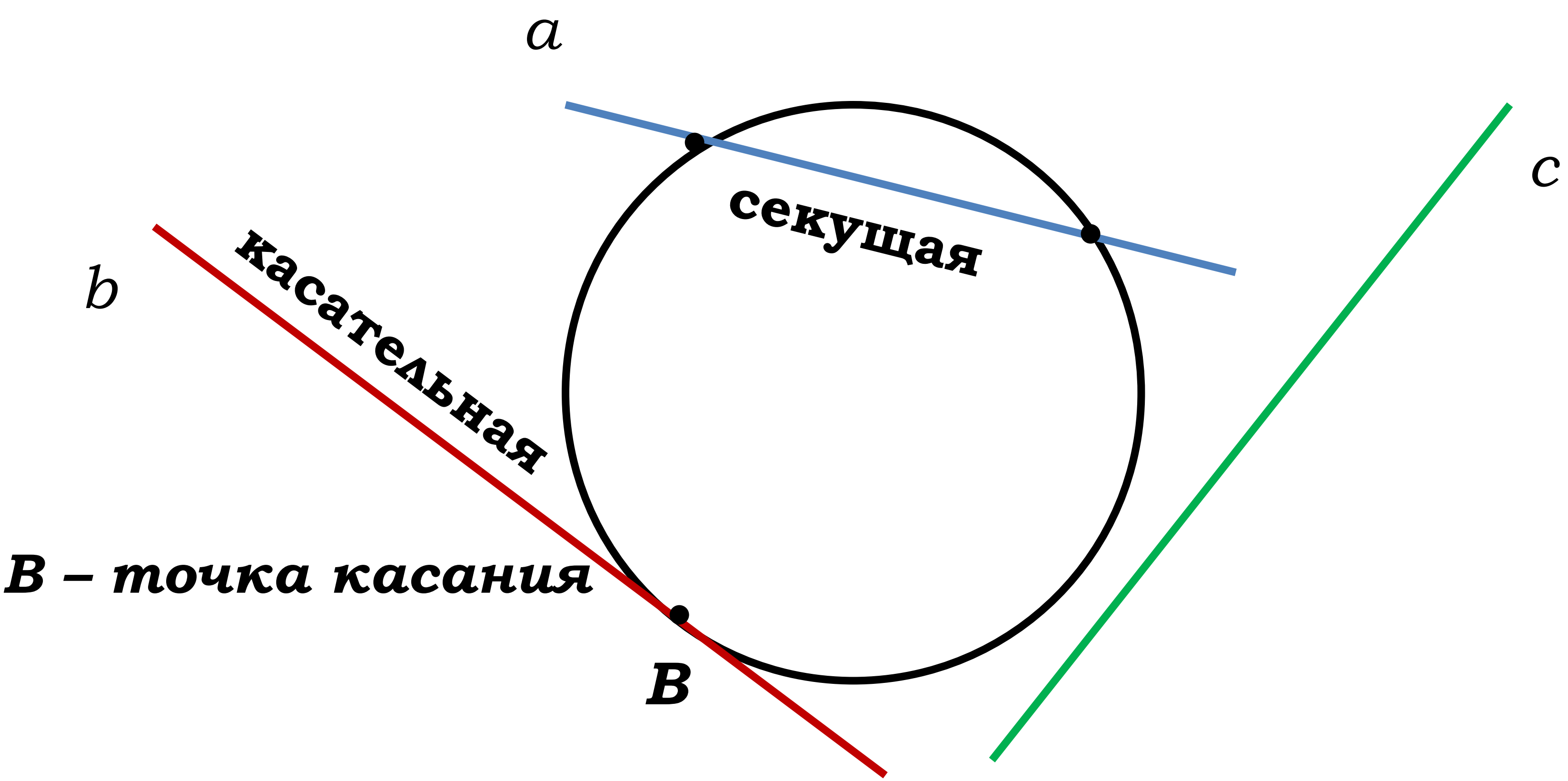
Взаимное расположение прямой и окружности

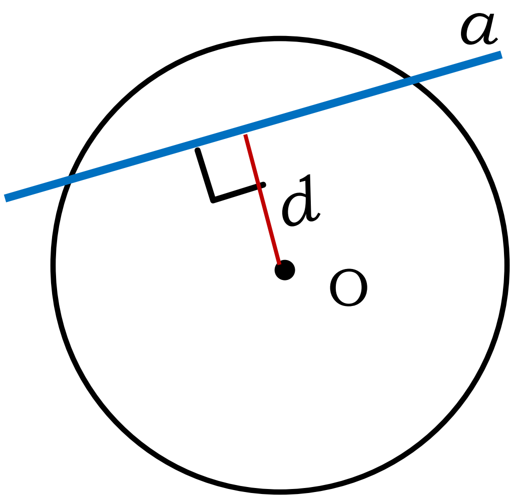


Подумайте, какая прямая называется секущей?

Подумайте, какая прямая называется касательной?

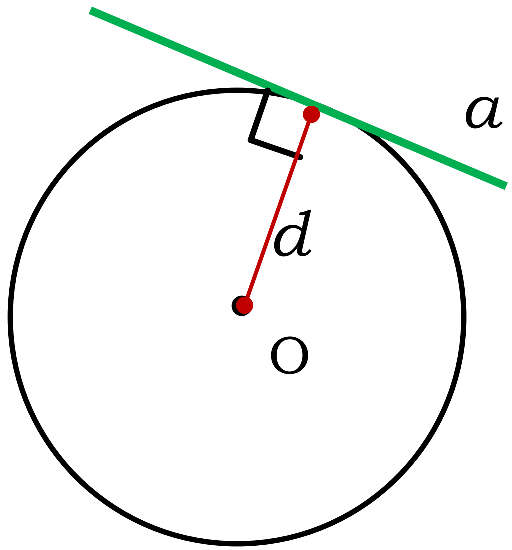
Взаимное расположение прямой и окружности

d* – расстояние от центра О окружности до прямой *а



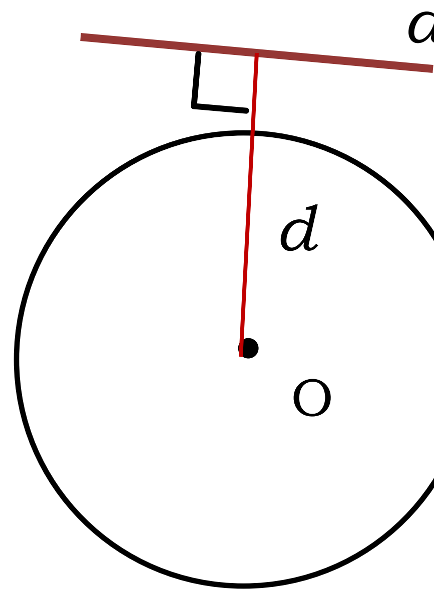
$$d < R$$

а - секущая



$$d = R$$

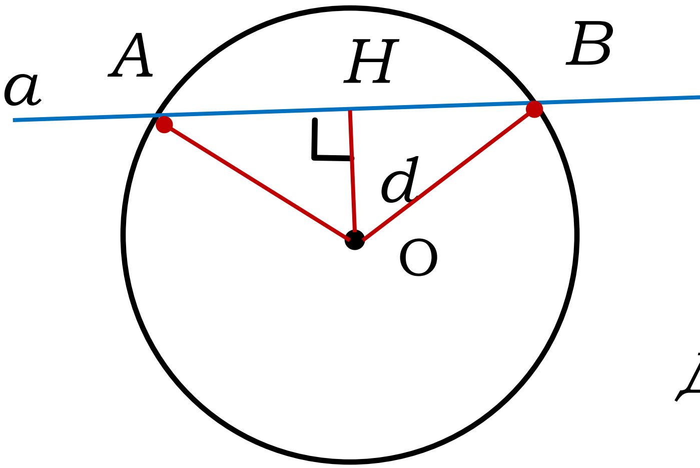
а - касательная



$$d > R$$

а - не пересекает окружность

Докажем эти три утверждения



1 случай

$$\text{Дано}: \text{окр.}(O;\, R),\ \text{прямая } a$$

$$OH \perp a,\ OH = d,\ d < R$$

Доказать: прямая а и окружность (O; R) имеют две общие точки

Отложим на прямой а от точки H два отрезка HB и HA:

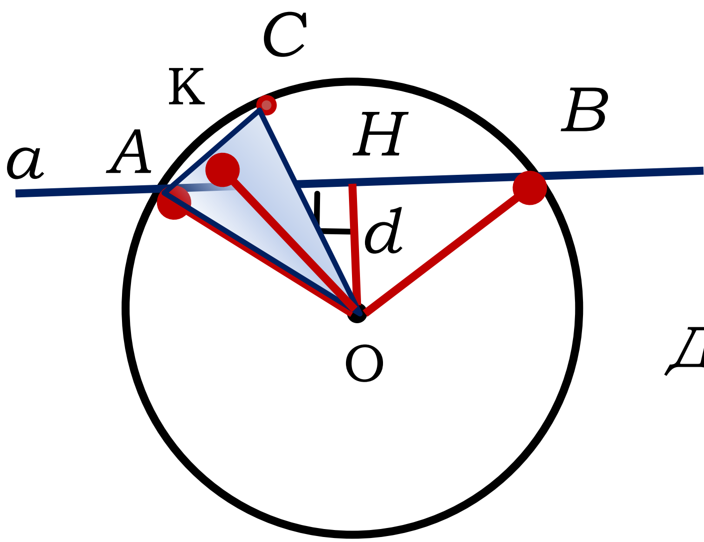
$$HA = HB = \sqrt{R^2 - d^2}$$

Проведем отрезки OA и OB

$$OA^2 = OH^2 + HA^2 = d^2 + \left(\sqrt{R^2 - d^2}\right)^2 = d^2 + R^2 - d^2 = R^2,\ \underline{OA = R}$$

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = d^2 + \left(\sqrt{R^2 - d^2}\right)^2 = d^2 + R^2 - d^2 = R^2,\ \underline{OB = R}$$

Вывод: Точки A и B лежат на окружности, то есть прямая и окружность имеют две общие точки



Дано: окр.$(O;\ R)$, прямая a

$OH \perp a,\ OH = d,\ d < R$

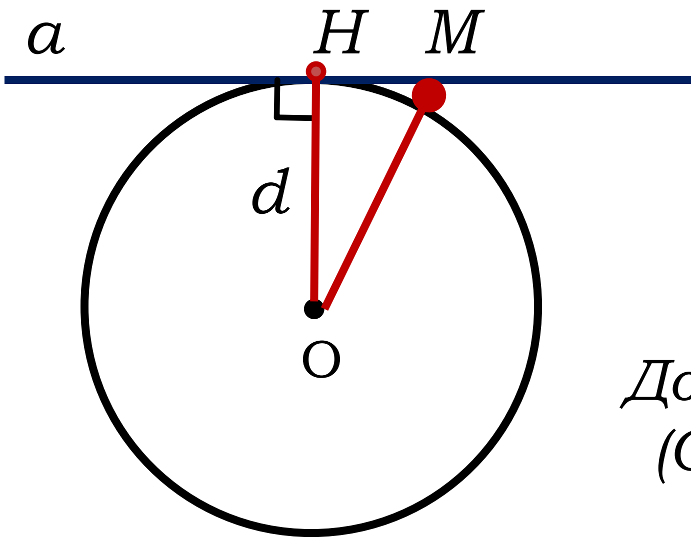
Доказать: прямая а и окружность (O; R) имеют две общие точки

Предположим, что прямая а и окружность имеют ещё одну общую точку С

ΔАОС – равнобедренный, АС лежит на прямой а, ОК – медиана, значит ОК - высота

Получили, что к прямой а из точки О проведены два перпендикуляра – ОН и ОК, что невозможно.

Вывод: наше предположение неверно, значит прямая а и окружность имеют две общие точки.



2 случай

$$Дано: окр.(O;\, R),\ прямая\ a$$

$$OH \perp a,\ OH = d,\ d = R$$

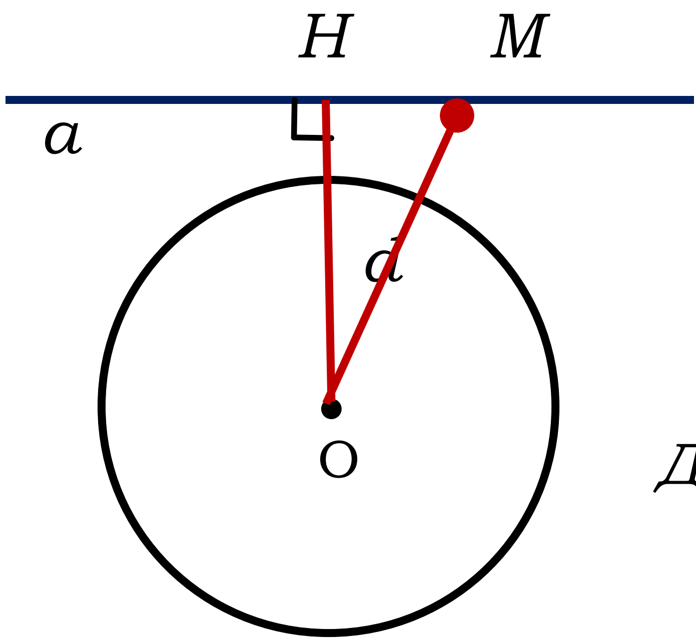
Доказать: прямая а и окружность (О; R) имеют только одну общую точку

OH = R, значит точка Н лежит на окружности

Возьмем на прямой а какую-нибудь точку М, проведем отрезок ОМ

ОМ > ОН, то есть ОМ > R,
значит точка М не лежит на окружности.

Вывод: Точка Н – единственная общая точка прямой а и окружности.



3 случай

Дано : окр.(O; R), прямая a

$OH \perp a, OH = d, d > R$

Доказать: прямая a и окружность (O; R) не имеют общих точек

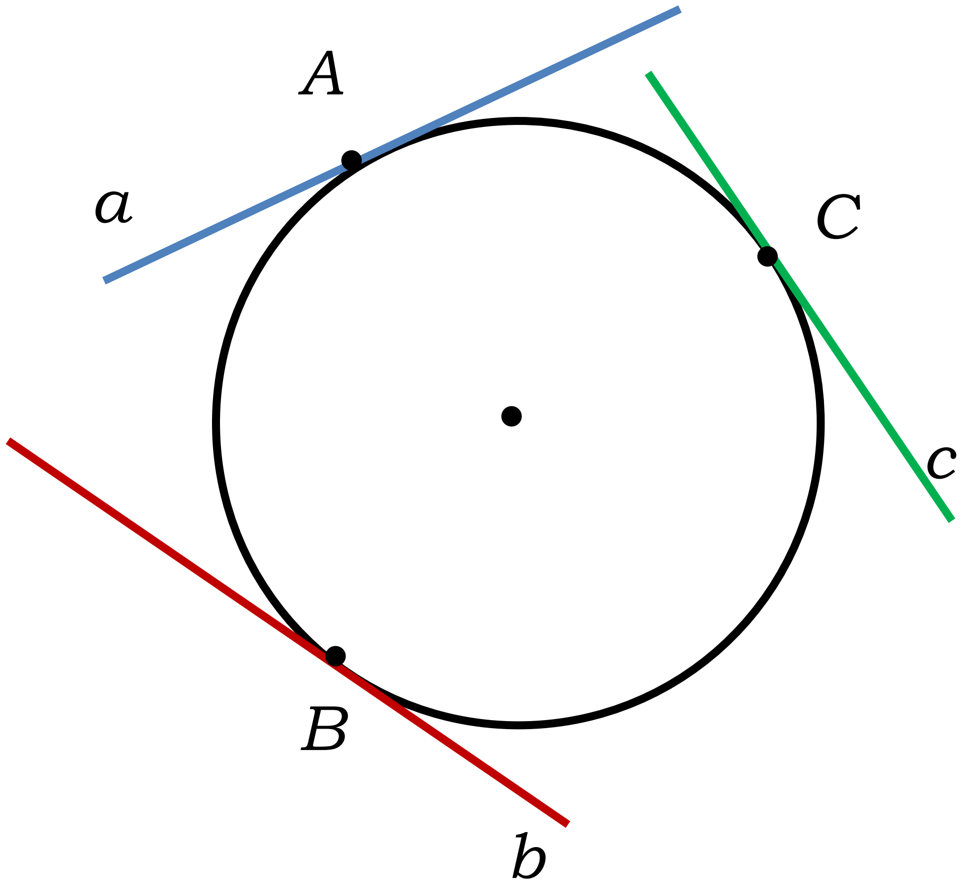
OH > R, значит точка H не лежит на окружности

Возьмем на прямой a какую-нибудь точку M, проведем отрезок OM

OM > OH > R, значит точка M также не лежит на окружности

Вывод: прямая a и окружность не имеют общих точек.

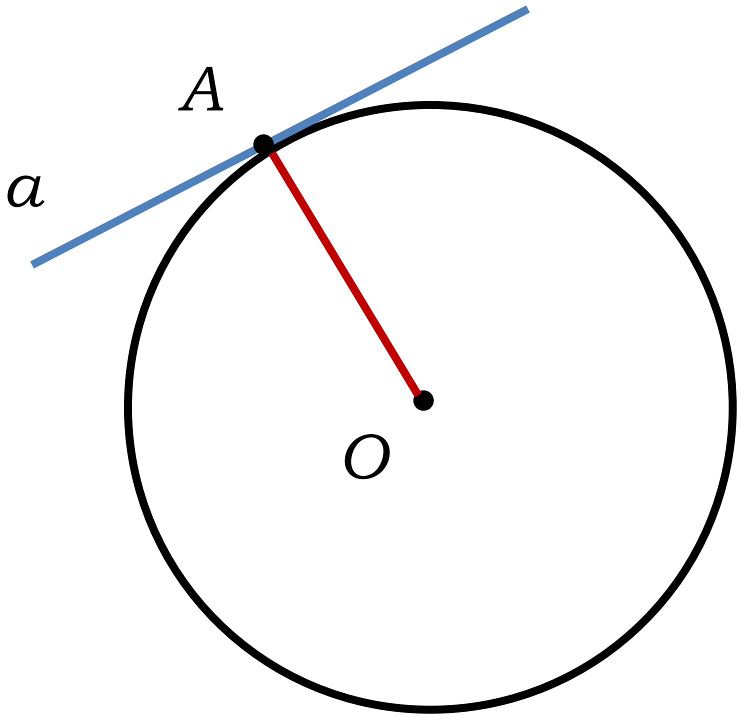
Касательная к окружности



Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности.

Свойство касательной к окружности

Теорема Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.



$\text{Дано}: \ \text{окр.}(O; R), \ a - \text{касательная}$

$A - \text{точка касания}$

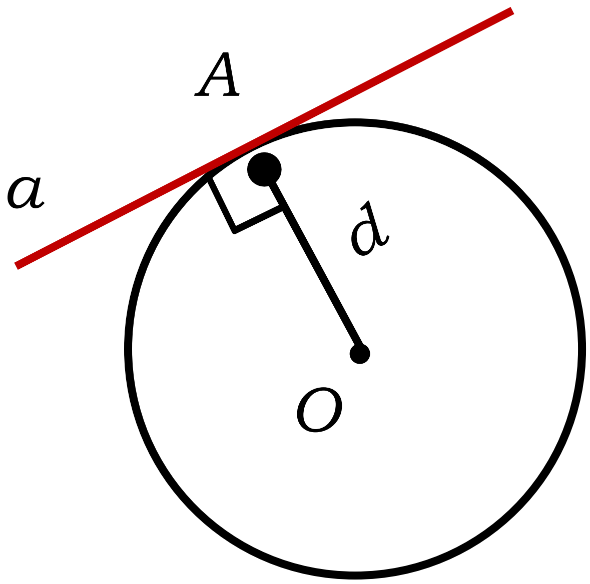
$\text{Доказать}: OA \perp a$

Предположим противное.
Тогда OA – наклонная к прямой *a*.
Если провести к прямой *a* перпендикуляр OH, то OH < OA
Получили **d < R**
Это означает, что прямая *a* и окружность имеют две общие точки (*a* - секущая).

Это противоречит условию теоремы, значит наше предположение неверно. Остается OA $\perp$ *a*

Признак касательной к окружности

Обратная теорема. **Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной**



$Дано:\ окр.(O;R),\ \ A \in (O;R)$

$OA - радиус,\ a \perp OA$

$Доказать: a - касательная$

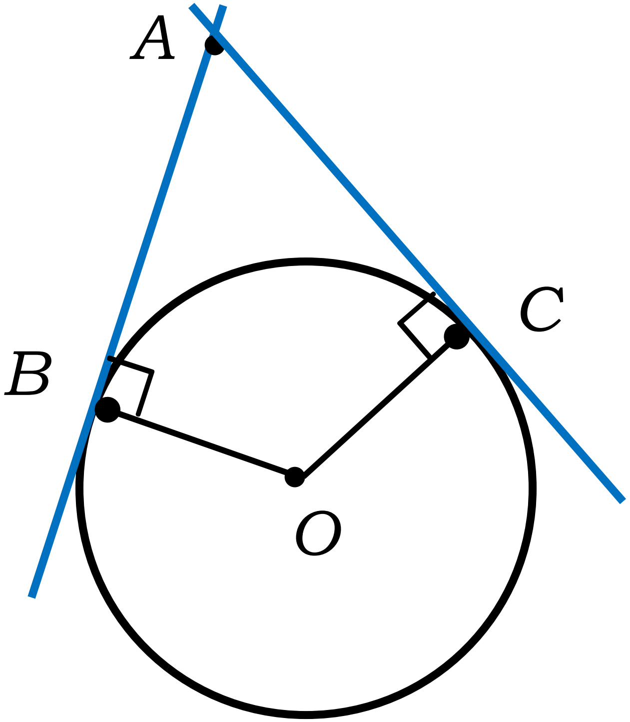
$OA = R,\ \ OA \perp a,$

$OA - расстояние\ от\ точки\ O\ до\ прямой\ a$

d = R,

значит прямая *a* и окружность имеют одну общую точку.

Вывод: *a* - касательная

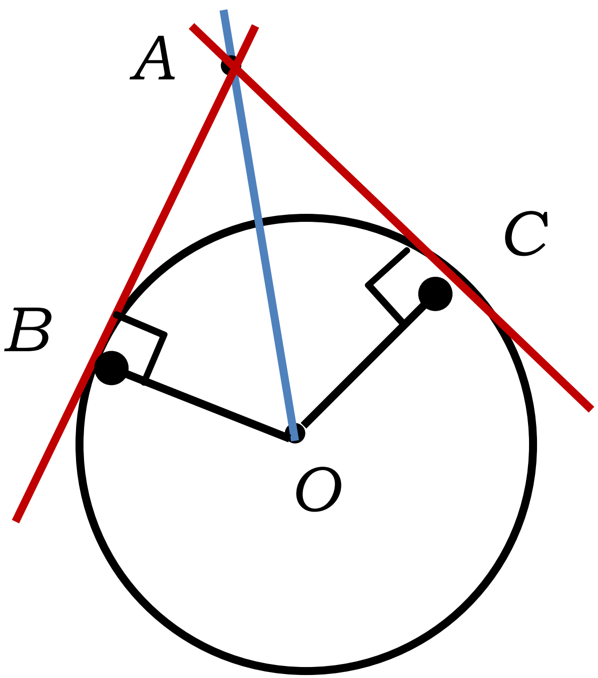


Отрезки касательных

Определение. *Отрезки AB и AC называются отрезками касательных, проведенных из точки A, если прямые AB и AC являются касательными к окружности, точки B и C – точками касания.*

Свойство отрезков касательных

Теорема **Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.**



$Дано: \ окр.(O; R),$

$AB \text{ и } AC - касательные$

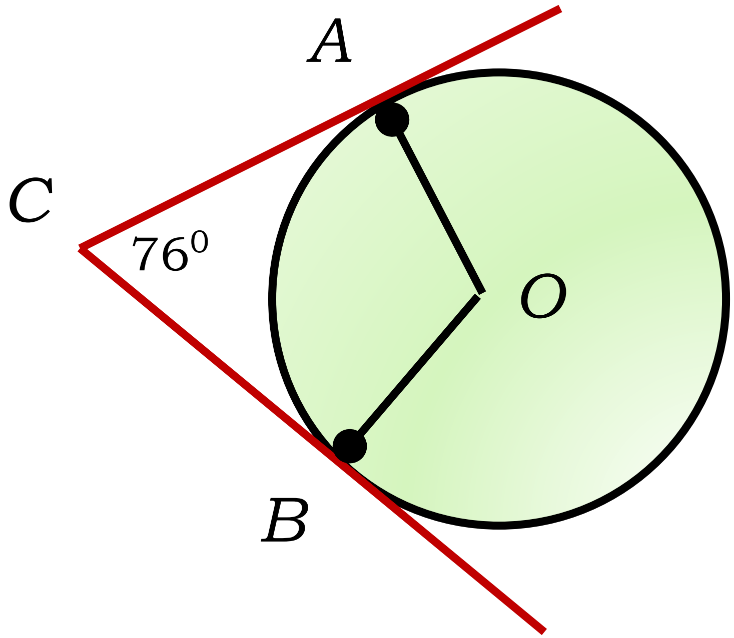
$B \text{ и } C - точки \ касания$

$Доказать: AB = AC, \angle BAO = \angle CAO$

$\Delta BAO = \Delta CAO$ *(Почему?)*

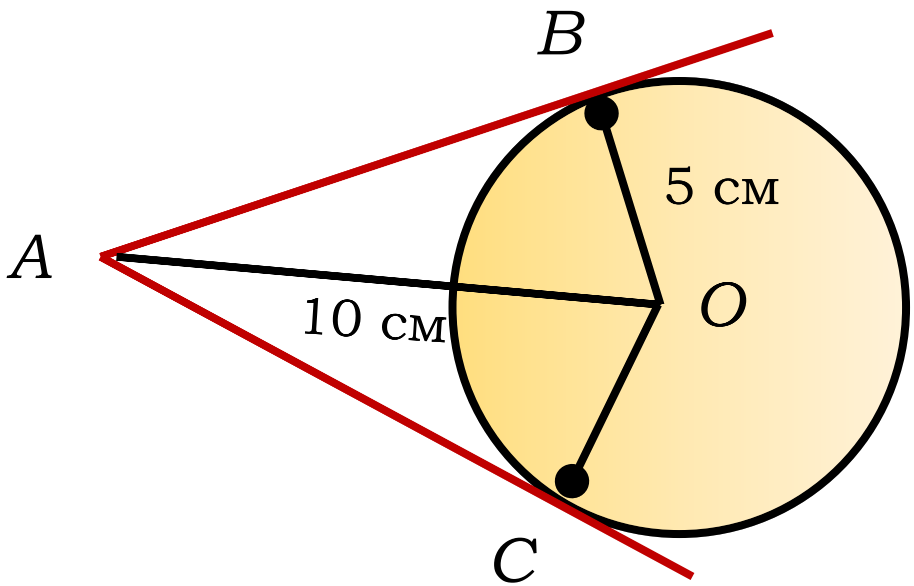
Из равенства треугольников следует …

Задача 1



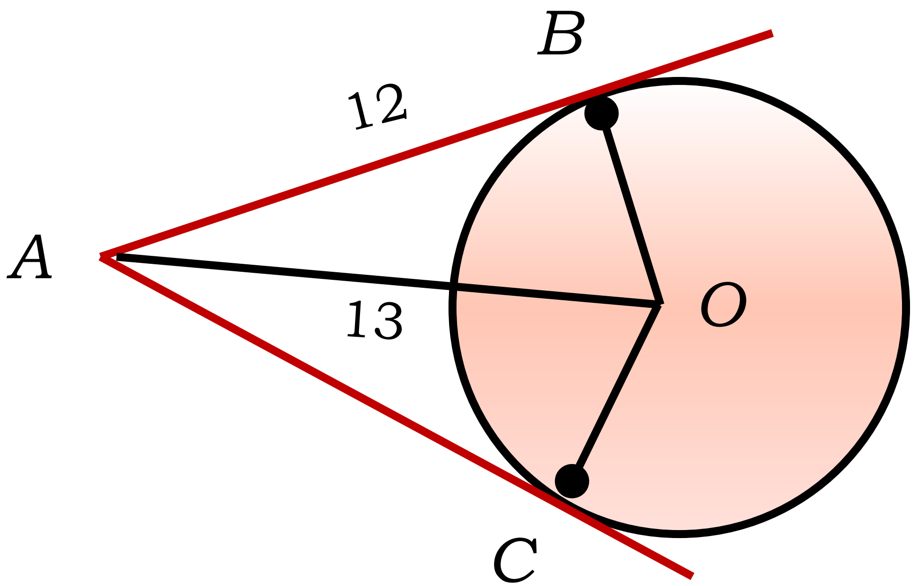
CA и CB - касательные к окружности, точки A и B – точки касания, $\angle ACB = 76^0$. Найдите величину угла AOB.

Задача 2



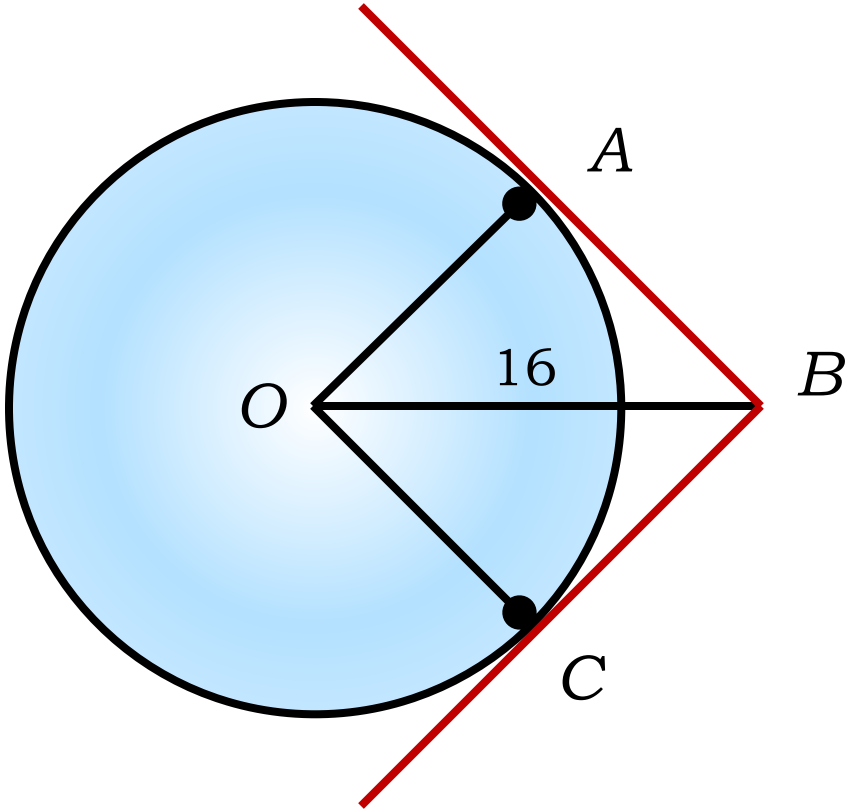
AC и AB - касательные к окружности, точки B и C – точки касания, AO = 10 см, OB = 5 см. Найдите величину углов BAC и BOC.

Задача 3



AC и AB - касательные к окружности, точки B и C – точки касания, AO = 13 см, AB = 12 см. Найдите радиус окружности.

Задача 4



BA и BC - касательные к окружности, точки A и C – точки касания, OB = 16 см, OA ⊥ OC. Найдите отрезки касательных к окружности.