

# Производная сложной функции

Функция **h** есть  
**сложная функция**,  
составленная из функций **g** и **f**,  
если

$$h(x) = g(f(x))$$

$f(x)$  – «внутренняя функция»

$g(f)$  – «внешняя функция»

Определим внутреннюю( $f$ ) и внешнюю( $g$ ) элементарные функции, из которых составлена сложная функция  $h(x)=g(f(x))$

$$1) \quad h(x) = \cos 3x$$

$$f(x) = 3x$$

$$g(f) = \cos f$$

$$2) \quad h(x) = \operatorname{tg}(2x - \pi/4)$$

$$f(x) = 2x - \pi/4$$

$$g(f) = \operatorname{tg} f$$

$$3) \quad h(x) = (3 - 5x)^5$$

$$f(x) = 3 - 5x$$

$$g(f) = f^5$$

$$4) \quad h(x) = \sqrt{\sin x}$$

$$f(x) = \sin x$$

$$g(f) = \sqrt{f}$$

Определите внутреннюю(f) и внешнюю(g) элементарные функции, из которых составлена сложная функция  $y=g(f(x))$

$$1) y = \sqrt{9-x^2}$$

$$\underline{f(x) = 9-x^2,}$$

$$\underline{g(f) = \sqrt{f}}$$

$$2) y = \sin \frac{x}{3}$$

$$\underline{f(x) = \frac{x}{3},}$$

$$\underline{g(f) = \sin f}$$

$$3) y = 2(3x^3-6x)^7$$

$$\underline{f(x) = 3x^3-6x,}$$

$$\underline{g(f) = 2f^7}$$

# Формула производной сложной функции

$$h'(x) = g'(f) \cdot f'(x)$$

$$h'(x) = g'(f) \cdot f'(x)$$

## Алгоритм нахождения производной сложной функции

- 1) Определи внутреннюю и внешнюю элементарные функции  $f(x)$  и  $g(f)$
  - 2) Найди производную внутренней функции  $f'(x)$
  - 3) Найди производную внешней функции  $g'(f)$
  - 4) Перемножь производные внутренней и внешней функции и получишь производную сложной функции
- $$h'(x) = f'(x) \cdot g'(f)$$

Задание 1. Найдите производную функции

$$h(x) = (2x+3)^{100}$$

1. Определим внутреннюю( $f$ )и внешней( $g$ ) функции

$$f(x)=2x+3 \quad g(f)=f^{100}$$

2. Найдем производную внутренней функции

$$f'(x)=(2x+3)'=2$$

3. Найдем производную внешней функции

$$g'(f)=(f^{100})'=100 f^{99}$$

4. Перемножим производные внутренней и внешней функций

$$h'(x) = 2 \cdot 100 f^{99} = 200 f^{99} = \underline{200(2x+3)^{99}}$$

Задание 2. Найдите производную функции

$$y(x) = 4\cos 3x$$

1. Определим внутреннюю( $f$ )и внешней( $g$ ) функции

$$f(x)=3x \quad g(f)=4\cos f$$

2. Найдем производную внутренней функции

$$f'(x)=(3x)'=3$$

3. Найдем производную внешней функции

$$g'(f)=(4\cos f)'= -4\sin f$$

4. Перемножим производные внутренней и внешней функций

$$y'(x) = 3 \cdot (-4\sin f) = -12\sin f = -12\sin 3x$$

---



Задание 3. Найдите производную функции

а)  $y = \sqrt{9 - x^2}$

б)  $y = 6 \sin \frac{x}{3}$

а)  $f(x) = 9 - x^2$ ,  $g(f) = \sqrt{f}$

$$f'(x) = (9 - x^2)' = -2x$$

$$g'(f) = (\sqrt{f})' = \frac{1}{2\sqrt{f}}$$

$$y' = -2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{f}} = -\frac{2x}{2\sqrt{f}} =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{f}} = \boxed{-\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}}$$

б)  $f(x) = \frac{x}{3}$ ,  $g(f) = 6 \sin f$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{3}\right)' = \frac{1}{3}$$

$$g'(f) = (6 \sin f)' = 6 \cos f$$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot 6 \cos f = 2 \cos f =$$

$$= \boxed{2 \cos \frac{x}{3}}$$

A spiral-bound notebook with a brown cover and a white page. The word "Тест" is written in red in the center of the page. A horizontal line is drawn across the page, just above the word. The spiral binding is on the left side.

Тест

1 вариант	A	B	C
1. $y = (x + 1)^{12}$	$12(x + 1)$	$12(x + 1)^{11}$	$12(x + 1)^{13}$
2. $y = (4x - 3)^5$	$20(4x - 3)^4$	$5(4x - 3)^4$	$20x(4x - 3)^4$
3. $y = (x^7 - x^5 - 3)^5$	$5(x^7 - x^5 - 3)^4$	$5(x^7 - x^5 - 3)^4 \cdot (7x^6 - 5x^4)$	$5(7x^6 - 5x^4)$
4. $y = 3\cos(5x + 6)$	$-3\sin(5x + 6)$	$-15\sin(5x + 6)$	$15\sin(5x + 6)$
5. $y = \sqrt{x^2 - 2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2}}$	$\frac{2x}{\sqrt{x^2 - 2}}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}}$

2 вариант	A	B	C
1. $y = (x + 4)^6$	$6(x + 4)^5$	$6(x + 4)$	$x + 4$
2. $y = (3x - 2)^3$	$3(3x - 2)^4$	$3(3x - 2)^2$	$9(3x - 2)^2$
3. $y = (x^5 + x^3 + 1)^6$	$6(x^5 + x^3 + 1)^5 \cdot (5x^4 + 3x^2)$	$6(x^5 + x^3 + 1)^5$	$5x^4 + 3x^2$
4. $y = 2\sin(3x - 4)$	$2\cos(3x - 4)$	$6\cos(3x - 4)$	$\cos(3x - 4)$
5. $y = \sqrt{x^2 + 8}$	$\frac{1}{\sqrt{2x + 8}}$	$\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 8}}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 8}}$