Устойчивость движения. Фазовая плоскость. Классифицировать точки покоя.

Подготовила:Жаксылыкова А.Е.

- **УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ** - способность систем слабо менять (в том или ином смысле) своё состояние или свойства под действием возмущений. Теория устойчивости (У.) - это совокупность представлений и методов, обобщающих и формализующих различные аспекты У. разнообразных систем. Наиболее распространёнными понятиями теории У. являются У. по Ляпунову, орбитальная У., асимптотическая У., структурная У.

Основные понятия:

- Пусть траектория L динамической системы задаётся отображением $x(t) = T^t x_o$, где x- совокупность координат точки в фазовом пространстве системы, T^t - оператор эволюции, преобразующий нач. состояние системы с координатами x_o в состояние с координатами $x(t)$в момент времени t.

Траектория L у с т о й ч и в а п о Л я п у н о в у, если для сколь угодно малого е можно найти такое d, что для любого нач. состояния $\tilde{x}_0$, близкого к x_0, т. е. $\rho(\tilde{x}_0, x_0) < \delta$, всегда окажется

$\rho(T^t \tilde{x}_0, T^t x_0) < \varepsilon$.

Здесь r(x_1, x_2)- расстояние между точками x_1 и x_2 в фазовом пространстве. Если

$$\lim_{t \to \infty} \rho\left[\tilde{x}(t), x(t)\right] = 0,$$

То устойчивость называется асимптотической

- Для исследования У. обычно применяют два метода Ляпунова. П е р в ы й (или п р я м о й) метод основан на построении ф-ции (функционала) Ляпунова. Например для ур-ния нелинейного осциллятора с трением

(1) $$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^2 x-x^3=0$$

можно использовать следующую ф-цию Ляпунова:

(2) $$V=V_1+V_2,\ V_1=\frac{1}{2}\dot{x}^2,\ V_2=\frac{1}{2}\omega^2 x^2-\frac{1}{4}x^4.$$

Эта величина имеет смысл полной энергии системы: слагаемое V_1 есть кинетическая, а V_2 - потенц. энергия. Производная по времени от V с учётом ур-ния (1) есть

$$dV/dt=-2\gamma\dot{x}^2\leqslant 0,$$

т. е. V убывает на любой траектории системы, кроме тех, к-рые отвечают стационарным состояниям (x=-w. 0, +w) Потенц. энергия имеет максимум $V_2=w^4/4$ при $|x|$=w. Поэтому для всех нач. условий

$$\{x,\ \dot{x}\} \in \bar{D},\ \bar{D} = \{\,|x| < \omega,\ V(x,\ \dot{x}) < \omega^4/4\} \qquad (8)$$

ни одна из траекторий не выйдет за пределы D^- (иначе это повлекло бы рост, а не убывание V). Следовательно, система приближается к единственному стационарному состоянию в области D, где V достигает минимума V=0, т. е. к x=0. Это состояние асимптотически устойчиво.

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению

- Пусть 1) $f_k(x_1, \dots x_n)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы по $x_1, \dots x_n$,

$$\left|f_k(x_1, \dots x_n)\right| \le \left(\sqrt{\sum_{s=1}^{n} x_s^2}\right)^{\alpha}, (\alpha > 0), \quad k = 1, \dots n$$

2) .

Если все собственные числа матрицы А системы первого приближения имеют отрицательные действительные части, то тривиальное решение устойчиво.

Если хотя бы одно собственное число имеет положительную действительную часть , то тривиальное решение неустойчиво.

Фазовая плоскость — координатная плоскость, в которой по осям координат откладываются какие-либо две переменные (фазовые координаты), однозначно определяющие состояние системы второго порядка.

Фазовая плоскость является частным случаем фазового пространства, которое может иметь большую размерность.

В физике колебаний на оси абсцисс фазовой плоскости откладывается значения параметра **x**, например, величину отклонения от равновесия, на оси ординат — первая производная **x** по времени — скорость перемещения, что, очевидно, для движущихся материальных тел связывает ось ординат с импульсом тела.

Фазовая плоскость, введенная впервые Пуанкаре, позволила в наглядной форме решить многие задачи линейной и нелинейной механики.

Рассмотрим физическую систему с одной степенью свободы, описываемую дифференциальным уравнением, решенным относительно $\frac{d^2x}{dt^2}$ (независимой переменной является время),

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \tag{22. 1}$$

Вводя обозначение

$$\frac{dx}{dt} = y, \tag{22. 2}$$

заменим уравнение (22. 1) эквивалентной системой уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = f(x, y). \end{cases}$$

Изменение состояния системы отображается на фазовой плоскости движением этой точки. След от движения изображающей точки называется **фазовой траекторией**. Через каждую точку фазовой плоскости проходит лишь одна фазовая траектория, за исключением особых точек. Стрелками на фазовых траекториях показывается перемещение изображающей точки с течением времени.

Полная совокупность всевозможных различных фазовых траекторий — это **фазовый портрет**. Он даёт представление о совокупности всех возможных состояний системы и типах возможных движений в ней. Фазовый портрет удобен для рассмотрения движений макроскопических и квантовых частиц

Классификация точек

Рассмотрим систему двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Рассмотрим следующие возможные случаи:

1) Корни характеристического уравнения действительные, отрицательные и различные.

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Точка покоя $x = y \equiv 0$ будет устойчива. Такая точка покоя называется **устойчивым узлом**.

- 2) Корни характеристического уравнения действительны и

$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 < 0$ или $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

В этом случае точка покоя также будет устойчива.

3) Хотя бы один из корней λ_1, λ_2 положителен.
В этом случае точка покоя $x = y \equiv 0$ неустойчива, и такую точку называют **неустойчивым седлом**.
4) Оба корня характеристического уравнения положительны $\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0$.
В этом случае точка покоя $x = y \equiv 0$ неустойчива, и такую точку называют **неустойчивым узлом**.

Если полученного решения $\begin{cases} x = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t} \\ y = C_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$ системы исключить параметр *t*, то полученная функция $y = \varphi(t)$ дает траекторию движения в системе координат XOY.