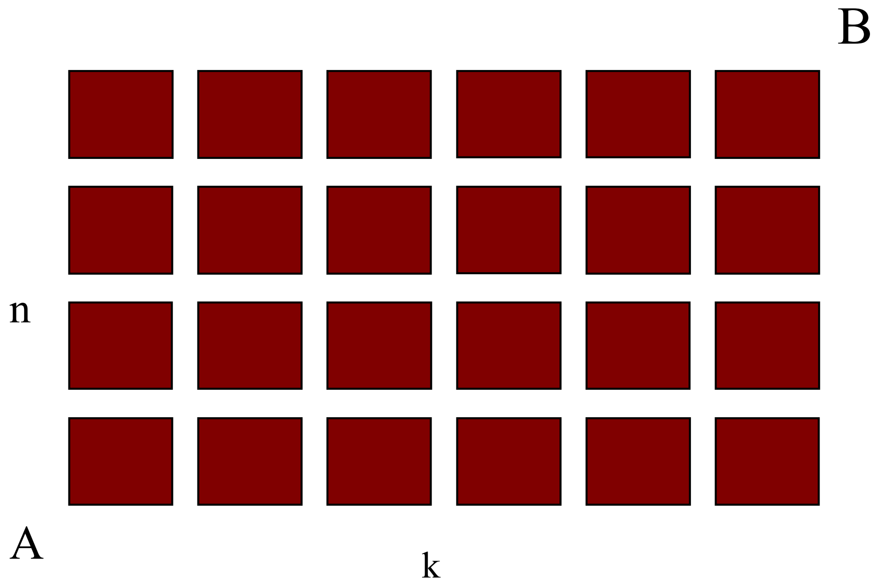
Лекция 7

Задачи комбинаторного анализа

Сочетания и фигурные числа

Задача 1.

Путник хочет попасть из пункта А в пункт В кратчайшим путем, т.е. двигаясь все время или «слева направо», или «снизу вверх». Сколькими путями он может добраться из А в В? (На рисунке изображен план города)



фигурные числа

Сопоставим каждому пути из A в B последовательность из нулей и единиц – если на очередном перекрестке выбран путь вправо, ставим цифру 0, а если выбран путь вверх, ставим цифру 1.

Число перестановок из k нулей и n единиц равно

$$P(k, n) = C_{n+k}^{k} = \frac{(n+k)!}{n! \cdot k!}$$

Арифметический квадрат

- Существует формула сочетаний:

$$C_{n+k}^{k} = C_{n+k-1}^{k} + C_{n+k-2}^{k-1} + \ldots + C_{n-1}^{0}$$

применив получим таблицу. Эту таблицу называют **арифметическим квадратом.**

	0	1	2	3	4	5	6	7	*k*
0	1	1	1	1	1	1	1	1	...
1	1	2	3	4	5	6	7	8	...
2	1	3	6	10	15	21	28	36	...
3	1	4	10	20	35	56	84	120	...
4	1	5	15	35	70	126	210	330	...
5	1	6	21	56	126	252	462	792	...
6	1	7	28	84	210	462	924	1716	...
7	1	8	36	120	330	792	1716	3432	...
n	...	...	...	...	...	...	...	...	...

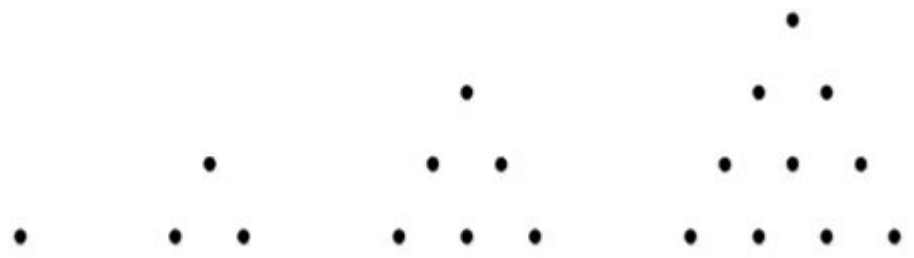
фигурные числа

Дело в том, что числа 1, 2, 3, … можно изображать строками из одной, двух, трех и т.д. точек, а эти строки объединить в треугольники (рис 4). Тогда число точек в каждом треугольнике будет равно соответствующему числу во строке с номером 2 арифметического квадрата. Поэтому числа 1, 3, 6, 10, 15, 21 и т.д. называют треугольными числами,

k-е треугольное число равно .

$$C_{k+1}^2 = \frac{(k+1)k}{2}$$

Рис. 4



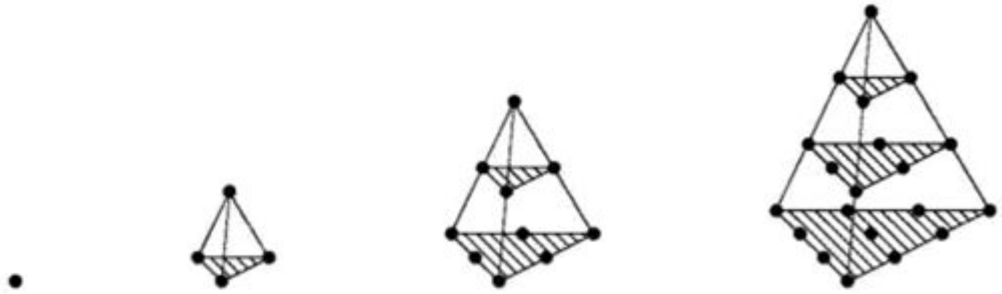
фигурные числа

Треугольники, изображенные на рис 4., можно объединять в пирамиды (рис. 7). Число точек в каждой пирамиде равно соответствующему числу в четвертой строке арифметического квадрата. Поэтому числа 1, 4, 10, 20, 35 и т.д. называют пирамидальными.

Их общий вид такой:

$$C_{k+2}^{3} = \frac{(k+2)(k+1)k}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Рис. 7



Неравенство Бернулли

c^n > 1 + n (c – 1), где c – произвольное число, большее 1, n – натуральное число, большее 1.

Доказательство.

Для каждого натурального n и чисел a = 1 и b = c-1 верны равенства

$$c^n = (1+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m b^m$$

По условию b > 0 и n >=2. Следовательно, каждое слагаемое (их по меньшей мере три) в полученной сумме строго положительно. Значит,

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m b^m \geq 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2} b^2 \quad > 1 + nb$$

и доказываемое неравенство верно.

Неравенство Бернулли

Неравенство Бернулли утверждает, что если x>-1, то для всех натуральных значений n выполняется неравенство

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Неравенство может применяться для выражений вида $1{,}005^{200}$ или $0{,}992^{10}$

$$1{,}005^{200} = (1+0{,}005)^{200} \geq 1+200 \cdot 0{,}005 = 2$$

$$0{,}994^{10} = (1-1{,}006)^{10} \geq 1-10 \cdot 0{,}006 = 0{,}94$$

Кроме того, очень большая группа неравенств может быть легко доказана с помощью теоремы Бернулли.

Пример 1. *Доказать, что для любых n ϵ N* $(1,5)^n \geq 1 + 0,5n$

Доказательство. $1,5^n = (1 + 0,5)^n$ ...ожив *x=0,5 и* применив теорему Бернулли для выражения $(1 + 0,5)^n$

получим требуемое неравенство.

Пример 2. *Доказать, что для любых n ϵ N* $(0,7)^n \geq 1 - 0,3n$

Доказательство.

$(0,7)^n = (1 - 0,3)^n \geq 1 - 0,3n$ ...еме Бернулли, что и требовалось.

Задача 1. Из данной пропорции найти *x* и *y*.

$$C_x^{y+1} : C_x^{y} : C_x^{y-1} = 2 : 2 : 1$$

Решение.

Записав отдельно отношение первого члена пропорции ко второму и второго к третьему, после сокращения получим:

$$\frac{x!}{(y+1)!\,(x-y-1)!} : \frac{x!}{y!(x-y)!} = \frac{x-y}{y+1};$$

$$\frac{x!}{y!(x-y)!} : \frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} = \frac{x-y+1}{y}.$$

В силу условия задачи мы приходим к системе:

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{y+1} = 1 \\ \dfrac{x-y+1}{y} = 2. \end{cases}$$

Решая её, получаем $x=5$ и $y=1$.

Задача 2

Вычислить сумму

$$C_{n+2}^1 + 3C_{n+2}^2 + 5C_{n+2}^3 + \ldots + (2n+3)C_{n+2}^{n+2} \quad (n \ge -1).$$

Обозначим искомую сумму через S. Тогда

$$S - 1 = -1 \cdot C_{n+2}^0 + C_{n+2}^1 + 3C_{n+2}^2 + 5C_{n+2}^3 + \ldots + (2n+3)C_{n+2}^{n+2}. \qquad (*)$$

Учитывая свойство $C_n^k = C_n^{n-k}$, можем переписать (*) в виде:

$$S - 1 = (2n+3)C_{n+2}^0 + (2n+1)C_{n+2}^1 + \ldots + C_{n+2}^{n+1} - C_{n+2}^{n+2}. \qquad (**)$$

Сложив равенства (*) и (**), получим:

$$2S - 2 = (2n+2)C_{n+2}^0 +$$

$$+ (2n+2)C_{n+2}^1 + \ldots + (2n+2)C_{n+2}^{n+1} + (2n+2)C_{n+2}^{n+2},$$

откуда $2(S-1)=(2n+2)(C_{n+2}^0+C_{n+2}^1+\ldots+C_{n+2}^{n+2})$. Разделим обе части равенства на 2 и используем свойство $C_m^0+C_m^1+\ldots+C_m^m=2^m$. Получим: $S-1=(n+1)\cdot 2^{n+2}$, откуда $S=(n+1)\cdot 2^{n+2}+1$.

Ответ: $(n+1)\cdot 2^{n+2}+1$.

Задача

Доказать, что $3^{2n+3} - 24n + 37$

делится нацело на 64 при любом натуральном n.

Доказательство.

$$3^{2n+3} - 24n + 37 = 27 \cdot 9^n - 24n + 37 = 27 \cdot (1+8)^n - 24n + 37 =$$

$$= 27 \cdot (C_n^0 + C_n^1 \cdot 8 + C_n^2 \cdot 8^2 + C_n^3 \cdot 8^3 + \ldots + C_n^n \cdot 8^n) - 24n + 37 =$$

$$= 27 + 216n + 8^2(27 \cdot C_n^2 + 27 \cdot C_n^3 \cdot 8 + \ldots + 27C_n^n \cdot 8^{n-2}) - 24n + 37.$$

Обозначив выражение в скобках через а, а $\in$ N, имеем:

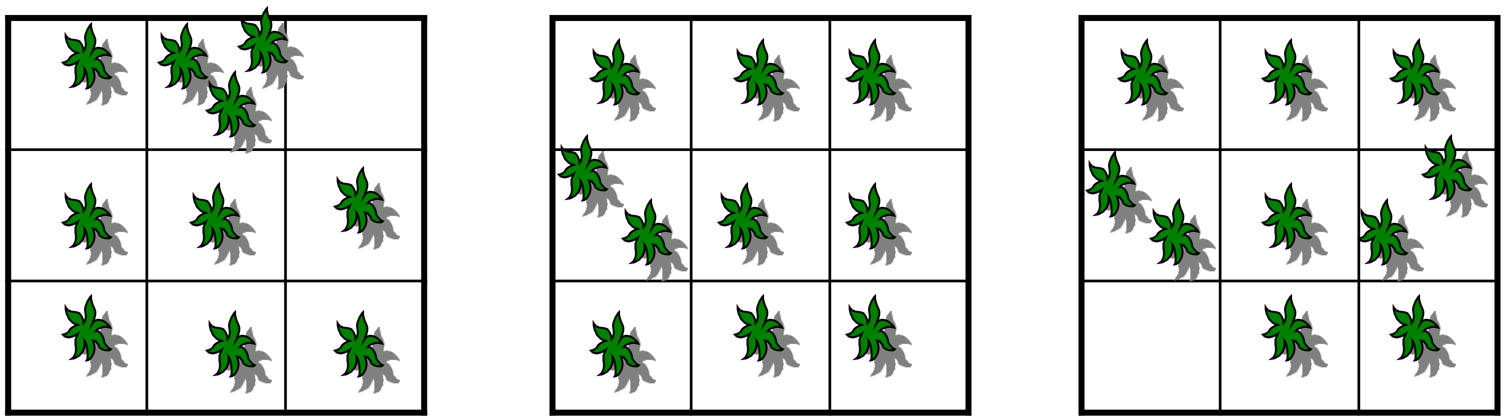
$$3^{2n+3} - 24n + 37 = 64 + 192n + 64a$$

Полученная сумма делится на 64, что и требовалось доказать.

Принцип Дирихле

Принцип Дирихле

Если *k+1* или более объектов расположены в *k* коробках, тогда есть по крайней мере одна коробка, содержащая два или более из объектов.



Реализация принципа Дирихле

Если n объектов расположены в k коробках, то как минимум одна коробка содержит как минимум n/k объектов.

Доказательство:

Предположим, что ни одна коробка не содержит более чем $[n/k]–1$ объектов. Общее количество элементов в коробках :

$$k([n/k]-1)<k(((n/k)+1)-1)=n$$

Причем, $[n/k]<(n/k)+1$.

Принцип Дирихле

Пример

Сколько человек из 100 родились в одном месяце?

Среди 100 человек есть по крайней мере [100/12] =9, которые родились в одном и том же месяце

Раскладки

В задачах на раскладки элементы раскладываются в несколько «ящиков» и надо найти число способов это сделать.

Раскладки

Задача 1. Шары и лузы.

Скольким способами могут распределиться 15 перенумерованных бильярдных шаров в 6 лузах?

Шары	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Лузы	3	2	2	1	6	4	4	6	3	1	2	1	6	3	6

Вторая строка этой схемы не что иное, как бланк длины 15, заполненный цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Поэтому число таких распределений шаров равно числу размещений с повторениями из 6 элементов по 15, т. е. - $\bar{A}_6^{15} = 6^{15}$

Раскладки

Вывод:

Число способов размещения n различных предметов по m различным «ящикам» равно

$$\bar{A}_m^n = m^n$$

Раскладки

Задача 2. Сбор яблок.

Трое ребят собрали с яблони 40 яблок. Сколькими способами они могут их разделить, если все яблоки считаются одинаковыми?

Раскладки

Мы имеем дело с сочетаниями с повторениями - есть 3 типа предметов (мальчики) и надо делать из них комбинации из 40 элементов (по числу яблок, какое - кому), порядок элементов не учитывается, разные комбинации отличаются количеством предметов хотя бы одного типа (т.е. как раз числом яблок, достающимся хотя бы одному мальчику)

$$\bar{C}_3^{40} = c_{42}^{2} = \frac{42!}{40! \cdot 2!} = 861$$

Раскладки

Вывод:

Число способов размещения n одинаковых предметов по m различным ящикам равно

$$\bar{C}_m^n = C_{m+n-1}^n = C_{m+n-1}^{m-1}$$

Раскладки

Задача 3.

Тайным голосованием 30 человек голосуют по 5 предложениям. Сколькими способами могут распределиться голоса, если каждый голосует только за одно предложение и учитывается лишь количество голосов, поданных за каждое предложение?

Раскладки

Ответ:

Так как не учитывается порядок голосов, а учитывается только их количество, то надо распределить 30 неразличимых бюллетеней по 5 «ящикам». То это сочетание с повторением.

$$\bar{C}_5^{30} = \frac{(30+5-1)!}{30!\,(5-1)!} = 46376$$

Раскладки

Задача 4.

Сколькими способами можно расположить в 9 лузах 7 белых шаров и 2 черных шара? Часть луз может быть пустой, а лузы считаются различными.

Раскладки

7 белых шаров можно разместить в 9 лузах способами $\bar{C}_9^7 = C_{15}^7$

2 черных шара $\bar{C}_9^2 = C_{10}^2$ *способами.*

Всего имеем $\bar{C}_9^7 \cdot \bar{C}_9^2$ *способов.*

Раскладки

- *Если имеется n_1 одинаковых предметов одного вида, n_2 одинаковых предметов другого вида, … n_k одинаковых предметов k-того вида, то их можно разделить между двумя людьми*

$(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1)$ способами.

Доказательство:

$$\bar{C}_2^{n_1} \cdot \bar{C}_2^{n_2} \cdots \bar{C}_2^{n_k} = (n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1)$$

Раскладки

Задача 5.

Двое ребят собрали 10 ромашек, 15 васильков и 14 незабудок. Сколькими способами они могут разделить эти цветы?

Раскладки

Решение:

*Так как цветы каждого вида можно делить независимо от цветов другого вида, то по правилу произведения получаем 11*16*15 = 2640 способов раздела цветов.*

Раскладки

Задача 6.

Сколькими способами можно разделить 10 белых грибов, 15 подберезовиков и 8 подосиновиков между 4 ребятами (грибы одного вида считаются одинаковыми)?

Раскладки

- *Решение: Применяя формулу*

Число способов размещения n одинаковых предметов по m различным ящикам равно $\bar{C}_m^n = C_{m+n-1}^n = C_{m+n-1}^{m-1}$

Получаем $\bar{C}_4^{10} \cdot \bar{C}_4^{15} \cdot \bar{C}_4^{8} = C_9^3 \cdot C_{14}^3 \cdot C_7^3$ =38507040

Подобная формула верна и в общем случае.

Если имеется n_1 предметов одного вида, n_2 предметов другого вида, …, n_k предметов k-того вида, причем предметы одного и того же вида неотличимы друг от друга, то число способов распределения этих предметов по m различным ящикам равно

$$C_{n_1+m-1}^{m-1} C_{n_2+m-1}^{m-1} \cdots C_{n_k+m-1}^{m-1}$$

Разбиения и полиномиальная теорема

Разбиением множества A на k частей называется семейство его подмножеств, такое, что

1) $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$;

2) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$.

Если порядок частей существенен (т.е. разбиения, отличающиеся одно от другого только перестановкой частей, считаются *различными*), то говорят, что рассматриваются *упорядоченные разбиения.*

<u>Теорема.</u> *Число упорядоченных разбиений множества мощности n на k частей мощностей* $n_1; n_2, \dots, n_k$ $(n_1 + n_2 + \dots n_k = n)$ *равно*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

Задача.

Сколькими способами можно расставить белые фигуры (короля, ферзя, две ладьи, двух слонов и двух коней) на первой линии шахматной доски (не соблюдая шахматные правила)?

Ответ:

$$P(1,1,2,2,2) = \frac{8!}{1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 5040$$

Величина $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$ обозначается

Через $\dbinom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ или $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$

и называется

полиномиальным коэффициентом.

Полиномиальная формула:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n =$$
$$= \sum P(n_1, n_2, ..., n_k) \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \cdots \cdot x_k^{n_k}$$

Где сумма распространена на всевозможные разбиения $n_1+n_2+\ldots+n_k$ числа n на k целых неотрицательных слагаемых.

Доказательство:
Запишем $(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n$

в виде произведения n сомножителей и раскроем скобки, выписывая все сомножители в порядке их появления.

Получим всевозможные перестановки с повторениями, составленные из букв x_1, x_2,..., x_k такие, что в каждую перестановку входит n букв.

Чтобы найти коэффициент при $$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

надо сосчитать, сколько перестановок с повторениями содержат n_1 раз букву x_1, - n_2 раз букву x_2 и т.д.

Число таких перестановок $$P(n_1, n_2, ..., n_k)$$

где $n_1+n_2+...+n_k=n$, так как в каждый член разложения входит по одному элементу из каждой скобки, а общее число перемножаемых скобок равно n. ♦

Пример 1

Написать разложение полинома третьей степени

$$(a+b+c)^3 = C_3(3,0,0)\,a^3 + C_3(2,1,0)\,a^2b + C_3(2,0,1)\,a^2c + C_3(1,2,0)\,ab^2 +$$
$$+ C_3(1,1,1)\,abc + C_3(1,0,2)\,ac^2 + C_3(0,3,0)\,b^3 + C_3(0,2,1)\,b^2c +$$
$$+ C_3(0,1,2)\,bc^2 + C_3(0,0,3)\,c^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc +$$
$$+ 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$$

Задание: определить полиномиальные коэффициенты в данном разложении

Пример 2

Найти разложение степени тринома $(x_1 + x_2 + x_3)^4$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^4$$

$$= {x_1}^4 + {x_2}^4 + {x_3}^4 + 4({x_1}^3 x_2 + {x_1}^3 x_3 + x_1 {x_2}^3 + {x_2}^3 x_3 + x_1 {x_3}^3 + x_2 {x_3}^3) +$$

$$+ 6({x_1}^2 {x_2}^2 + {x_1}^2 {x_3}^2 + {x_2}^2 {x_3}^2) + 12({x_1}^2 x_2 x_3 + x_1 {x_2}^2 x_3 + x_1 x_2 {x_3}^2)$$

Пример. Найти коэффициент при $x^3 y^2$ из разложения степени

$$(x+y+3)^7$$

Коэффициент при $x^3 y^2 z^2$ из разложения

степени $(x+y+z)^7$ равен $\dfrac{7!}{3!2!2!} = 210$

Имеем член разложения $210x^3 y^2 z^2$

При $z = 3^2$ получаем $1890x^3 y^2$

Пример. *Найти коэффициент при x^{30} в разложении выражения $(3-x^2+x^5)^{19}$ по полиномиальной формуле, полученный после раскрытия скобок и приведения подобных членов.*

Общий член разложения по полиномиальной формуле имеет вид: $3^m \cdot (-x^2)^n \cdot (x^5)^k \cdot P(m,n,k)$

Для отыскания всех случаев, в которых возникает x^{30}, решаем в целых неотрицательных числах уравнение $2n+5k=30$.

Выразим k: $k=6-\dfrac{2n}{5}$. Видно, что k принимает целые значения, если n кратно 5. Выпишем все такие случаи:

$$n=0 \;\Rightarrow\; k=6;\; n=5 \;\Rightarrow\; k=4;$$

$$n=10 \;\Rightarrow\; k=2;\; n=15 \;\Rightarrow\; k=0.$$

Для каждой найденной пары значений n, k значение m находим из уравнения $m+n+k=19$. Получим 4 набора $(m;n;k)$:

$$(13;0;6),\ (10;5;4),\ (7;10;2),\ (4;15;0).$$

Слагаемые, содержащие x^{30}, таковы:

$$3^{13}\cdot(-x^2)^0\cdot(x^5)^6\cdot P(13,0,6);\qquad 3^{10}\cdot(-x^2)^5\cdot(x^5)^4\cdot P(10,5,4);$$

$$3^{7}\cdot(-x^2)^{10}\cdot(x^5)^2\cdot P(7,10,2);\qquad 3^{4}\cdot(-x^2)^{15}\cdot(x^5)^0\cdot P(4,15,0).$$

В итоге, коэффициент при x^{30} имеет вид:

$$19!\cdot\left(\frac{3^{13}}{13!0!6!}-\frac{3^{10}}{10!5!4!}+\frac{3^{7}}{7!10!2!}-\frac{3^{4}}{4!15!0!}\right).$$

<u>Ответ:</u> $19!\cdot\left(\frac{3^{13}}{13!0!6!}-\frac{3^{10}}{10!5!4!}+\frac{3^{7}}{7!10!2!}-\frac{3^{4}}{4!15!0!}\right).$

Формула включений и исключений

Формула включений и исключений

Пусть даны ***N*** объектов (предметов), каждый из которых может обладать или не обладать одним или несколькими из свойств $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Через a'_i обозначим отсутствие свойства a_i;

через ***N(a)*** – количество предметов, обладающих свойством ***a*** (***a*** – любое из свойств a_i или a'_i);

через ***N(a,b,c,…,k)*** – количество предметов, обладающих попарно различными свойствами ***a,b,c,..,,k***

Формула включений и исключений

Если все свойства a_i попарно не совместимы (т.е. $N(a_i a_k)=0$ при $i \neq k$), то формула имеет вид:

$$N(a_1' \ldots a_n') = N - \sum_{1 \le i \le n} N(a_i)$$

Формула включений и исключений

Тогда, очевидно,

$$N(a_i') = N - N(a_i)$$

$$N(a_1'a_2') = N - N(a_1) - N(a_2) + N(a_1a_2)$$

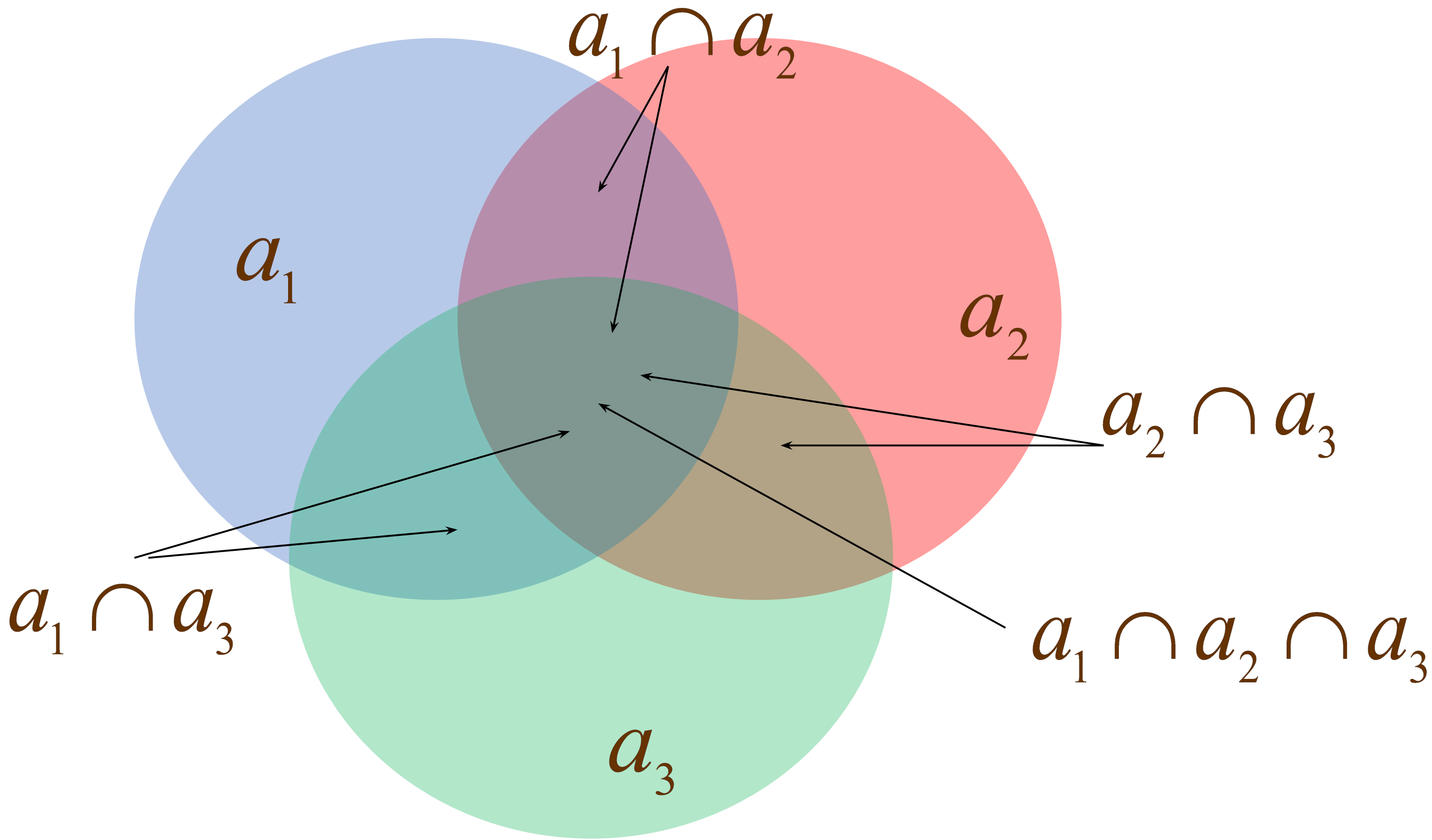
т.к. при вычитании ***N(a*$_1$*)*** и ***N(a*$_2$*)*** из общего числа предметов

число ***N(a*$_1$*a*$_2$*)*** вычитается дважды.

Формула включений и исключений

$$N(a_1'a_2'a_3') = N - N(a_1) - N(a_2) - N(a_3) +$$

$$N(a_1a_2) + N(a_1a_3) + N(a_3a_2) - N(a_1a_2a_3)$$



Формула включений и исключений

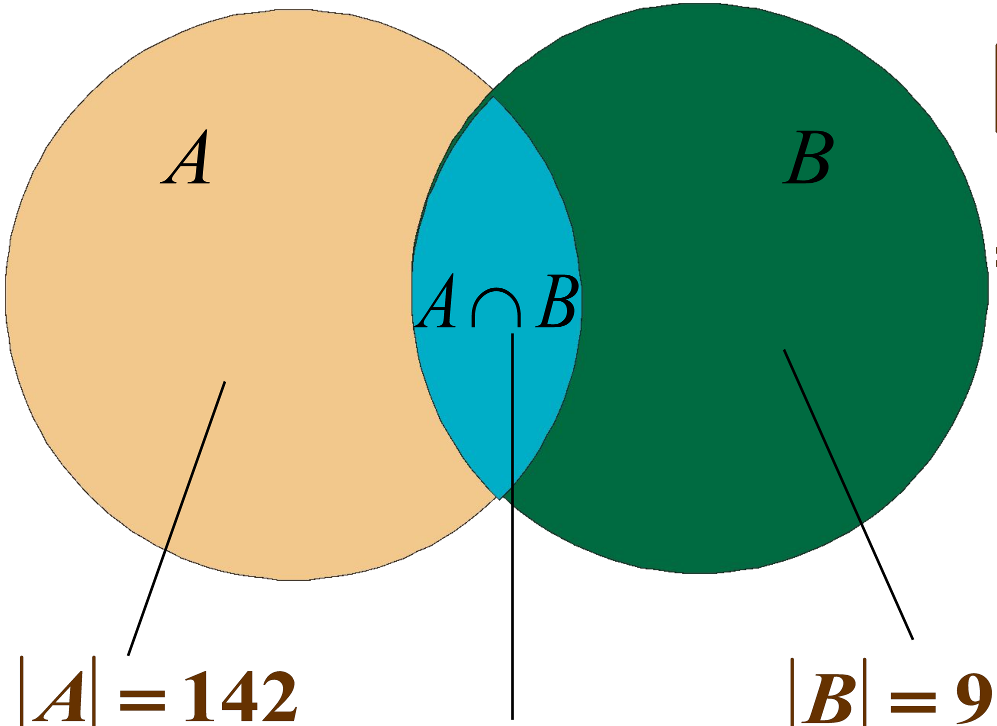
При произвольном ***n*** справедлива формула включений и исключений:

$$N(a_1' a_2' \ldots a_n') = N - \sum_{1 \le i \le n} N(a_i) +$$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} N(a_i a_j) + \ldots + (-1)^n N(a_1 a_2 \ldots a_n)$$

Формула включений и исключений

Сколько положительных целых чисел, не превышающих 1000, делятся на 7 или на 11?



$|A| = 142$
делится на 7

$|A \cap B| = 12$

$|B| = 90$
делится на 11

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$= \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{7 \cdot 11} \right\rfloor$$

$$= 142 + 90 - 12$$

$$= \mathbf{220}$$

Пример. *Подсчитать количество различных перестановок цифр числа 123132, при которых никакие 2 одинаковые цифры не идут друг за другом.*

Общее количество различных перестановок цифр числа 123132 равно $P(2,2,2) = \dfrac{6!}{2!2!2!} = \dfrac{720}{8} = 90.$

Если две какие-то одинаковые цифры стоят рядом, мы можем считать эту двойную цифру единым символом. Тогда количество перестановок, содержащих этот символ, равно

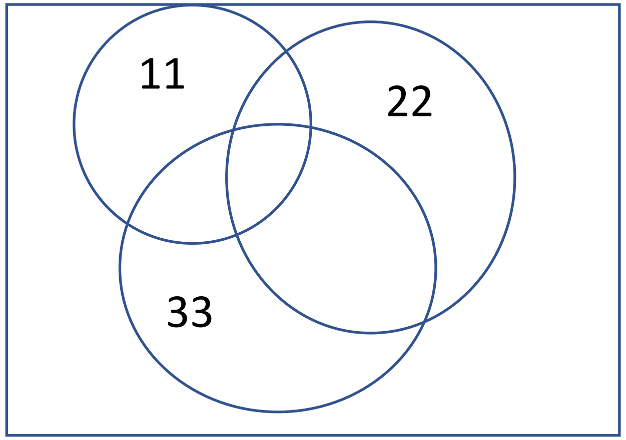
$$P(2,2,1) = \frac{5!}{2!2!1!} = \frac{120}{4} = 30.$$

Заметим, что количество таких случаев равно $C_3^1 = 3.$

Аналогично, количество перестановок, в которых присутствуют пара двойных символов, равно $P(2,1,1) = \frac{4!}{2!1!1!} = \frac{24}{2} = 12$, количество таких случаев равно $C_3^2 = 3$, а общее число перестановок, образованных парами одинаковых цифр, равно $P(1,1,1) = 3! = 6$.

В итоге, применяя формулу включений и исключений, будем иметь: $90 - 3 \cdot 30 + 3 \cdot 12 - 6 = 30$.

Ответ: 30 перестановок.



Рекуррентные соотношения

Рекуррентные соотношения

При решении многих комбинаторных задач используется метод сведения данной задачи к аналогичной задаче, касающейся меньшего числа предметов.

Такой метод называется ***методом рекуррентных соотношений***. Пользуясь рекуррентным соотношением можно свести задачу об ***n*** предметах к задаче об ***(n–1)*** предметах, потом об ***(n–2)*** предметах и т.д. Последовательно уменьшая число предметов, доходим до задачи, которую уже легко решить. Во многих случаях удается получить из рекуррентного отношения явную формулу для решения комбинаторной задачи.

Примеры рекуррентных формул

$$P_n = P_{n-1} \cdot n \qquad n! = (n-1)! \cdot n$$

$$A_n^k = n \cdot A_{n-1}^{k-1} \qquad \bar{A}_n^k = n \cdot \bar{A}_n^{k-1}$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

Линейные рекуррентные соотношения

Рекуррентное соотношение вида

$a_n=b_1(n)a_{n-1}+b_2(n)a_{n-2}+b_3(n)a_{n-3}+\ldots+b_p(n)a_p$

называется ***линейным рекуррентным соотношением порядка*** p, т.к. a_n выражается через p элементов вида $a_i\,(i=\overline{1,p})$

Соотношение линейно-рекуррентное, т.к. показатель каждой степени a_i равен 1.

Рекуррентные соотношения

Примеры

1) $a_n = 3a_{n-1}^3 + 4a_{n-2}$ - нелинейное, т.к. a_{n-1} в 3-ей степени

2) $a_n = 3n^3 a_{n-1} + n \cdot a_{n-2}$ - линейное

3) $a_{n+2}=a_n \cdot a_{n+1}-3a_{n+1}+1$ - нелинейное рекуррентное соотношение порядка 2, т.к. зависит от a_n и a_{n+1}

4) $a_{n+3}=6a_n \cdot a_{n+2}+a_{n+1}$ - нелинейное рекуррентное соотношение порядка 3, т.к. зависит от a_n, a_{n+1} и a_{n+2}

5) $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$ - линейное рекуррентное соотношение порядка 2, т.к. зависит от a_n и a_{n+1}

Линейные рекуррентные соотношения

Решением рекуррентного соотношения является последовательность, при подстановке которой соотношение тождественно выполняется.

Решение рекуррентного соотношения ***p***-го порядка называется ***общим***, если оно зависит от ***p*** произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_p$ и путем подбора этих постоянных можно получить любое решение данного соотношения.

Пример

$a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$

$a_n=2^n;\ a_{n+1}=2^{n+1};\ a_{n+2}=2^{n+2}$

$2^{n+2}=3\cdot 2^{n+1}-2\cdot 2^n=3\cdot 2^n\cdot 2^1-2\cdot 2^n$

2^n- решение данного рекуррентного соотношения

Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Линейное рекуррентное соотношение вида

$a_n=b_1a_{n-1}+b_2a_{n-2}+b_3a_{n-3}+\ldots+b_pa_p$, $b_p\neq 0$

с постоянными коэффициентами b_i при $1\leq i\leq p$ называется ***линейным однородным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами***.

Числа Фибоначчи

Последовательность (числа) Фибоначчи

Числовая последовательность, в которой каждое число равно сумме двух предыдущих, называется ***последовательностью Фибоначчи*** (***числами Фибоначчи)***.

F(n+1) = F(n) + F(n–1).

Выражение чисел Фибоначчи через C_n^k имеет вид:

F(n) = $C_{n+1}^0 + C_n^1 + C_{n-1}^2 + \ldots +$

где $p = \frac{n+1}{2}$, если ***n*** нечетно (***p*** - целая часть числа $\frac{n+1}{2}$

$p = \frac{n}{2}$, если ***n*** четно

Числа Фибоначчи. Пример

Пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата через 2 месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна пара кроликов?

<u>Решение</u>:

Через месяц будет 2 пары кроликов.

Через 2 месяца приплод даст только первая пара кроликов и получится 3 пары.

Через 3 месяца приплод дадут и исходная пара, и пара, появившаяся 2 месяца тому назад. Всего будет 5 пар кроликов.

Числа Фибоначчи. Пример

F_n – количество пар кроликов через n месяцев.

Через $n+1$ месяцев будет F_n пар и еще столько новорожденных пар кроликов, сколько было в конце месяца $n-1$, т.е. F_{n-1}.

$$\Downarrow$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

По условию: $F_0=1,\ F_1=2 \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} F_2=1+2=3 \\ F_3=2+3=5 \\ F_4=3+5=8 \text{ и т.д.} \end{array}\right.$$

где F_n – *числа Фибоначчи*

Отношения вида $a_{n+2}=b_1a_{n+1}+b_2a_n$

Решение данных отношений основано на следующих утверждениях:

1) $a_1(n)$ и $a_2(n)$ – решения данного рекуррентного отношения, тогда для любых чисел A и B последовательность $a_n=A\cdot a_1(n)+B\cdot a_2(n)$ также решение этого отношения.

2) Если число r_1 – корень квадратного уравнения $r^2=b_1r+b_2$, то последовательность $1, r, r^2, \dots , r^{n-1}, \dots$ есть решение рекуррентного отношения $a_{n+2}=b_1a_{n+1}+b_2a_n$

Решение отношений вида $a_{n+2}=b_1a_{n+1}+b_2a_n$

1) Составляем квадратное уравнение $r^2=b_1r+b_2$, которое является характеристическим для данного отношения.

2) Если квадратное уравнение имеет 2 различных корня r_1 и r_2, то общее решение отношения $a_{n+2}=b_1a_{n+1}+b_2a_n$ имеет вид:

$$a_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$$

Общее решение для рекуррентного отношения для чисел Фибоначчи

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Характеристическое уравнение:

$$r^2 = r + 1$$

Корни уравнения:

числа $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Общее решение:

$$F_n = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Числа Фибоначчи для начальных условий $F_0=0$, $F_1=1$

-

$$\begin{cases} \text{C1+C2=0} \\ \frac{1}{2}(\text{C1+C2}) + \frac{\sqrt{5}}{2}(\text{C1−C2}) = 1 \end{cases}$$

$$C_2 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} C_1 \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}} C_2 \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

ТЕСТ-ВОПРОСЫ

1. Свойство симметрии биномиальных коэффициентов определяется как:

а) $C_n^k = C_k^n$ б) $C_{n-k}^k = C_n^{n-k}$ в) $C_n^k = C_n^{n-k}$

2. Биномиальные коэффициенты определяются формулой:

а) $A_n^k = k!C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1)$ б) $P_n = n!$

в) $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$ г) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

3. Полиномиальные коэффициенты определяются формулой:

а) $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$ б) $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$

в) $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$ г) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$