Моделирование. Виды подобия

Моделирование состоит в том, что изучение интересующего нас явления в натуре заменяется изучением аналогичного явления на модели, изготовленной, как правило, в уменьшенном масштабе.

Указания для рационального устройства моделей и перенесения (пересчета) в натуру данных, полученных на моделях, дает *теория подобия*. Одна из сопоставляемых систем называется – натура, вторая – модель.

Подобными системами материальных точек будем называть также системы, у которых соответственные, характерные для них, величины находятся в определенном соотношении, называемом масштабом этих величин.

При этом величины различной физической природы имеют обычно различные масштабы.

В теории подобия различают:

1. *Геометрическое подобие*, которое заключается в том, что линейные размеры l_1 и l_2 , характеризующие соответственные элементы двух систем находятся в постоянном соотношении, называемое *линейным масштабом модели* и обозначаемом ниже λ.

2. *Кинематическое подобие* состоит в том, что скорости и ускорения соответственных материальных точек натуры и модели одинаково направлены, а величины их находятся между собой в отделенном соотношении, называемом *масштабом этих величин.*

Если обозначить промежутки времени в натуре t_1 , а на модели t_2 , и отношение первого к второму, как масштаб времени - τ , то масштаб скорости и ускорений будет при этом:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{l_1}{t_1} : \frac{l_2}{t_2} = \frac{l_1 t_2}{l_2 t_1} = \frac{\lambda}{\tau} \qquad \text{1-1, 1-2} \qquad \frac{j_1}{j_2} = \frac{l_1}{t_1^2} : \frac{l_2}{t_2^2} = \frac{l_1 t_2^2}{l_2 t_1^2} = \frac{\lambda}{\tau^2}$$

Моделирование. Виды подобия

Динамическое подобие будет иметь место тогда, когда силы, действующие на сходственные материальные точки системы, будут одинаково направлены, а величины их F_1 и F_2 будут находиться в определенном соотношении, называемом масштабом сил, который обозначим K.

Поскольку сила в механике определяется, как произведение масса на ускорение (или, что то же, как произведение плотности на объем и на ускорение), то масштаб сил может быть выражен через масштабы геометрический и кинематический при условии добавления к ним масштаба плотности.

Общий закон динамического подобия

Для получения общего закона динамического подобия запишем 2-й закон механики Ньютона, - сила равна произведению массы на ускорение, для натуры и для модели, и возьмем отношение (2-1):

$$\frac{\mathcal{F}_1}{\mathcal{F}_2} = \frac{m_1 j_1}{m_2 j_2}$$

Заменив массу произведением плотности на объем и выразив отношение объемов через линейный масштаб в кубе λ^3, а отношение ускорений λ/τ^2 получим (2-2):

$$\frac{\mathcal{F}_1}{\mathcal{F}_2} = \frac{\rho_1 W_1 j_1}{\rho_2 W_2 j_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \lambda^3 \frac{\lambda}{\tau^2} = \frac{\rho_1 \lambda^4}{\rho_2 \tau^2}$$

Таким образом, масштаб сил будет (2-3)

$$K = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\lambda^4}{\tau^2}$$

Теорема механического подобия

Впервые была высказана Ньютоном для частного случая двух потоков еще в 1698 году. Доказательство и обобщение этой теоремы было дано французским ученым Бертраном в 1848 г. Он получил критерий механического подобия в виде (2-4)

$$K = \frac{\mathcal{F} \cdot t}{m \cdot v} \quad \text{или} \quad K = \frac{\mathcal{F} \cdot l}{m \cdot v^2}$$

Легко видеть, что масштаб из (2-3) может быть получен из формулы (2-4), учитывая, что для двух динамических систем

$$k = idem$$

Закон гравитационного подобия

Действие силы тяжести можно выразить уравнением $F = \gamma W$

где γ – вес единицы объема. Написав такие уравнения для натуры и для модели и взяв их отношение, получим (3-1):

$$K = \frac{\mathcal{F}_1}{\mathcal{F}_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{W_1}{W_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \lambda^3$$

Но это соотношение является частным случаем подобия и должно подчиняться общему закону подобия Ньютона. То есть математически это выражается в том, что описанное выше уравнение (3-1) должно удовлетворять (2-3). Для того, чтобы получить выражение закона гравитационного подобия, необходимо решить совместно эти уравнения.

Закон гравитационного подобия

Приравнивая их, имеем:

$$\frac{\rho_1 \lambda^4}{\rho_2 \tau^2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \lambda^3$$

и разделив на λ^2 , получим:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\lambda^2}{\tau^2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \lambda$$

или, подставив $\gamma = \rho g$, получим (3-2)

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\lambda^2}{\tau^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{g_1}{g_2} \lambda$$

Сократив теперь на ρ_1/ρ_2, имеем:

$$\frac{\lambda^2}{\tau^2} = \frac{g_1}{g_2} \lambda$$

или, введя вместо отношений сами величины,

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{g_1}{g_2} \cdot \frac{l_1}{l_2}$$

Закон гравитационного подобия

Учитывая далее, что в обычных условиях $g_1 = g_2 = g$ (ускорение силы тяжести), получим (3-3):

$$\frac{v_1^2}{g l_1} = \frac{v_2^2}{g l_2}$$

Введем понятие *"критерия подобия"*, которым будет называть безразмерное число, одинаковость значений которого является условием подобия двух систем. Выражение (3-3), как легко убедиться, - безразмерное и оно является критерием гравитационного подобия, его называют критерием или *числом Фруда* и обозначают F_r

В нем: ϑ - скорость движения воды (средняя) или скорость движения модели, l - характерный линейный размер.

Таким образом, если критерий (3-3), вычисленный для явления на модели и в натуре, будет одинаков, то можно утверждать, что эти явления подобны в том смысле, как это пояснено выше.

Введем масштабы отдельных величин в практически удобном виде.

Масштаб времени (исходное уравнение 3-2)

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\lambda^2}{\tau^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{g_1}{g_2} \lambda$$

Учитывая, что $g_1 = g_2 = g$ и сократив на ρ_1/ρ_2 и λ, получим $\lambda/\tau^2=1$ или $\tau = \sqrt{\lambda}$ (3-4)

Масштаб скорости Имеем $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda}{\tau}$ подставляя τ из уравнения (3-4), получим (3-5)

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\lambda}$$

Закон гравитационного подобия

Масштаб расхода Возьмем отношение расходов натурного и модельного:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\omega_1 v_1}{\omega_2 v_2}$$

заменяя $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \lambda^2$ и $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\lambda}$ получим (3-6):

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \lambda^{5/2}$$

Масштаб сил Непосредственно дан уравнением 3-1)

$$\frac{\mathcal{F}_1}{\mathcal{F}_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \lambda^3$$

Полагая, как это обычно бывает, в натуре и на модели одну и ту же жидкость, т.е. $\gamma_1 = \gamma_2$ получим (3-7):

$$\frac{\mathcal{F}_1}{\mathcal{F}_2} = \lambda^3$$

Масштаб давлений. Выразив давления в натуре и на модели как $p_1 = \frac{\mathcal{F}_1}{\omega_1}$ и $p_2 = \frac{\mathcal{F}_2}{\omega_2}$

возьмем их отношение (3-8)

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\mathcal{F}_1 \omega_2}{\mathcal{F}_2 \omega_1} = \frac{\lambda^3}{\lambda^2} = \lambda$$

<u>Закон гравитационного подобия</u>

Полученные формулы позволяют находить характерные величины для натуры, если известны таковые на модели. Аналогично решаются и обратные задачи, т.е. нахождение отдельных величин на модели по данным натуры, а также определяются возможные масштабы модели в зависимости от имеющихся размеров.

Заметим, что большие значения масштабных коэффициентов для таких величин,, как расход и силы, являются благоприятным для лабораторий фактором при моделировании по закону гравитационного подобия.

<u>Закон подобия для сил вязкости</u>

В некоторых явлениях, рассматриваемых в гидроаэродинамике, силы тяжести не оказывают существенного влияния и главными являются силы вязкости (силы внутреннего трения). Таково, например, движение горючих газов в печах различного р[illegible]одной лодки в погруженном состоянии или дирижабля, плывущего в воздухе и т.д.

По Ньютону закон внутреннего трения

$$\mathcal{F} = \mu \omega \frac{dv}{dn}$$

(4.1)

$\frac{dv}{dn}$

где μ – динамический коэффициент вязкости

ω – площадь соприкасающихся слоев жидкости

Закон подобия для сил вязкости

Записав выражение сил вязкости для натуры F_1 и модели F_2 , возьмем их соотношение

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\mu_1 \omega_1}{\mu_2 \omega_2} \frac{\frac{dv_1}{dn_1}}{\frac{dv_2}{dn_2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{dv_1}{dv_2} \frac{dn_2}{dn_1}$$

Учитывая, что $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \lambda^2$ и что дифференциал скорости имеет размерность $\frac{\lambda}{\tau}$, а дифференциал нормали размерность λ, получим:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\mu_1 \lambda^2}{\mu_2 \tau} \qquad (4\text{-}2)$$

Уравнение (4-2) можно назвать характеристическим для действия сил вязкости. Но силы вязкости (в данном случае – молекулярной) имеют механическую природу и подобие их в натуре и на модели должно удовлетворять общему закону подобия Ньютона.

Решив уравнения (4-2) и (2-3) совместно $\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\lambda^4}{\tau^2} = \frac{\mu_1 \lambda^2}{\mu_2 \tau}$

<u>Закон подобия для сил вязкости</u>

Подставив $\mu = \nu\rho$, где ν – кинематический коэффициент вязкости, имеем:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\lambda^4}{\tau^2} = \frac{\nu_1 \rho_1 \lambda^2}{\nu_2 \rho_2 \tau}$$

Сократив на $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ и на $\frac{\lambda^2}{\tau}$ получим:

(4-3) $$\frac{\lambda^2}{\tau} = \frac{\nu_1}{\nu_2}$$

Заменим масштабы, т.е. относительные величины, величинами абсолютными, тогда будет

(4-5) $$\frac{v_1 \cdot l_1}{v_2 \cdot l_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}$$ или $$\frac{v_1 l_1}{\nu_1} = \frac{v_2 l_2}{\nu_2}$$

Мы получили известный в аэрогидродинамике критерий (число) Рейнольдса (R_e), который и является таким образом критерием подобия при действии сил вязкости.

Введем масштабы отдельных величин.
<u>Масштаб времени.</u> Имеем из уравнения (4-3)

(4-6) $$\tau = \frac{\nu_2}{\nu_1}\lambda^2$$

Закон подобия для сил вязкости

Для одной и той же жидкости в натуре и на модели $\nu_1 = \nu_2$ и тогда $\tau = \lambda^2$ ил $\frac{t_1}{t_2} = \lambda^2$ (4-7)

т.е. время на модели больше, чем время в натуре.

Масштаб скорости. Из критерия Рейнольдса (у $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}\frac{1}{\lambda}$ 4-5) имеем:

В частном случае $\nu_1 = \nu_2$ и $\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{\lambda}$, и так как обычно $\lambda > 1$, то скорость на модели получается больше, чем скорость в натуре.

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\omega_1 v_1}{\omega_2 v_2} = \lambda^2 \frac{\nu_1}{\nu_2} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

Масш $\nu_1 = \nu_2$ расходо $\frac{Q_1}{Q_2} = \lambda$ учим так:

При имеем $\mu_1 = \mu_2$ т.е. масштаб $\tau = \lambda^2$ коэффициент не $\frac{F_1}{F_2} = 1$ приятный для моделирования.

Масштаб сил мы получили уже раньше в виде уравнения (4-2)

Закон подобия для сил вязкости

т.е. тоже очень неблагоприятное для моделирования соотношение: силы на модели равны силам в натуре.

Выше было уже отмечено, что формула для сил вязкости (4-1), послужившая исходной для рассуждений в этом параграфе , действительна только для сил молекулярной вязкости, т.е. для ламинарного движения, с которым при гидравлическом моделировании мы встречаемся обычно редко.

Моделирование по критерию Рейнольдса получило практическое применение в аэрогидродинамике при исследованиях сопротивления тел, когда силы тяжести играют второстепенную роль.

Дело в том, что коэффициент С в формуле сопротивления типа: $\mathcal{F} = C\,\Omega\,\rho\,\frac{v^2}{2}$ (4-10)

при обтекании тела жидкостью или газом является функцией числа Рейнольдса и для получения подобия в этих случаях нужно соблюсти равенство R_e в натуре и на модели. Но соблюдение этого равенства, как показывают выведенные выше формулы, дает $\nu_1 = \nu_2$ неблагоприятные масштабы, если мы будем на модели пользоваться тем же газом (жидкостью), что и в натуре

Можно было бы на модели взять воду вмест $\mu_{воды} > \mu_{возд.}$ атуре, поскольку vводы больше vвоздуха, но тогда на модели будут действовать большие силы, так как и техническое осуществление этого предложения затруднительно.

Начиная с 20-х годов нашего столетия практическое применение получило использование сжатого воздуха при испытании моделей в аэродинамических трубах.

Закон подобия для сил вязкости

Как известно, для воздуха динамический коэффициент вязкости μ практически не зависит от давления, а плотность ρ по закону Бойля-Мариотта увеличивается прямо пропорционально давлению. В результате кинематический коэффициент вязкости воздуха ν с увеличением давления уменьшается.

Таким образом, если в натуре мы имеем воздух при атмосферном давлении, то при давлении, например, в 25 атмосфер (такие аэродинамические трубы построены) $\nu_{25} \cong \frac{\nu_1}{25}$ и возможный масштаб модели λ=25, если принять, что

$$v_1 = v_2$$

Случай совместного действия сил

Рассмотрим вопрос о законе подобия и масштабах величин в случае совместного действия силы тяжести и силы вязкости. В этом случае, очевидно, должны использовать как критерий Фруда – уравнение (3-3), так и критерий Рейнольдса – уравнение (4-5).

Поскольку время не зависит от рода действующих сил, масштаб времени должен быть одинаков по обоим критериям, т.е. $\tau_{Fr} = \tau_{Re}$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\nu_2}{\nu_1}\lambda^2$$

$$\lambda^{3/2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}$$

, откуда

$$\lambda = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{2/3}$$

$$\nu_1 = \nu_2 \quad \text{и} \quad \lambda = 1 \qquad (5\text{-}1)$$

<u>Случай совместного действия сил</u>

Из формулы (5-1) видно, что для получения $\lambda > 1$ нужно , чтобы $\nu_1 > \nu_2$

Если в натуре мы имеем воду, то других жидкостей с меньшим коэффициентом кинематической вязкости и практически применимых не существует.

$t^\circ = +10^\circ C$ $\nu_{рт} = 0{,}0013 \text{ см}^2/\text{сек}$ $\nu_в = 0{,}013 \frac{\text{см}^2}{\text{сек.}}$

Если предложения использовать на модели ртуть, которая благодаря своему боль[illegible]ному весу имеет малый коэффициент кинематической вязкости, а именно:

Таким образом, можем получить: $$\lambda = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{2/3} = \left(\frac{0{,}013}{0{,}0013}\right)^{2/3} \cong 5$$

т.е. масштаб в ряде случаев приемлемый.

Критерии подобия при действии сил упругости и поверхностного натяжения

При исследовании прочности сооружений и конструкций встречается необходимость в моделировании сил упругости. Из физики твердого тела известно, что силы упругости пропорциональны модулю упругости E площади поперечного сечения ω (имеются ввиду тела удлиненной формы) и относительной деформации $\frac{\Delta l}{l}$

(6-1) $$F = E\omega\frac{\Delta l}{l}$$

Записывается это выражение для натуры и для модели и беря их отношение, получим масштаб сил

(6-2) $$K = \frac{F_1}{F_2} = \frac{E_1}{E_2}\lambda^2$$

При этом учтено, что в силу геометрического подобия относительные деформации в натуре и на модели равны

Уравнение (6-2) можно назвать характеристическим для действия сил упругости.

Для получения соответствующего критерия подобия решим характеристическое уравнение (6-2) совместно с общим уравнением динамического подобия (2-3). Имеем

$$\frac{E_1}{E_2}\lambda^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\lambda^4}{\tau^2}$$

Критерии подобия при действии сил упругости и поверхностного натяжения

откуда $\frac{\lambda^2}{\tau^2}=\frac{E_1}{\rho_1}:\frac{E_2}{\rho_2}$ или , переходя от масштабов к самим величинам

$$\frac{v_1}{\sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}}=\frac{v_2}{\sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}} \qquad (6\text{-}3)$$

Учитывая, что величина $\sqrt{\frac{E}{\rho}}=C$ есть выражение (в общем случае – приближенное) для скорости распространения упругой волны в данной сплошной среде, уравнению (6-3) можно придать более простой вид

$$\frac{v_1}{C_1}=\frac{v_2}{C_2}=K \qquad (6\text{-}4)$$

Постоянная K и будет критерием подобия для действия сил упругости или критерием Коши.

Аналогичная величина для газов называется числом Маха. Это число имеет большое значение при изучении движения газов с учетом их сжимаемости.

В некоторых гидравлических явлениях существенную роль играют силы поверхностного натяжения (например, истечение вязких жидкостей через отверстия, капиллярные волны).

Рассмотрим вопрос о моделировании таких явлений.

Как известно , сила поверхностного натяжения

$$F=\sigma l \qquad (6\text{-}6)$$

Критерии подобия при действии сил упругости и поверхностного натяжения

б – коэффициент поверхнотсного натяжения
Выражение для масштаба этих сил будет

(6-7)
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\lambda$$

Полученное выражение можно назвать характеристическим для действия сил поверхностного натяжения. Решая, совместно с уравнением (2-3), имеем:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\lambda^4}{\tau^2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\lambda$$

$$\frac{\lambda^2}{\tau^2}\cdot\lambda = \frac{\sigma_1 \rho_2}{\sigma_2 \rho_1}$$

Переходя от масштабов к самим величинам и группируя члены, получим

(6-8)
$$\frac{v_1^2 l_1 \rho_1}{\sigma_1} = \frac{v_2^2 l_2 \rho_2}{\sigma_2} = We$$

Критерий подобия для действия сил вязкости, который называют критерием Вебера. Здесь, как и прежде , l линейный размер для данного явления; в случае истечения через круглое отверстие будет его диаметр. При одновременном действии сил поверхностного натяжения и сил тяжести имеем равенство (6-7) и (3-1)

Критерии подобия при действии сил упругости и поверхностного натяжения

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\lambda = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\lambda^3$$

или

$$\lambda = \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\,\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}$$

откуда

учитывая, что при моделировании и обычных условиях $g_1 = g_2 = g$ имеем

$$\lambda = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}\,\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}$$

Специальный критерий подобия для нестационарных потоков

Определяющим рядом сил, действующих в нестационарных потоках, следует считать силы инерции. Отношение этих сил для двух подобных поток

$$\frac{m_1 j_1}{m_2 j_2} = \frac{\rho_1 l_1^3 j_1}{\rho_2 l_2^3 j_2}$$

(7-1)

j_1 и j_2

где - ускорения в первом и втором потоках.

Подобие в действии сил инерции предст стный случай общего закона динамического подобия Ньютона, поэтому уравнение (7-1) до ь уравнению (2-3). Приравнивая их, получим

$$\frac{\rho_1 l_1^3 j_1}{\rho_2 l_2^3 j_2} = \frac{\rho_1 l_1^4 t_2^2}{\rho_2 l_2^4 t_1^2}$$

(7-2)

ρ

$$\frac{l_1 j_1}{v_1^2} = \frac{l_2 j_2}{v_2^2} = \frac{l j}{v^2} = K_i$$

v_1 и v_2

Ограничиваясь случаем одной и той же жидкости и сокращая , получим

j

g

(7-3)

Подобие при учете турбулентного трения

Закон Фруда чаще всего применяется при гидравлическом моделировании (важную роль играет сила тяжести). Но зачастую здесь же участвуют силы турбулентного трения. Предположим, что смоделировали гидравлическое явление, обеспечив гравитационное подобие с учетом турбулентного трения.

Запишем средние скорости для натуры и модели по формуле Шези, возьмем их соотношение и приравняем масштабу скорости по Фруду.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{C_1\sqrt{R_1 i_1}}{C_2\sqrt{R_2 i_2}} = \sqrt{\lambda}$$

Учитывая, что уклон – величина безразмерная, $C_1 = C_2$ авлический радиус имеет линейную размерность, получим после сокращения

(8-1)

$$i_1 = \frac{v_1^2}{C_1^2 R_1} = i_2 = \frac{v_2^2}{C_2^2 R_2}$$

К данному результату можно прийти, записав уклоны для натуры и модели

$$\frac{v_1^2}{v_2^2}\cdot\frac{R_2}{R_1} = \frac{C_1^2}{C_2^2}$$

отсюда $\frac{v_1^2}{v_2^2}\cdot\frac{R_2}{R_1} = \frac{C_1^2}{C_2^2}$, но так как $\frac{v_1^2}{v_2^2} = \lambda$ и $\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{\lambda}$, получим $C_1^2 = C_2^2$

Подобие при учете турбулентного трения

Поскольку коэффициент С связан с шероховатостью, определяющий трение, то равенство (8-1) и будет являться условием, отражающим подобие при учете турбулентного трения. Если выразить коэффициент С для натуры и для модели, например, по форму $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt[6]{R_1}}{\sqrt[6]{R_2}} = \sqrt[6]{\lambda}$ получим:

(8-2)

т.е. для соблюдения равенства (8-1) коэффициенты шероховатости в натуре и на модели n_1 n_2 должны относиться как $\sqrt[6]{\lambda}$

Моделирование шероховатости по $n_1 = 0{,}014$ ому выше можно выпол $\lambda = 16$ при модел $n_2 = \frac{n_1}{\sqrt[6]{\lambda}} = \frac{0{,}014}{\sqrt[6]{16}} \approx 0{,}10$ малом масштабе или в том случае, когда шероховатость очень мала в натуре.

При моделировании бетонного к $\lambda = 50$ $n_2 = \frac{0{,}014}{\sqrt[6]{50}} \approx 0{,}07$ ем взять масштаб , при этом

, что осуществимо.

Если же взять линейный масштаб , то , что уже практически неосуществимо, так как материала такой гладкости не существует.

Подобие при учете турбулентного трения

Рассмотрим другой подход. Запишем выражение гидравлического уклона по формуле Дарси для натуры и для модели.

$$i_1 = \frac{f_1}{R_1}\frac{v_1^2}{2g}\ ; \quad i_2 = \frac{f_2}{R_2}\frac{v_2^2}{2g}$$

Возьмем отношение уклонов

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{f_1}{f_2}\frac{R_2}{R_1}\frac{v_1^2}{v_2^2}\frac{g_1}{g_2}.$$

(9-1)

Учитывая, что должно быть $i_1 = i_2$ получим $g_1 = g_2 = g$

$$\frac{f_1}{f_2}\frac{v_1^2}{R_1 g} = \frac{v_2^2}{R_2 g}$$

)

(9-2)

$f_1 = f_2$

Полученное выражение показывает, что критерий гравитационного подобия (3-3) будет выполнен, если

Подобие при учете турбулентного трения

Иначе равенство $f_1 = f_2$ можно получить из следующего:

$\sqrt{\lambda}$

Потери напора h пропорциональны квадрату скорости, но если скорость моделируется по Фруду как $\sqrt{\lambda}$, то потери напора изменяются, как высоты (в линейном масштабе) т.е. то же по закону гравитационного моделирования

$$h_1 = f_1 \frac{l_1}{R_1} \frac{v_1^2}{2g} ; \quad h_2 = f_2 \frac{l_2}{R_2} \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \lambda \qquad f_1 = f_2$$

Равенство возможно только ,

$$f = \frac{2g}{C^2}$$

Как известно, коэффициент $f_1 = f_2$ трения связан с коэффициентом $C_I = C_2$ С по формуле:

(9-3)

R/Δ τ_0 τ_0/Δ Δ

Откуда следует, что условие , равносильно условию

Исследования показали, что сила трения в формуле типа Дарси в общем случае является функцией

Подобие при учете турбулентного трения

Исследования показали, что коэффициент f зависит от Re только до известных значений последнего, определяемых относительной шероховатостью данного русла.

При гравитационном моделирован … в натуре и на модели будет

$$\frac{Re_1}{Re_2} = \frac{v_1 R_1}{\nu_1} : \frac{v_2 R_2}{\nu_2} = \frac{v_1 R_1 \nu_2}{v_2 R_2 \nu_1} = \sqrt{\lambda}\cdot\lambda\,\frac{\nu_2}{\nu_1}$$

(9-4)

Для одной и той же жидкости

$$\nu_1 = \nu_2 \quad \text{и} \quad \frac{Re_1}{Re_2} = \lambda^{3/2} \quad \text{или} \quad Re_2 = \frac{Re_1}{\lambda^{3/2}}$$

(9-5)

$$Re_2 = Re_{min}$$

$$\lambda = \left(\frac{Re_1}{Re_2}\right)$$

Отсюда следует, что для определения масштаба модели необходимо задаться значением Re_{min}

Тогда

$$Re_{min} \geqslant \frac{63}{\sqrt{f}}\,\frac{R}{\Delta}$$

Определение … потоков, и в особенности речных русел по данным Зегжды является весьма приближенным. Данные получены для равномерного потока в прямоугольных лотках, что конечно, отличается от естественных условий

Граница ламинарного и турбулентного режимов

В натуре и на модели должен быть один и тот же режим движения потока, так как структура его и механизм потерь на трение в ламинарном движении отличен от такого же в турбулентном:

$$i_{лам} = K_1 v \quad \text{и} \quad i_{турб} = K_2 v^2$$

где K_1 и K_2 коэффициенты пропорциональности.

Критерием для определения режима движения в трубах является значение числа Рейнольдса – 2300

Для открытых потоков число Рейнольдс пределенным, по исследованиям Зегджа – 700-900. Для обеспечения заведомо турбулен ендуется принимать

$$Re_{кр} = \frac{vR}{\nu} \cong 1000$$

(11-4)