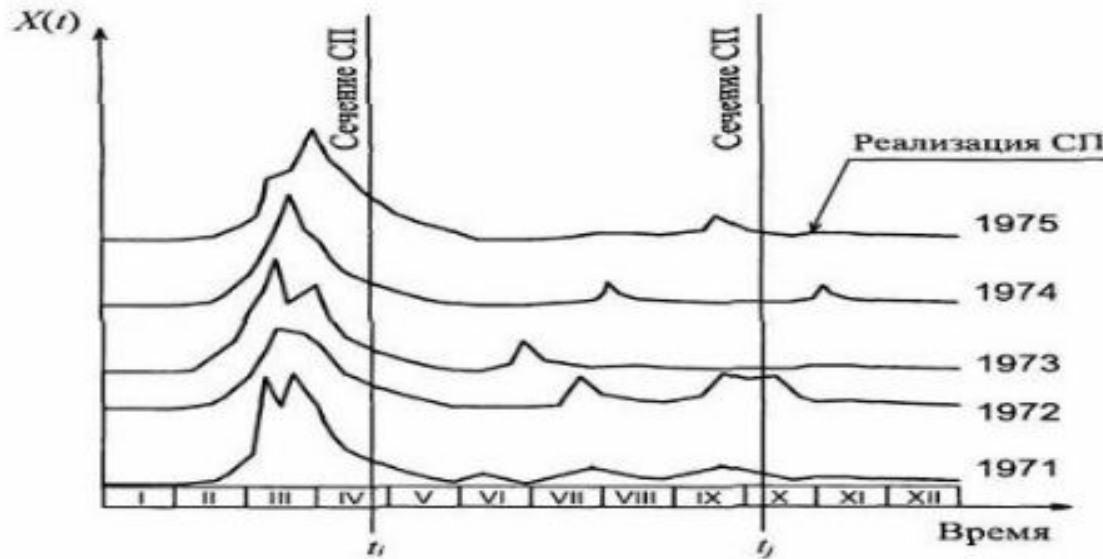


Тема: Элементы теории случайных процессов

1. Определения



- **Случайным процессом $X(t)$** называется процесс, значение которого при любом фиксированном $t = t_i$ является СВ $X(t_i)$
- **Реализацией случайного процесса $X(t)$** называется неслучайная функция $x(t)$, в которую превращается случайный процесс $X(t)$ в результате опыта
- **Сечение случайного процесса (случайной функции)** – это случайная величина $X(t_i)$ при $t = t_i$.

2. Классификация случайных процессов

- *Случайный процесс $X(t)$* называется процессом с **дискретным временем**, если система, в которой он протекает, может менять свои состояния только в моменты $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, число которых конечно или счетно
- *Случайный процесс $X(t)$* называется процессом с **непрерывным временем**, если переходы системы из состояния в состояние могут происходить в любой момент времени t наблюдаемого периода
- *Случайный процесс $X(t)$* называется процессом с **непрерывным состоянием**, если его сечение в любой момент t представляет собой не дискретную, а непрерывную величину
- *Случайный процесс $X(t)$* называется процессом с **дискретным состоянием**, если в любой момент времени t множество его состояний конечно или счетно, то есть, если его сечение в любой момент t характеризуется дискретной случайной величиной

Таким образом, все **СП** можно разделить на 4 класса:

- Процессы с дискретным состоянием и дискретным временем;
- Процессы с дискретным состоянием и непрерывным временем;
- Процессы с непрерывным состоянием и дискретным временем;
- Процессы с непрерывным состоянием и непрерывным временем.

3. Основные характеристики случайных процессов

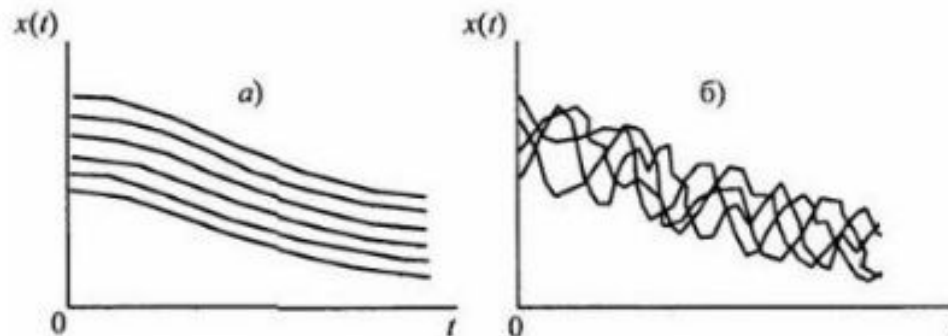
Сечение случайного процесса $x(t)$ при любом фиксированном значении аргумента t представляет собой **СВ**, которая имеет закон распределения

$$F(t, x) = P\{X(t) < x\}$$

Это одномерный закон распределения случайного процесса $X(t)$

Но, он не является исчерпывающей характеристикой **СП**, так как характеризует свойства любого, но отдельно взятого сечения и не дает представления о совместном распределении двух или более сечений.

Это видно на рисунке, где показаны два **СП** с разными вероятностными структурами, но примерное одинаковыми распределениями **СВ** в каждом сечении



Поэтому более полной характеристикой СП является двумерный закон распределения

$$F(t_1, t_2, x_1, x_2) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2\}$$

В общем случае исчерпывающей характеристикой СП является ***n***-мерный закон распределения

На практике вместо многомерных законов распределения используют основные характеристики СП, такие как ***МО, дисперсия, начальные и центральные моменты***, но только для СП эти характеристики будут ***не числами, а функциями***

➤ ***Математическое ожидание СП $X(t)$*** - неслучайная функция ***$m_x(t)$*** , которая при любом значении аргумента ***t*** равна математическому ожиданию соответствующего сечения СП:

$$m_x(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x, t) dx$$

где ***$f_1(x, t)$*** – одномерная плотность распределения СП ***$X(t)$***

Свойства математического ожидания с. п. Пусть $X(t)$, $Y(t)$ – случайные процессы, $\varphi(t)$ – неслучайная функция, C – константа.

1) $m_{\varphi}(t) = \varphi(t)$.

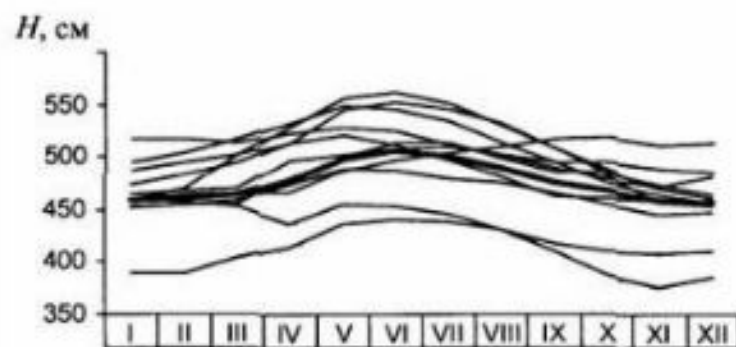
2) $m_{X+Y}(t) = m_X(t) + m_Y(t)$.

3) $m_{CX}(t) = C \cdot m_X(t)$.

4) $m_{XY}(t) = m_X(t) \cdot m_Y(t)$, если сечения $X(t)$, $Y(t)$ некоррелированы при каждом $t \in (-\infty, +\infty)$.

5) $m_{\varphi X}(t) = \varphi(t) \cdot m_X(t)$.

МО СП представляет собой некоторую «среднюю» функцию, вокруг которой происходит разброс **СП**



Если из **СП $X(t)$** вычесть его МО, то получим центрированный СП:

$$\dot{X}(t) = X_c(t) = X(t) - m_x(t)$$

➤ **Дисперсией СП $X(t)$** называется неслучайная функция **СП $X(t)$** , которая при любом значении аргумента **t** равна дисперсии соот – го сечения **СП $X(t)$**

$$D[X(t)] = M\{[x(t) - m_x(t)]^2\}$$

➤ **Среднеквадратическим отклонением СП $X(t)$** называется неслучайная функция **$\sigma_x(t)$** , которая равна корню квадратному из дисперсии СП:

$$\sigma_x(t) = \sigma[X(t)] = \sqrt{D_x(t)}$$

Свойства дисперсии с.п. Пусть $X(t)$, $Y(t)$ – случайные процессы, $\varphi(t)$ – неслучайная функция, C – константа.

1) $D_X(t) \geq 0$.

2) $D_\varphi(t) = 0$.

3) $D_{\varphi X}(t) = (\varphi(t))^2 D_X(t)$.

4) $D_{\varphi+X}(t) = D_X(t)$.

6) $D_{X+Y}(t) = D_X(t) + D_Y(t)$, если сечения $X(t)$, $Y(t)$ некоррелированы при каждом $t \in (-\infty, +\infty)$.

Для полной характеристики СП необходимо учитывать взаимосвязь между различными сечениями. Поэтому, к комплексу перечисленных характеристик нужно добавить также корреляционную функцию СП:

Корреляционной (или ковариационной) функцией СП $X(t)$ называется неслучайная функция **$K_x(t, t')$** , которая при каждой паре значений аргументов **t** и **t'** равна корреляции соответствующих сечений **$X(t)$** и **$X(t')$**

$$K_x(t, t') = M\{[X(t) - m_x(t)] \times [X(t') - m_x(t')]\}$$

или

$$K_x(t, t') = M[X_\theta(t) X_\theta(t')] = M[X(t) X(t')] - m_x(t) m_x(t')$$

Свойства корреляционной функции с.п. Пусть $X(t)$ – случайный процесс, U – случайная величина, $\varphi(t)$ – неслучайная функция.

1) $K_X(t_1, t_2) = M[X(t_1) \cdot X(t_2)] - m_X(t_1) \cdot m_X(t_2).$

2) $K_X(t_1, t_2) = K_X(t_2, t_1).$

3) $K_{X+\varphi}(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2).$

4) $K_{\varphi X}(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K_X(t_1, t_2).$

5) $K_U(t_1, t_2) = D[U].$

6) $K_X(t, t) = D_X(t).$

7) $|K_X(t_1, t_2)| \leq \sigma_X(t_1) \cdot \sigma_X(t_2).$

8) $|\rho_X(t_1, t_2)| \leq 1, \rho_X(t, t) = 1.$

Нормированной корреляционной функцией $r_x(t, t')$ СП $X(t)$ называется функция, полученная делением корреляционной функции на произведение среднеквадратических отклонений $\sigma_x(t) \sigma_x(t')$

$$r_x(t, t') = [K_x(t, t')] / (\sigma_x(t) \sigma_x(t')) = [K_x(t, t')] / \sqrt{D_x(t) D_x(t')}$$

Свойства нормированной корреляционной функции:

- при равенстве аргументов t и t' нормированная корреляционная функция равна единице $r_x(t, t') = 1$

- нормированная корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов, то есть $r_x(t, t') = r_x(t', t)$

- нормированная корреляционная функция по модулю не превышает единицу $r_x(t, t') \leq 1$

Скалярный СП – это когда речь идет об одном **СП**, как было до сих пор.

Векторный СП – это когда рассматриваются **2 и более СП**.

Допустим заданы расходы воды в нескольких створах во времени

В этом случае для характеристики СП **нужно знать для каждого скалярного процесса:**

-МО

-корреляционную функцию

-взаимную корреляционную функцию

5. Взаимная корреляционная функция с.п. Пусть $X(t)$, $Y(t)$ – случайные процессы. *Взаимной корреляционной функцией* с. п. $X(t)$, $Y(t)$ называется неслучайная функция от двух аргументов t_1, t_2

$$K_{X,Y}(t_1, t_2) = M[\dot{X}(t_1) \cdot \dot{Y}(t_2)] .$$

Два с.п. $X(t)$, $Y(t)$ называются *некоррелированными*, если

$$K_{X,Y}(t_1, t_2) \equiv 0 .$$

Нормированной взаимной корреляционной функцией с.п. $X(t)$, $Y(t)$ называется неслучайная функция

$$\rho_{X,Y}(t_1, t_2) = \frac{K_{X,Y}(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1) \sigma_Y(t_2)} .$$

Свойства взаимной корреляционной функции. Пусть $X(t)$, $Y(t)$ – случайные процессы, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – неслучайные функции.

$$1) \quad K_{X,Y}(t_1, t_2) = M[X(t_1) \cdot Y(t_2)] - m_X(t_1) \cdot m_Y(t_2).$$

$$2) \quad K_{X,Y}(t_1, t_2) = K_{Y,X}(t_2, t_1).$$

$$3) \quad K_{X+\varphi, Y+\psi}(t_1, t_2) = K_{X,Y}(t_1, t_2).$$

$$4) \quad K_{\varphi X, \psi Y}(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\psi(t_2)K_{X,Y}(t_1, t_2).$$

$$5) \quad |K_{X,Y}(t_1, t_2)| \leq \sigma_X(t_1) \cdot \sigma_Y(t_2).$$

$$6) \quad |\rho_{X,Y}(t_1, t_2)| \leq 1.$$

Теорема. Если $Z(t) = \sum_{i=1}^n X_i(t)$, то

$$K_Z(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n K_{X_i}(t_1, t_2) + \sum_{i \neq j} K_{X_i, X_j}(t_1, t_2).$$

Следствие. Если $Z(t) = \sum_{i=1}^n X_i(t)$ и с. п. X_1, X_2, \dots, X_n попарно некоррелированы, то

$$K_Z(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n K_{X_i}(t_1, t_2).$$

Для двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ теорема и следствие выглядят следующим образом.

$$K_{X+Y}(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) + K_Y(t_1, t_2) + K_{X,Y}(t_1, t_2) + K_{X,Y}(t_2, t_1). \quad (1)$$

Если с.п. $X(t)$ и $Y(t)$ некоррелированы, то

$$K_{X+Y}(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) + K_Y(t_1, t_2). \quad (2)$$

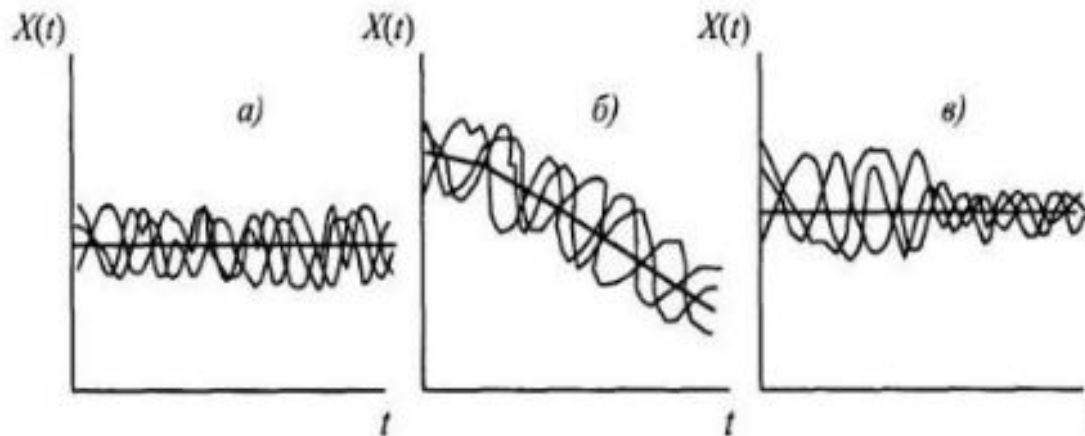
Стационарные случайные процессы

Стационарные СП – это СП, у которых все вероятностные характеристики не зависят от времени, то есть:

- $m_x = \text{const}$

- $D_x = \text{const}$

Отличие стационарных и нестационарных СП показано на рисунке



а) стационарный СП

б) нестационарный СП по МО

с) нестационарный СП по дисперсии

Свойства корреляционной функции стационарного СП

➤ Четность функции от своего аргумента, то есть $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$

τ – сдвиг всех временных аргументов СП на одинаковую величину \ominus

k – корреляционная функция СП при $K_x(t_1, t_2) = k_x(\tau)$

➤ Значение корреляционной функции стационарного СП **при нулевом сдвиге τ** равно дисперсии СП

$$D_x = K_x(t_1, t_2) = k_x(t - t) = k_x(0)$$

➤ $|k_x(\tau)| \leq k_x(0)$

Помимо корреляционной функции используется нормированная корреляционная функция стационарного СП, которую называют **автокорреляционной функцией**

$$r_x(\tau) = k_x(\tau)/D_x = k_x(\tau)/k_x(0)$$

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1, t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t) = U \operatorname{sh} t - 3e^{-3t} V + t^2$, где U, V – некоррелированные случайные величины, $U \in R(-3; 3)$, $V \in P(1.2)$.

Решение. Сначала вычислим м. о. и дисперсии случайных величин U и V :

$$M[U] = \frac{-3+3}{2} = 0, \quad D[U] = \frac{(3+3)^2}{12} = 3, \quad M[V] = D[V] = 1.2.$$

По свойству 2) п.2 м.о. от суммы с.п. равно сумме м.о. от слагаемых:

$$m_X(t) = m_{\operatorname{sh} t \cdot U}(t) + m_{-3e^{-3t} V}(t) + m_{t^2}(t).$$

По свойству 1) п.2 м.о. неслучайной функции равно самой функции. Поэтому $m_{t^2}(t) = t^2$. По свойству 5) п.2 множитель с. п. в виде неслучайной функции выносится за знак м.о. Следовательно,

$$m_{\operatorname{sh} t \cdot U}(t) = \operatorname{sh} t \cdot M[U] = 0, \quad m_{-3e^{-3t} V}(t) = -3e^{-3t} M[V] = -3.6e^{-3t}.$$

В итоге получим

$$m_X(t) = -3.6e^{-3t} + t^2.$$

Теперь найдем корреляционную функцию. По свойству 3) п. 4 прибавление к с.п. неслучайной функции t^2 не влияет на корреляционную функцию. Поэтому

$$K_X(t_1, t_2) = K_{\text{sh } t, U - 3e^{-3t} V}(t_1, t_2).$$

Так как с.п. $U \text{ sh } t$ и $-3e^{-3t} V$ некоррелированы из-за некоррелированности случайных величин U, V , то по формуле (2) получаем

$$K_X(t_1, t_2) = K_{\text{sh } t, U}(t_1, t_2) + K_{-3e^{-3t} V}(t_1, t_2).$$

Теперь по свойству 4) и 5) пункта 4 имеем

$$K_{\text{sh } t, U}(t_1, t_2) = \text{sh } t_1 \text{ sh } t_2 D[U] = 3 \text{ sh } t_1 \text{ sh } t_2,$$

$$K_{-3e^{-3t} V}(t_1, t_2) = -3e^{-3t_1} (-3)e^{-3t_2} D[V] = 10.8 e^{-3t_1} e^{-3t_2}.$$

Таким образом,

$$K_X(t_1, t_2) = 3 \text{ sh } t_1 \text{ sh } t_2 + 10.8 e^{-3(t_1+t_2)}.$$

Дисперсию найдем по свойству 6) пункта 4:

$$D_X(t) = K_X(t, t) = 3 \text{ sh}^2 t + 10.8 e^{-6t}.$$