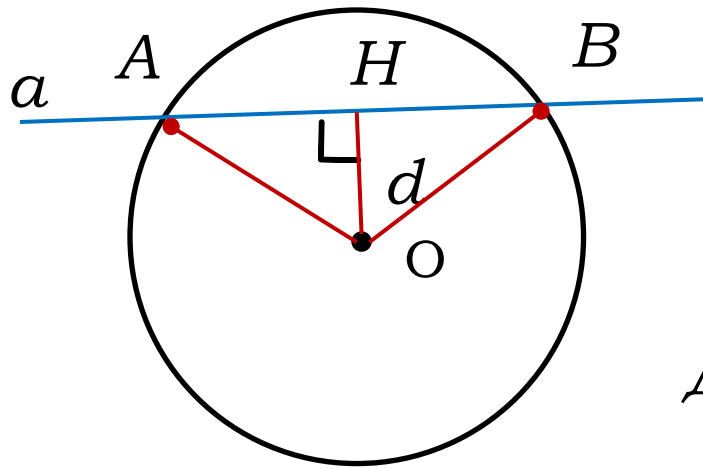


$$d > R$$

$a$  - не  
пересекает  
окружность

Докажем эти три утверждения

## 1 случай



Дано : окр. $(O; R)$ , прямая  $a$   
 $OH \perp a$ ,  $OH = d$ ,  $d \leq R$

Доказать: прямая  $a$  и окружность  
 $(O; R)$  имеют две общие точки

Отложим на прямой  $a$  от точки  $H$  два отрезка  $HB$  и  $HA$ :

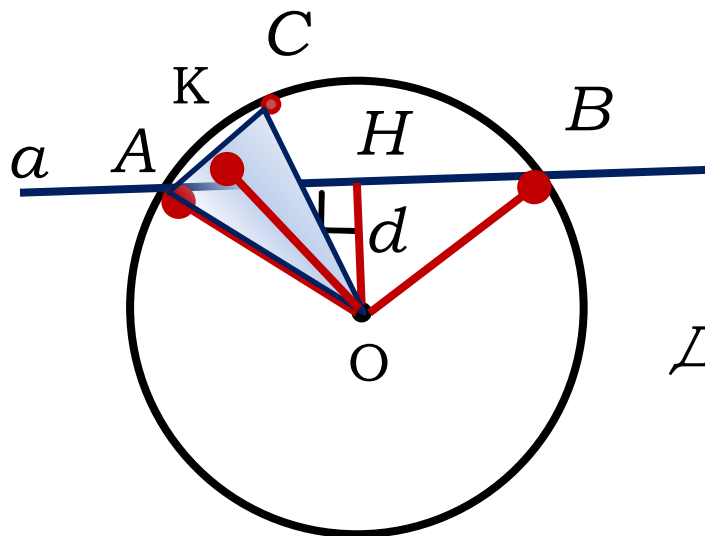
$$HA = HB = \sqrt{R^2 - d^2}$$

Проведем отрезки  $OA$  и  $OB$

$$OA^2 = OH^2 + HA^2 = d^2 + \left(\sqrt{R^2 - d^2}\right)^2 = d^2 + R^2 - d^2 = R^2, \underline{OA = R}$$

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = d^2 + \left(\sqrt{R^2 - d^2}\right)^2 = d^2 + R^2 - d^2 = R^2, \underline{OB = R}$$

Вывод: Точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности, то есть  
прямая и окружность имеют две общие точки



Дано : окр.  $(O; R)$ , прямая  $a$   
 $OH \perp a$ ,  $OH = d$ ,  $d < R$

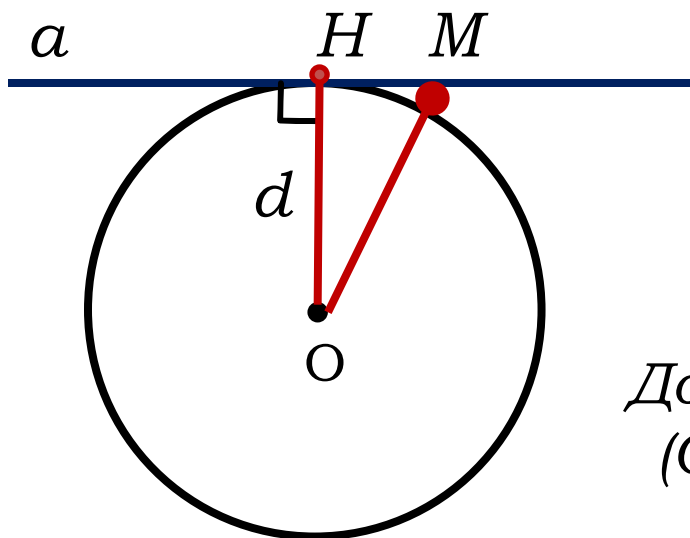
Доказать: прямая  $a$  и окружность  $(O; R)$  имеют две общие точки

Предположим, что прямая  $a$  и окружность имеют ещё одну общую точку  $C$

$\triangle AOC$  – равнобедренный,  $AC$  лежит на прямой  $a$ ,  
 $OK$  – медиана, значит  $OK$  – высота

Получили, что к прямой  $a$  из точки  $O$  проведены два перпендикуляра –  $OH$  и  $OK$ , что невозможно.

Вывод: наше предположение неверно, значит прямая  $a$  и окружность имеют две общие точки.



## 2 случай

Дано : окр. $(O; R)$ , прямая  $a$

$OH \perp a$ ,  $OH = d$ ,  $d = R$

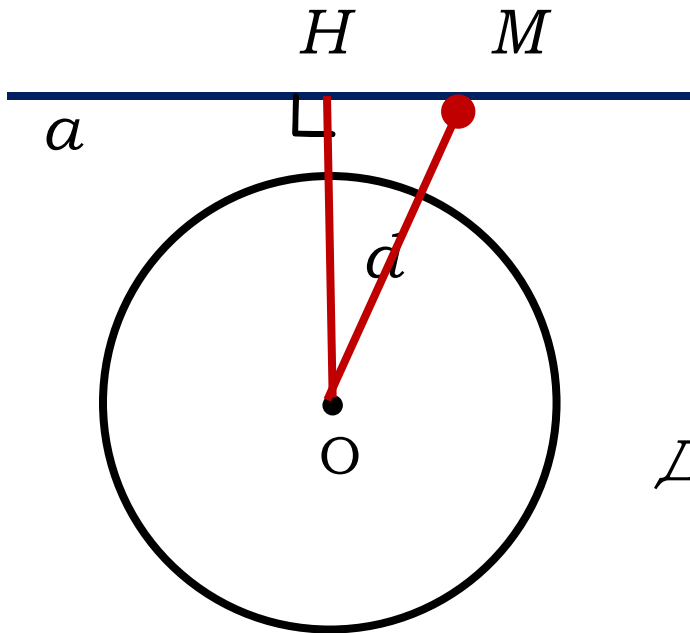
Доказать: прямая  $a$  и окружность  $(O; R)$  имеют только одну общую точку

$OH = R$ , значит точка  $H$  лежит на окружности

Возьмем на прямой  $a$  какую-нибудь точку  $M$ ,  
проведем отрезок  $OM$

$OM > OH$ , то есть  $OM > R$ ,  
значит точка  $M$  не лежит на окружности.

**Вывод: Точка  $H$  – единственная общая точка прямой  $a$  и окружности.**



### 3 случай

Дано : окр. $(O; R)$ , прямая  $a$

$OH \perp a$ ,  $OH = d$ ,  $d \gg R$

Доказать: прямая  $a$  и окружность  $(O; R)$  не имеют общих точек

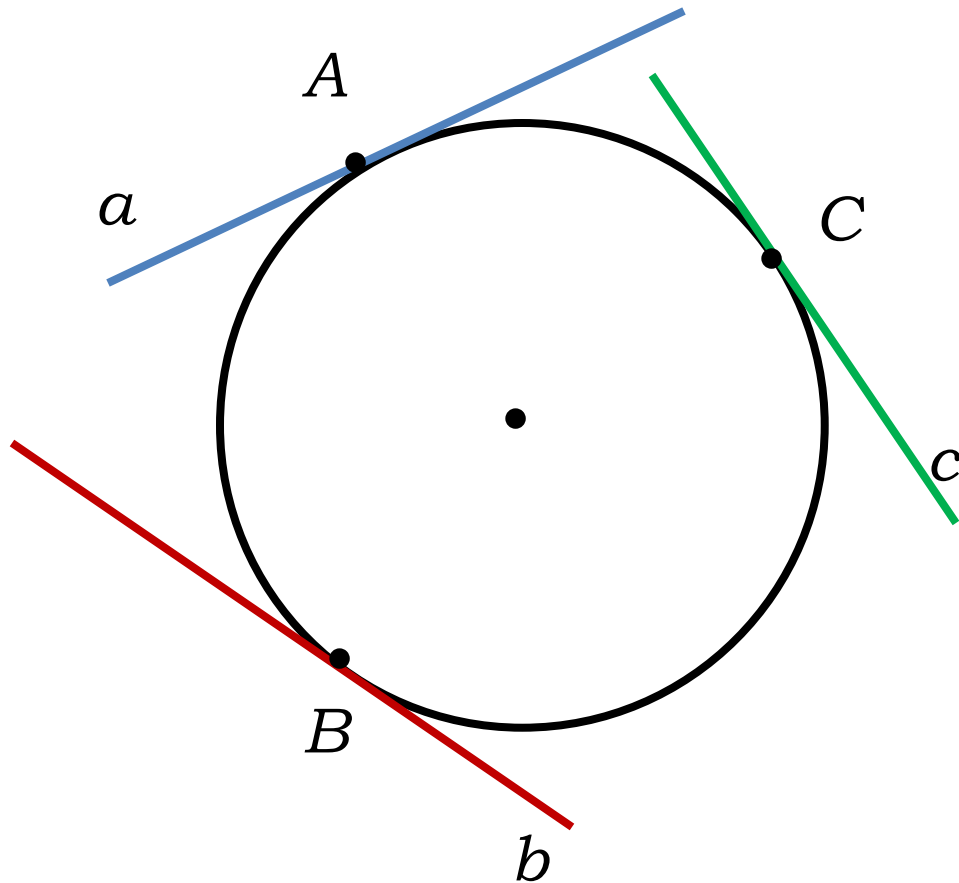
$OH > R$ , значит точка  $H$  не лежит на окружности

Возьмем на прямой  $a$  какую-нибудь точку  $M$ ,  
проведем отрезок  $OM$

$OM > OH > R$ , значит точка  $M$  также не лежит на  
окружности

**Вывод: прямая  $a$  и окружность не имеют общих точек.**

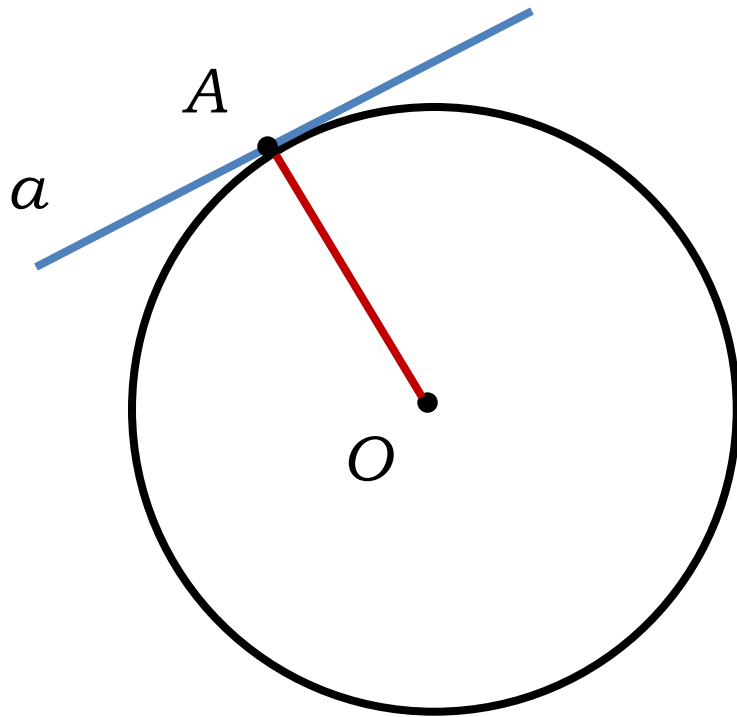
# Касательная к окружности



Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности.

# Свойство касательной к окружности

**Теорема** Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.



*Дано : окр.( $O$ ;  $R$ ),  $a$  – касательная*

*$A$  – точка касания*

*Доказать :  $OA \perp a$*

Предположим противное.

Тогда  $OA$  – наклонная к прямой  $a$ .

Если провести к прямой  $a$  перпендикуляр  $OH$ , то  $OH < OA$

Получили  **$d < R$**

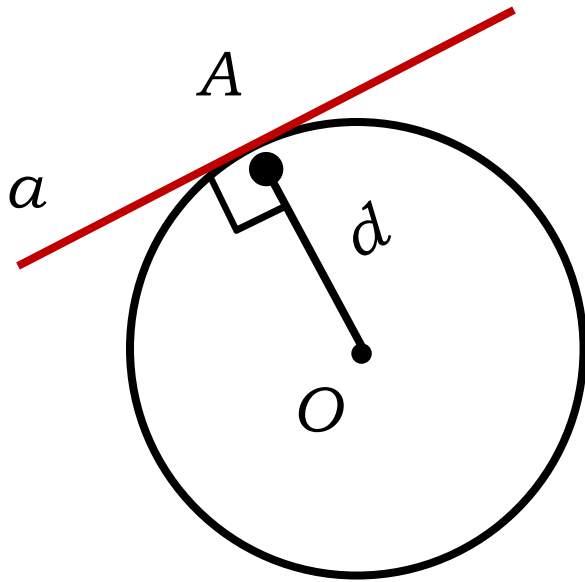
Это означает, что прямая  $a$  и окружность имеют две общие точки ( $a$  – секущая).

Это противоречит условию теоремы, значит наше предположение неверно. Остается  $OA \perp a$



# Признак касательной к окружности

**Обратная теорема.** Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной



*Дано : окр.( $O$ ;  $R$ ),  $A \in (O; R)$*

*$OA$  – радиус,  $a \perp OA$*

*Доказать :  $a$  – касательная*

$OA = R, OA \perp a,$

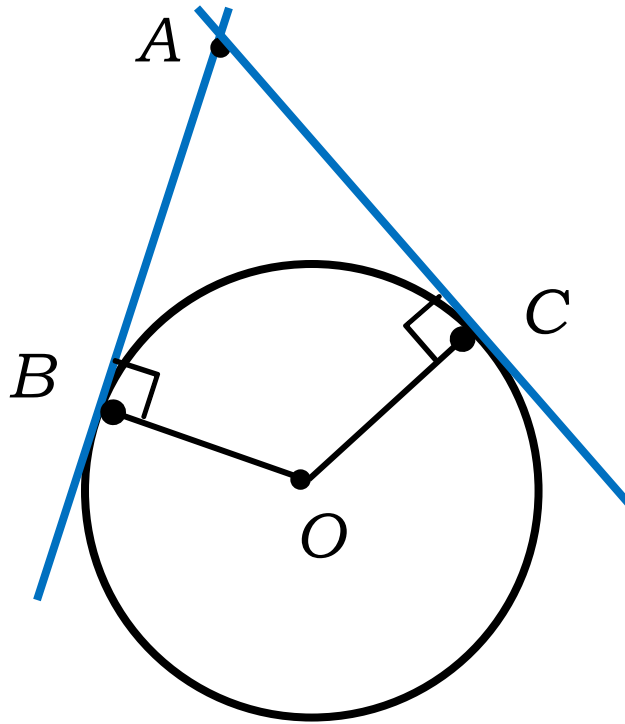
$OA$  – расстояние от точки  $O$  до прямой  $a$

$$\mathbf{d = R,}$$

значит прямая  $a$  и окружность имеют одну общую точку.

Вывод:  $a$  – касательная

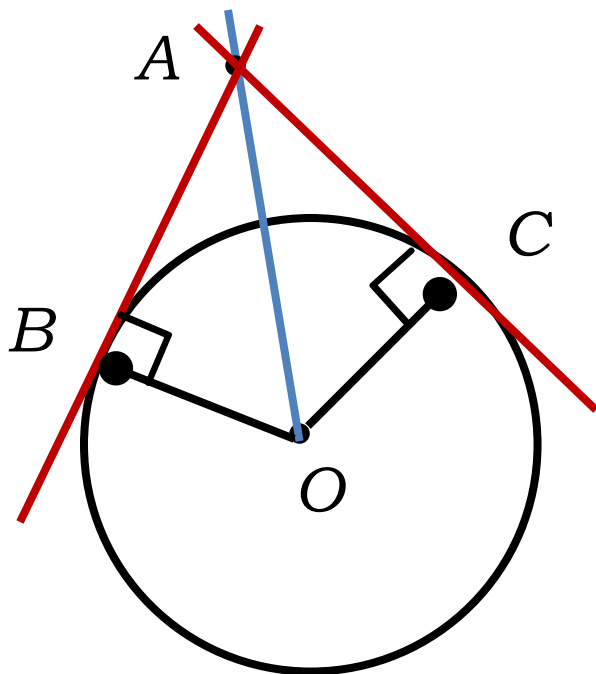
## Отрезки касательных



**Определение.** Отрезки  $AB$  и  $AC$  называются отрезками касательных, проведенных из точки  $A$ , если прямые  $AB$  и  $AC$  являются касательными к окружности, точки  $B$  и  $C$  – точками касания.

# Свойство отрезков касательных

**Теорема** Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.



*Дано : окр.(O; R),*

*AB и AC – касательные*

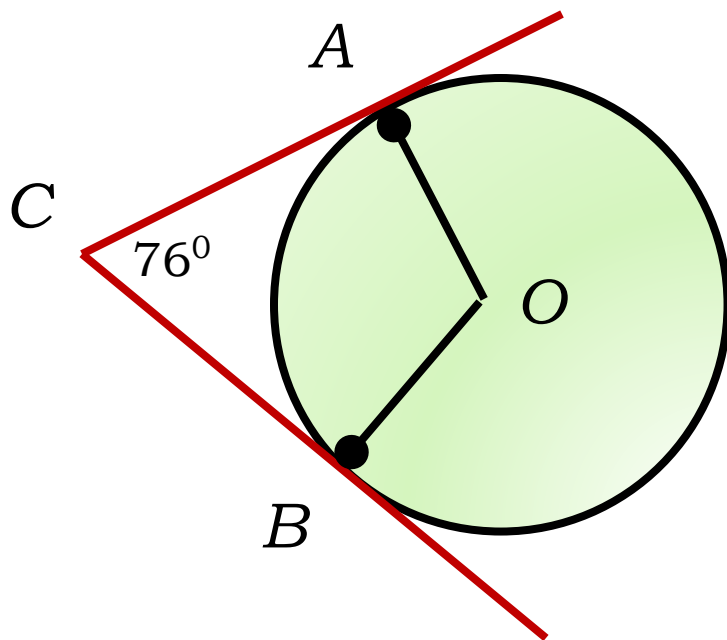
*B и C – точки касания*

*Доказать :  $AB = AC$ ,  $\angle BAO = \angle CAO$*

*$\triangle BAO = \triangle CAO$  (Почему?)*

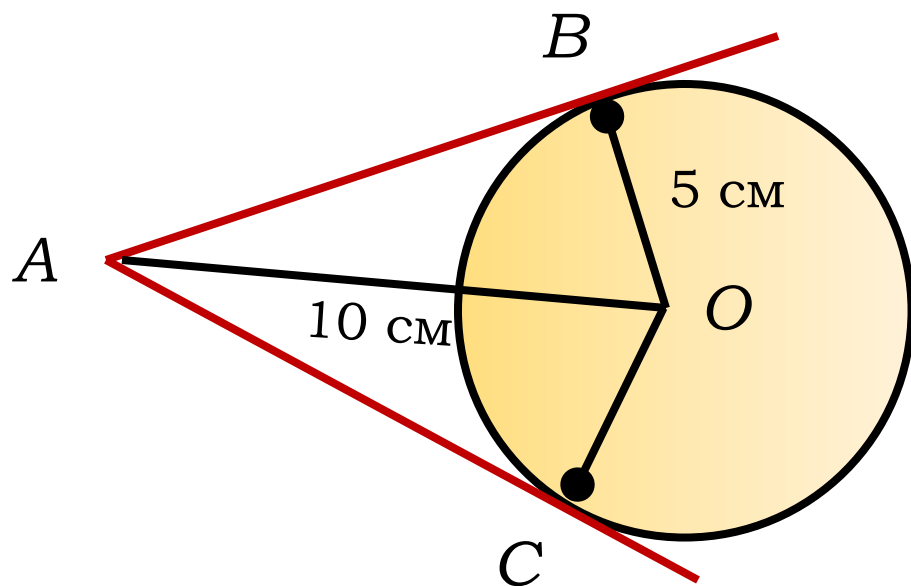
*Из равенства треугольников следует ...*

# Задача 1



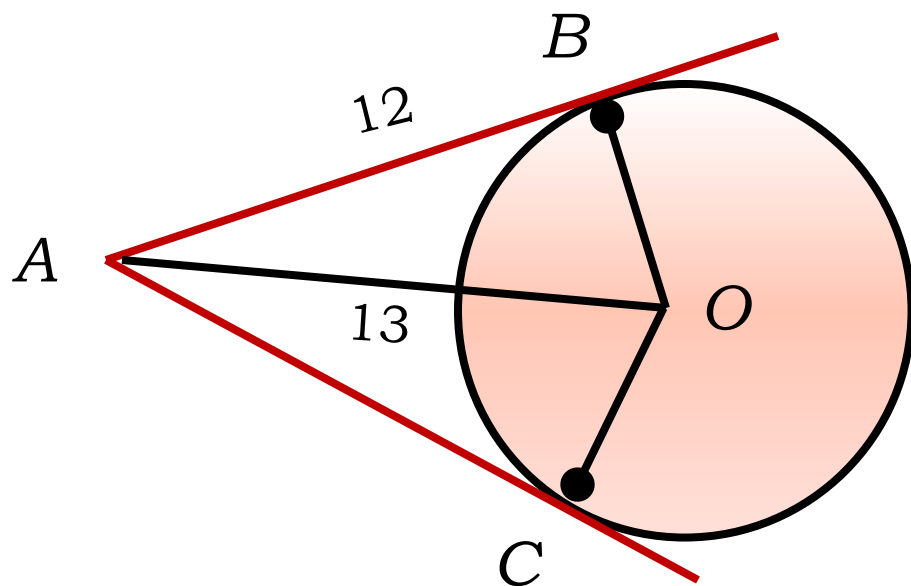
*CA и CB - касательные к окружности, точки A и B – точки касания,  $\angle ACB = 76^\circ$ . Найдите величину угла AOB.*

## Задача 2



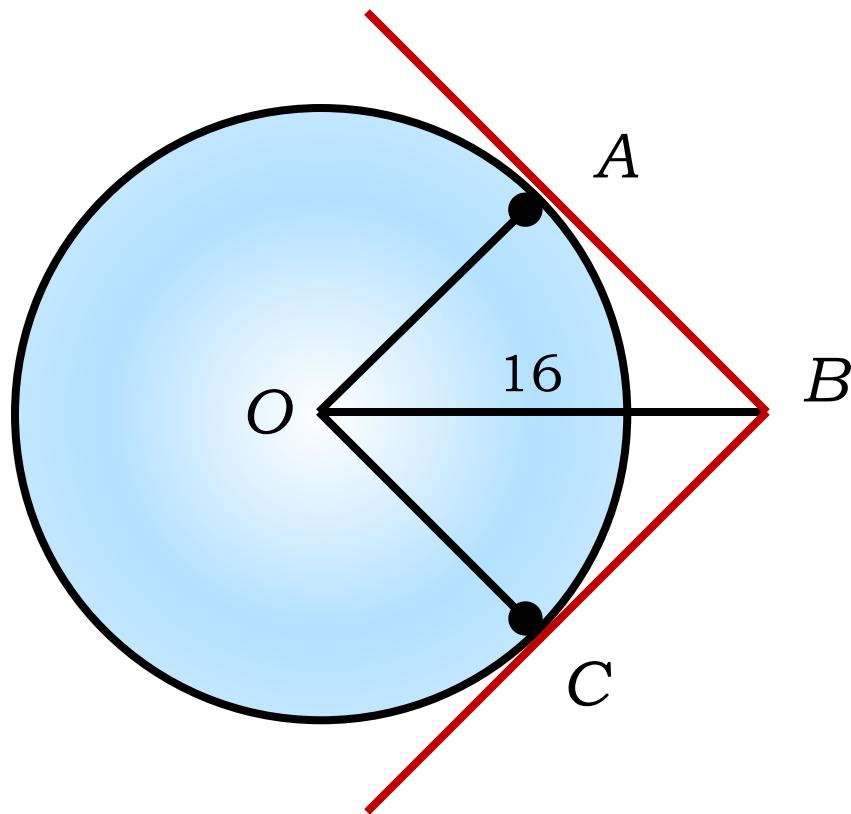
*AC и AB - касательные к окружности, точки B и C – точки касания,  $AO = 10$  см,  $OB = 5$  см. Найдите величину углов  $BAC$  и  $BOC$ .*

## Задача 3



*AC и AB - касательные к окружности, точки B и C – точки касания,  $AO = 13$  см,  $AB = 12$  см. Найдите радиус окружности.*

## Задача 4



*BA и BC - касательные к окружности, точки A и C - точки касания,  $OB = 16$  см,  $OA \perp OC$ . Найдите отрезки касательных к окружности.*