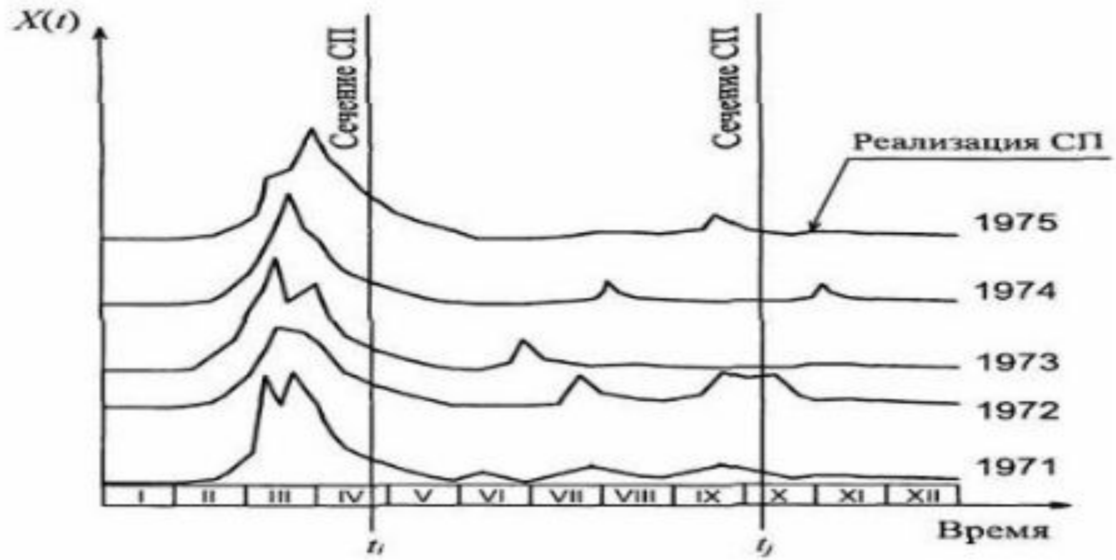
Тема: Элементы теории случайных процессов

1. Определения



- ***Случайным процессом X(t)*** называется процесс, значение которого при любом фиксированном $t = t_i$ является СВ $X(t_i)$
- ***Реализацией случайного процесса X(t)*** называется неслучайная функция $x(t)$, в которую превращается случайный процесс $X(t)$ в результате опыта
- ***Сечение случайного процесса (случайной функции)*** – это случайная величина $X(t_i)$ при $t = t_i$.

2. Классификация случайных процессов

- ***Случайный процесс X(t)*** называется процессом с ***дискретным временем***, если система, в которой он протекает, может менять свои состояния только в моменты $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$, число которых конечно или счетно
- ***Случайный процесс X(t)*** называется процессом с ***непрерывным временем***, если переходы системы из состояния в состояние могут происходить в любой момент времени t наблюдаемого периода
- ***Случайный процесс X(t)*** называется процессом с ***непрерывным состоянием***, если его сечение в любой момент t представляет собой не дискретную, а непрерывную величину
- ***Случайный процесс X(t)*** называется процессом с ***дискретным состоянием***, если в любой момент времени t множество его состояний конечно или счетно, то есть, если его сечение в любой момент t характеризуется дискретной случайной величиной

Таким образом, все ***СП*** можно разделить на 4 класса:

- Процессы с дискретным состоянием и дискретным временем;
- Процессы с дискретным состоянием и непрерывным временем;
- Процессы с непрерывным состоянием и дискретным временем;
- Процессы с непрерывным состоянием и непрерывным временем.

3. Основные характеристики случайных процессов

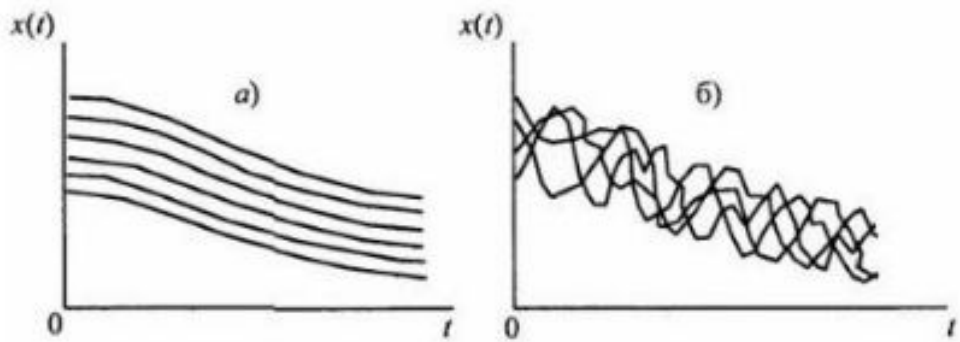
Сечение случайного процесса x(t) при любом фиксированном значении аргумента ***t*** представляет собой ***СВ***, которая имеет закон распределения

$$F(t, x) = P\{X(t) < x\}$$

Это одномерный закон распределения случайного процесса ***X(t)***

Но, он не является исчерпывающей характеристикой ***СП,*** так как характеризует свойства любого, но отдельно взятого сечения и не дает представления о совместном распределении двух или более сечений.

Это видно на рисунке, где показаны два ***СП*** с разными вероятностными структурами, но примерное одинаковыми распределениями ***СВ*** в каждом сечении



Поэтому более полной характеристикой СП является двумерный закон распределения

$$F(t_1,t_2,x_1,x_2) = P\{X(t_1) < x_1,\ X(t_2) < x_2\}$$

В общем случае исчерпывающей характеристикой СП является ***n* - мерный закон распределения**

На практике вместо многомерных законов распределения используют основные характеристики ***СП***, такие как ***МО, дисперсия, начальные и центральные моменты***, но только для ***СП*** эти характеристики будут ***не числами, а функциями***

- ***Математическое ожидание СП X(t)*** - неслучайная функция $m_x(t)$, которая при любом значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения ***СП:***

$$m_x(t) = \mathbf{M}\left[X(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_1(x,t)\,dx$$

где $f_1(x,t)$ – одномерная плотность распределения ***СП X(t)***

Свойства математического ожидания с. п. Пусть $X(t)$, $Y(t)$ – случайные процессы, $\varphi(t)$ – неслучайная функция, C – константа.

1) $m_{\varphi}(t) = \varphi(t)$.

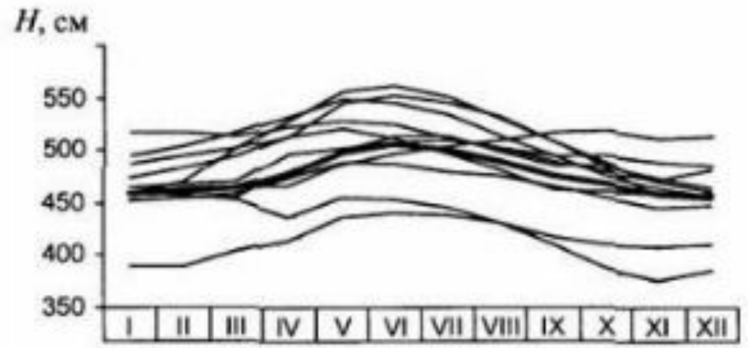
2) $m_{X+Y}(t) = m_X(t) + m_Y(t)$.

3) $m_{CX}(t) = C \cdot m_X(t)$.

4) $m_{X \cdot Y}(t) = m_X(t) \cdot m_Y(t)$, если сечения $X(t)$, $Y(t)$ некоррелированы при каждом $t \in (-\infty, +\infty)$.

5) $m_{\varphi X}(t) = \varphi(t) \cdot m_X(t)$.

МО СП представляет собой некоторую «среднею» функцию, вокруг которой происходит разброс ***СП***



Если из ***СП X(t)*** вычесть его МО, то получим центрированный СП:

$$\overset{\circ}{X}(t) = X_0(t) = X(t) - m_x(t)$$

- ***Дисперсией СП X(t)*** называется неслучайная функция ***СП X(t)***, которая при любом значении аргумента ***t*** равна дисперсии соот – го сечения ***СП X(t)***

$$D[X(t)] = M\{[x(t) - m_x(t)]^2\}$$

- ***Среднеквадратическим отклонением СП X(t)*** называется неслучайная функция $\sigma_x(t)$, которая равна корню квадратному из дисперсии СП:

$$\sigma_x(t) = \sigma[X(t] = \sqrt{D_x(t)}$$

Свойства дисперсии с.п. Пусть $X(t)$, $Y(t)$ – случайные процессы, $\varphi(t)$ – неслучайная функция, C – константа.

1) $D_X(t) \geq 0$.

2) $D_\varphi(t) = 0$.

3) $D_{\varphi X}(t) = (\varphi(t))^2 D_X(t)$.

4) $D_{\varphi + X}(t) = D_X(t)$.

6) $D_{X+Y}(t) = D_X(t) + D_Y(t)$, если сечения $X(t)$, $Y(t)$ некоррелированы при каждом $t \in (-\infty, +\infty)$.

Для полной характеристики СП необходимо учитывать взаимосвязь между различными сечениями. Поэтому, к комплексу перечисленных характеристик нужно добавить также корреляционную функцию СП:

Корреляционной (или ковариационной) функцией СП $X(t)$ называется неслучайная функция $K_x(t,t')$, которая при каждой паре значений аргументов t и t' равна корреляции соответствующих сечений $X(t)$ и $X(t')$

$$K_x(t,t') = M\{[X(t) - m_x(t)] \times [X(t') - m_x(t')]\}$$

или

$$K_x(t,t') = M[X_0(t)\, X_0(t')] = M[X(t)\, X(t')] - m_x(t)\, m_x(t')$$

Свойства корреляционной функции с.п. Пусть $X(t)$ – случайный процесс, U – случайная величина, $\varphi(t)$ – неслучайная функция.

1) $K_X(t_1, t_2) = M[X(t_1) \cdot X(t_2)] - m_X(t_1) \cdot m_X(t_2)$.

2) $K_X(t_1, t_2) = K_X(t_2, t_1)$.

3) $K_{X+\varphi}(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2)$.

4) $K_{\varphi X}(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K_X(t_1, t_2)$.

5) $K_U(t_1, t_2) = D[U]$.

6) $K_X(t, t) = D_X(t)$.

7) $|K_X(t_1, t_2)| \le \sigma_X(t_1) \cdot \sigma_X(t_2)$.

8) $|\rho_X(t_1, t_2)| \le 1$, $\rho_X(t, t) = 1$.

Нормированной корреляционной функцией $r_x(t,t')$ ***СП*** $X(t)$ называется функция, полученная делением корреляционной функции на произведение среднеквадратических отклонений $\sigma_x(t)\ \sigma_x(t')$

$$r_x(t,t') = [K_x(t,t')]/(\sigma_x(t)\sigma_x(t')) = [K_x(t,t')]/(\sqrt{D_x(t)D_x(t')})$$

Свойства нормированной корреляционной функции:

- при равенстве аргументов t и t' нормированная корреляционная функция равна единице $r_x(t,t') = 1$

-нормированная корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов, то есть $r_x(t,t') = r_x(t',t)$

- нормированная корреляционная функция по модулю не превышает единицу $r_x(t,t') \leq 1$

Скалярный СП – это когда речь идет об одном ***СП,*** как было до сих пор.

Векторный СП – это когда рассматриваются ***2*** и ***более СП.***

Допустим заданы расходы воды в нескольких створах во времени

В этом случае для характеристики СП ***нужно знать для каждого скалярного процесса:***

-МО

-корреляционную функцию

-взаимную корреляционную функцию

5. В   ная корреляционная функция с.п. Пусть $X(t)$, $Y(t)$ – случайные процессы. *Взаимной корреляционной функцией* с. п. $X(t)$, $Y(t)$ называется неслучайная функция от двух аргументов t_1, t_2

$$K_{X,Y}(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{Y}(t_2)]\,.$$

Два с.п. $X(t)$, $Y(t)$ называются *некоррелированными*, если

$$K_{X,Y}(t_1, t_2) \equiv 0\,.$$

Нормированной взаимной корреляционной функцией с.п. $X(t)$, $Y(t)$ называется неслучайная функция

$$\rho_{X,Y}(t_1, t_2) = \frac{K_{X,Y}(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_Y(t_2)}\,.$$

Свойства взаимной корреляционной функции. Пусть $X(t)$, $Y(t)$ – случайные процессы, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – неслучайные функции.

1) $K_{X,Y}(t_1,t_2) = M[X(t_1)\cdot Y(t_2)] - m_X(t_1)\cdot m_Y(t_2)$.

2) $K_{X,Y}(t_1,t_2) = K_{Y,X}(t_2,t_1)$.

3) $K_{X+\varphi,Y+\psi}(t_1,t_2) = K_{X,Y}(t_1,t_2)$.

4) $K_{\varphi X,\psi Y}(t_1,t_2) = \varphi(t_1)\psi(t_2)K_{X,Y}(t_1,t_2)$.

5) $\left|K_{X,Y}(t_1,t_2)\right| \le \sigma_X(t_1)\cdot\sigma_Y(t_2)$.

6) $\left|\rho_{X,Y}(t_1,t_2)\right| \le 1$.

Теорема. Если $Z(t)=\sum_{i=1}^{n}X_i(t)$, то

$$K_Z(t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{n}K_{X_i}(t_1,t_2)+\sum_{i\neq j}K_{X_i,X_j}(t_1,t_2).$$

Следствие. Если $Z(t)=\sum_{i=1}^{n}X_i(t)$ и с. п. $X_1,X_2,\dots,X_n$ попарно некоррелированы, то

$$K_Z(t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{n}K_{X_i}(t_1,t_2).$$

Для двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ теорема и следствие выглядят следующим образом.

$$K_{X+Y}(t_1,t_2)=K_X(t_1,t_2)+K_Y(t_1,t_2)+K_{X,Y}(t_1,t_2)+K_{X,Y}(t_2,t_1). \quad (1)$$

Если с.п. $X(t)$ и $Y(t)$ некоррелированы, то

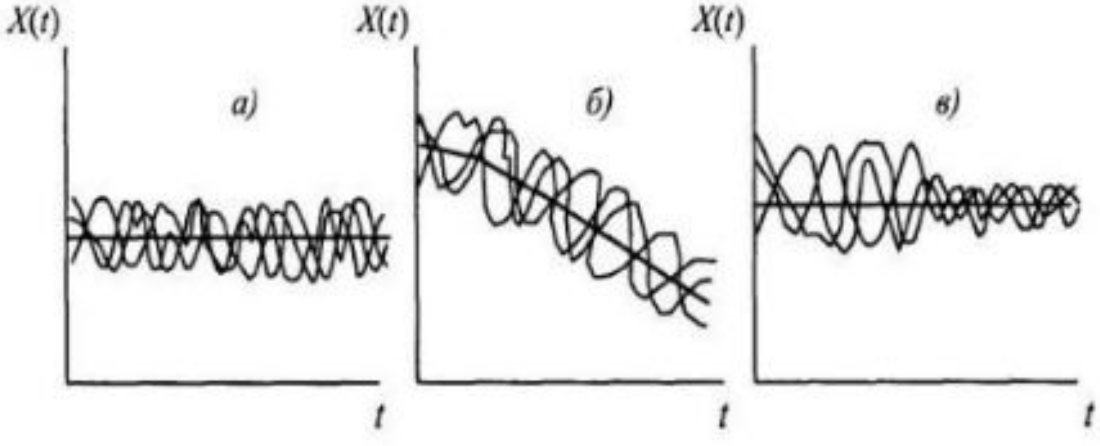
$$K_{X+Y}(t_1,t_2)=K_X(t_1,t_2)+K_Y(t_1,t_2). \quad (2)$$

Стационарные случайные процессы

Стационарные СП – это СП, у которых все вероятностные характеристики не зависят от времени, то есть:

- $m_x = const$
- $D_x = const$

Отличие стационарных и нестационарных СП показано на рисунке



а) стационарный СП
б) нестационарный СП по МО
с) нестационарный СП по дисперсии

Свойства корреляционной функции стационарного СП

- ***Четность функции от своего аргумента,*** то есть $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$

τ – сдвиг всех временных аргументов СП на одинаковую величину Θ

k – корреляционная функция СП при $K_x(t_1, t_2) = k_x(\tau)$

- Значение корреляционной функции стационарного СП ***при нулевом сдвиге*** τ равно дисперсии СП

$$D_x = K_x(t_1, t_2) = k_x(t - t) = k_x(0)$$

- $|k_x(\tau)| \le k_x(0)$

Помимо корреляционной функции используется нормированная корреляционная функция стационарного СП, которую называют ***автокорреляционной функцией***

$$r_x(\tau) = k_x(\tau)/D_x = k_x(\tau)/k_x(0)$$

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t) = U\,\mathrm{sh}t - 3\mathrm{e}^{-3t}V + t^2$, где U, V – некоррелированные случайные величины, $U \in R(-3; 3)$, $V \in P(1.2)$.

Решение. Сначала вычислим м. о. и дисперсии случайных величин U и V:

$M[U] = \dfrac{-3+3}{2} = 0$, $D[U] = \dfrac{(3+3)^2}{12} = 3$, $M[V] = D[V] = 1.2$.

По свойству 2) п.2 м.о. от суммы с.п. равно сумме м.о. от слагаемых:

$$m_X(t) = m_{\mathrm{sh}\,t\cdot U}(t) + m_{-3\mathrm{e}^{-3t}V}(t) + m_{t^2}(t).$$

По свойству 1) п.2 м.о. неслучайной функции равно самой функции. Поэтому $m_{t^2}(t) = t^2$. По свойству 5) п.2 множитель с. п. в виде неслучайной функции выносится за знак м.о. Следовательно,

$$m_{\mathrm{sh}\,t\cdot U}(t) = \mathrm{sh}t \cdot M[U] = 0, \quad m_{-3\mathrm{e}^{-3t}V}(t) = -3\mathrm{e}^{-3t}M[V] = -3.6\mathrm{e}^{-3t}.$$

В итоге получим

$$m_x(t) = -3.6\mathrm{e}^{-3t} + t^2.$$

Теперь найдем корреляционную функцию. По свойству 3) п. 4 прибавление к с.п. неслучайной функции t^2 не влияет на корреляционную функцию. Поэтому

$$K_X(t_1,t_2)=K_{\operatorname{sh}t\cdot U-3\mathrm{e}^{-3t}V}(t_1,t_2).$$

Так как с.п. $U\operatorname{sh}t$ и $-3\mathrm{e}^{-3t}V$ некоррелированы из-за некоррелированности случайных величин U, V, то по формуле (2) получаем

$$K_X(t_1,t_2)=K_{\operatorname{sh}t\cdot U}(t_1,t_2)+K_{-3\mathrm{e}^{-3t}V}(t_1,t_2).$$

Теперь по свойству 4) и 5) пункта 4 имеем

$$K_{\operatorname{sh}t\cdot U}(t_1,t_2)=\operatorname{sh}t_1\operatorname{sh}t_2 D[U]=3\operatorname{sh}t_1\operatorname{sh}t_2,$$

$$K_{-3\mathrm{e}^{-3t}V}(t_1,t_2)=-3\mathrm{e}^{-3t_1}(-3)\mathrm{e}^{-3t_2}D[V]=10.8\,\mathrm{e}^{-3t_1}\mathrm{e}^{-3t_2}.$$

Таким образом,

$$K_X(t_1,t_2)=3\operatorname{sh}t_1\operatorname{sh}t_2+10.8\,\mathrm{e}^{-3(t_1+t_2)}.$$

Дисперсию найдем по свойству 6) пункта 4:

$$D_X(t)=K_X(t,t)=3\operatorname{sh}^2t+10.8\,\mathrm{e}^{-6t}.$$