

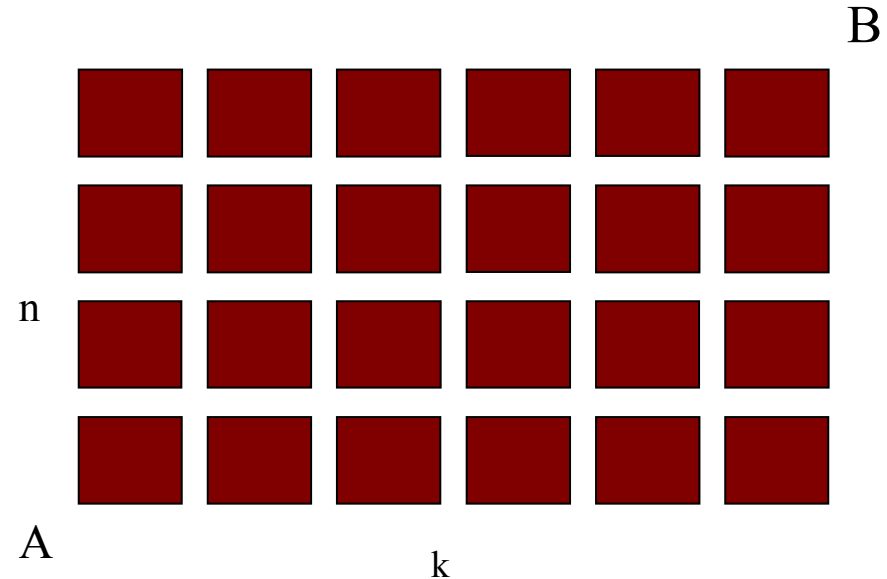
# Лекция 7

## Задачи комбинаторного анализа

# Сочетания и фигурные числа

Задача 1.

Путник хочет попасть из пункта А в пункт В кратчайшим путем, т.е. двигаясь все время или «слева направо», или «снизу вверх». Сколькими путями он может добраться из А в В? (На рисунке изображен план города)



# фигурные числа

Сопоставим каждому пути из А в В последовательность из нулей и единиц – если на очередном перекрестке выбран путь вправо, ставим цифру 0, а если выбран путь вверх, ставим цифру 1.

Число перестановок из  $k$  нулей и  $n$  единиц равно

$$P(k, n) = C_{n+k}^k = \frac{(n+k)!}{n! \cdot k!}$$



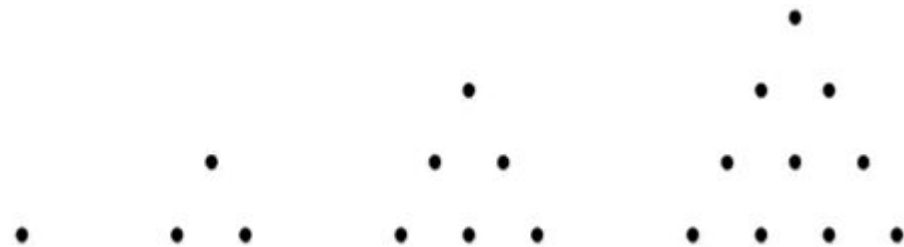
# фигурные числа

Дело в том, что числа 1, 2, 3, ... можно изображать строками из одной, двух, трех и т.д. точек, а эти строки объединить в треугольники (рис 4). Тогда число точек в каждом треугольнике будет равно соответствующему числу во строке с номером 2 арифметического квадрата. Поэтому числа 1, 3, 6, 10, 15, 21 и т.д. называют треугольными числами,

к-е треугольное  
число равно .

$$C_{k+1}^2 = \frac{(k+1)k}{2}$$

Рис. 4



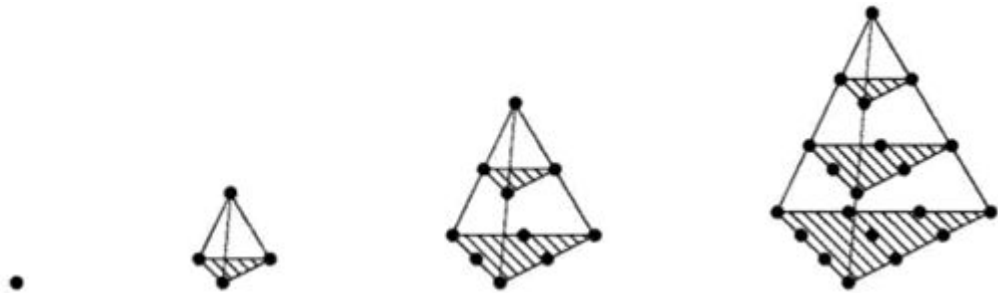
# фигурные числа

Треугольники, изображенные на рис 4., можно объединять в пирамиды (рис. 7). Число точек в каждой пирамиде равно соответствующему числу в четвертой строке арифметического квадрата. Поэтому числа 1, 4, 10, 20, 35 и т.д. называют пирамидальными.

Их общий вид такой:

$$C_{k+2}^3 = \frac{(k+2)(k+1)k}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Рис. 7



# Неравенство Бернулли

$c^n > 1 + n(c - 1)$ , где  $c$  – произвольное число, большее 1,  $n$  – натуральное число, большее 1.

Доказательство.

Для каждого натурального  $n$  и чисел  $a = 1$  и  $b = c - 1$  верны равенства

$$c^n = (1 + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m b^m$$

По условию  $b > 0$  и  $n \geq 2$ . Следовательно, каждое слагаемое (их по меньшей мере три) в полученной сумме строго положительно. Значит,

$$\sum_{m=0}^n C_n^m b^m \geq 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2} b^2 > 1 + nb$$

и доказываемое неравенство верно.

## Неравенство Бернулли

Неравенство Бернулли утверждает, что если  $x > -1$ , то для всех натуральных значений  $n$  выполняется неравенство

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Неравенство может применяться для выражений  $1,005^{200}$  или  $0,994^{10}$

$$1,005^{200} = (1 + 0,005)^{200} \geq 1 + 200 \cdot 0,005 = 2$$

$$0,994^{10} = (1 - 0,006)^{10} \geq 1 - 10 \cdot 0,006 = 0,94$$

Кроме того, очень большая группа неравенств может быть легко доказана с помощью теоремы Бернулли.



**Пример 1.** Доказать, что для любых  $n \in \mathbb{N}$   $(1,5)^n \geq 1 + 0,5n$

Доказательство:  $1,5^n = (1 + 0,5)^n$ . Если  $x=0,5$  и применив теорему Бернулли для выражения  $(1 + 0,5)^n$  получим требуемое неравенство.

**Пример 2.** Доказать, что для любых  $n \in \mathbb{N}$   $(0,7)^n \geq 1 - 0,3n$   
Доказательство.

$(0,7)^n = (1 - 0,3)^n \geq 1 - 0,3n$ , по теореме Бернулли, что и требовалось.

**Задача 1.** Из данной пропорции  
найти  $x$  и  $y$ .

$$C_x^{y+1} : C_x^y : C_x^{y-1} = 2 : 2 : 1$$

**Решение.**

Записав отдельно отношение первого члена пропорции ко второму и второго к третьему, после сокращения получим:

$$\frac{x!}{(y+1)!(x-y-1)!} : \frac{x!}{y!(x-y)!} = \frac{x-y}{y+1};$$

$$\frac{x!}{y!(x-y)!} : \frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} = \frac{x-y+1}{y}.$$

В силу условия задачи мы приходим к системе:

$$\begin{cases} \frac{x-y}{y+1} = 1 \\ \frac{x-y+1}{y} = 2. \end{cases}$$

Решая её, получаем  $x=5$  и  $y=1$ .

Задача

2

Вычислить сумму

$$C_{n+2}^1 + 3C_{n+2}^2 + 5C_{n+2}^3 + \dots + (2n+3)C_{n+2}^{n+2} \quad (n \geq -1).$$

Обозначим искомую сумму через  $S$ . Тогда

$$S - 1 = -1 \cdot C_{n+2}^0 + C_{n+2}^1 + 3C_{n+2}^2 + 5C_{n+2}^3 + \dots + (2n+3)C_{n+2}^{n+2}. \quad (*)$$

Учитывая свойство  $C_n^k = C_n^{n-k}$ , можем переписать (\*) в виде:

$$S - 1 = (2n+3)C_{n+2}^0 + (2n+1)C_{n+2}^1 + \dots + C_{n+2}^{n+1} - C_{n+2}^{n+2}. \quad (**)$$

Сложив равенства (\*) и (\*\*), получим:

$$\begin{aligned} 2S - 2 &= (2n+2)C_{n+2}^0 + \\ &+ (2n+2)C_{n+2}^1 + \dots + (2n+2)C_{n+2}^{n+1} + (2n+2)C_{n+2}^{n+2}, \end{aligned}$$

откуда  $2(S - 1) = (2n + 2)(C_{n+2}^0 + C_{n+2}^1 + \dots + C_{n+2}^{n+2})$ . Разделим обе части равенства на 2 и используем свойство  $C_m^0 + C_m^1 + \dots + C_m^m = 2^m$ . Получим:  $S - 1 = (n + 1) \cdot 2^{n+2}$ , откуда  $S = (n + 1) \cdot 2^{n+2} + 1$ .

Ответ:  $(n + 1) \cdot 2^{n+2} + 1$ .

# Задача

Доказать, что  $3^{2n+3} - 24n + 37$

делится нацело на 64 при любом натуральном  $n$ .

Доказательство.

$$\begin{aligned} 3^{2n+3} - 24n + 37 &= 27 \cdot 9^n - 24n + 37 = 27 \cdot (1 + 8)^n - 24n + 37 = \\ &= 27 \cdot (C_n^0 + C_n^1 \cdot 8 + C_n^2 \cdot 8^2 + C_n^3 \cdot 8^3 + \dots + C_n^n \cdot 8^n) - 24n + 37 = \\ &= 27 + 216n + 8^2 (27 \cdot C_n^2 + 27 \cdot C_n^3 \cdot 8 + \dots + 27C_n^n \cdot 8^{n-2}) - 24n + 37. \end{aligned}$$

Обозначив выражение в скобках через  $a$ ,  $a \in \mathbb{N}$ ,

имеем:

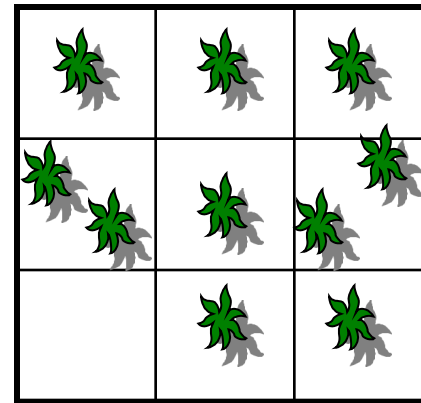
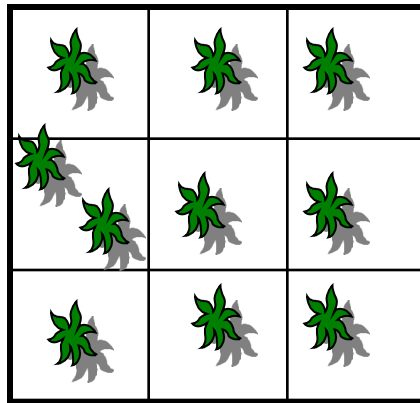
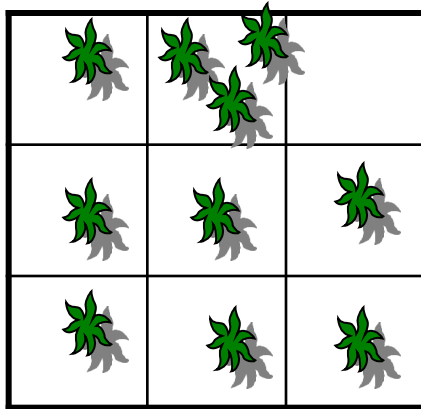
$$3^{2n+3} - 24n + 37 = 64 + 192n + 64a$$

Полученная сумма делится на 64, что и требовалось доказать.

# Принцип Дирихле

# Принцип Дирихле

Если  $k+1$  или более объектов расположены в  $k$  коробках, тогда есть по крайней мере одна коробка, содержащая два или более из объектов.



## Реализация принципа Дирихле

Если  $n$  объектов расположены в  $k$  коробках, то как минимум одна коробка содержит как минимум  $n/k$  объектов.

### Доказательство:

Предположим, что ни одна коробка не содержит более чем  $[n/k]-1$  объектов. Общее количество элементов в коробках :

$$k([n/k]-1) < k(((n/k)+1)-1) = n$$

Причем,  $[n/k] < (n/k)+1$ .



# Принцип Дирихле

## Пример

Сколько человек из 100 родились в одном месяце?

Среди 100 человек есть по крайней мере  $[100/12] = 9$ , которые родились в одном и том же месяце

# Раскладки

В задачах на раскладки элементы раскладываются в несколько «ящичков» и надо найти число способов это сделать.

# Раскладки

Задача 1. Шары и лузы.

*Сколькоим способами могут распределиться 15 перенумерованных бильярдных шаров в 6 лузах?*

Шары	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Лузы	3	2	2	1	6	4	4	6	3	1	2	1	6	3	6

**Вторая строка этой схемы не что иное, как бланк длины 15, заполненный цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Поэтому число таких распределений шаров равно числу размещений с повторениями из 6 элементов по 15, т. е. -  $\bar{A}_6^{15} = 6^{15}$**

# Раскладки

Вывод:

*Число способов размещения  $n$   
различных предметов по  $m$   
различным «ящикам» равно*

$$\bar{A}_m^n = m^n$$

# Раскладки

## Задача 2. Сбор яблок.

*Трое ребят собрали с яблони 40 яблок. Сколькими способами они могут их разделить, если все яблоки считаются одинаковыми?*

# Раскладки

Мы имеем дело с сочетаниями с повторениями - есть 3 типа предметов (мальчики) и надо делать из них комбинации из 40 элементов (по числу яблок, какое - кому), порядок элементов не учитывается, разные комбинации отличаются количеством предметов хотя бы одного типа (т.е. как раз числом яблок, достаемся хотя бы одному мальчику)

$$\bar{C}_3^{40} = c_{42}^2 = \frac{42!}{40! \cdot 2!} = 861$$

# Раскладки

*Вывод:*

*Число способов размещения  $n$   
одинаковых предметов по  $m$   
различным ящикам равно*

$$\bar{C}_m^n = C_{m+n-1}^n = C_{m+n-1}^{m-1}$$



# Раскладки

## Задача 3.

*Тайным голосованием 30 человек голосуют по 5 предложениям. Сколькими способами могут распределиться голоса, если каждый голосует только за одно предложение и учитывается лишь количество голосов, поданных за каждое предложение?*

# Раскладки

*Ответ:*

*Так как не учитывается порядок голосов, а учитывается только их количество, то надо распределить 30 неразличимых бюллетеней по 5 «ящикам». То это сочетание с повторением.*

$$\bar{C}_5^{30} = \frac{(30 + 5 - 1)!}{30! (5 - 1)!} = 46376$$

# Раскладки

*Задача 4.*

*Сколькими способами можно расположить в 9 лузах 7 белых шаров и 2 черных шара? Часть луз может быть пустой, а лузы считаются различными.*

# Раскладки

7 белых шаров можно разместить в 9  
лузах способами  $\bar{C}_{12}^7 = \bar{C}_9^5$

2 черных шара  $\bar{C}_9^2 = C_{10}^2$  способами.

Всего имеем  $\bar{C}_9^7 \cdot \bar{C}_9^2$  способов.

# Раскладки

• Если имеется  $n_1$  одинаковых предметов одного вида,  $n_2$  одинаковых предметов другого вида, ...  $n_k$  одинаковых предметов  $k$ -того вида, то их можно разделить между двумя людьми

$(n_1+1)(n_2+1)\dots(n_k+1)$  способами.

Доказательство:

$$\bar{C}_2^{n_1} \cdot \bar{C}_2^{n_2} \dots \bar{C}_2^{n_k} = (n_1+1)(n_2+1)\dots(n_k+1)$$

# Раскладки

## *Задача 5.*

*Двое ребят собрали 10 ромашек, 15 васильков и 14 незабудок. Сколькими способами они могут разделить эти цветы?*

# Раскладки

*Решение:*

*Так как цветы каждого вида можно делить независимо от цветов другого вида, то по правилу произведения получаем  $11*16*15 = 2640$  способов раздела цветов.*

# Раскладки

## Задача 6.

*Сколькими способами можно разделить 10 белых грибов, 15 подберезовиков и 8 подосиновиков между 4 ребятами (грибы одного вида считаются одинаковыми)?*



# Раскладки

Решение: Применяя формулу

Число способов размещения  $n$  одинаковых предметов по  $m$  различным ящикам равно

$$\bar{C}_m^n = C_{m+n-1}^n = C_{m+n-1}^{m-1}$$

Получаем  $\bar{C}_4^{10} \cdot \bar{C}_4^{15} \cdot \bar{C}_4^8 = C_9^3 \cdot C_{14}^3 \cdot C_7^3 = 38507040$

**Подобная формула верна и в общем случае.**

*Если имеется  $n_1$  предметов одного вида,  $n_2$  предметов другого вида, ...,  $n_k$  предметов  $k$ -того вида, причем предметы одного и того же вида неотличимы друг от друга, то число способов распределения этих предметов по  $m$  различным ящикам равно*

$$C_{n_1+m-1}^{m-1} C_{n_2+m-1}^{m-1} \cdots C_{n_k+m-1}^{m-1}$$

# Разбиения и полиномиальная теорема

**Разбиением** множества  $A$  на  $k$  частей называется семейство его подмножеств, такое,

1)  $A_i \cap A_j = \emptyset$  при  $i \neq j$  ;

2)  $\bigcup_{i=1}^k A_i = A$  .

Если порядок частей существенен (т.е. разбиения, отличающиеся одно от другого только перестановкой частей, считаются *различными*), то говорят, что рассматриваются *упорядоченные разбиения*.

Теорема. Число упорядоченных разбиений множества мощности  $n$  на  $k$  частей мощностей  $n_1, n_2, \dots, n_k$  ( $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ )

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

равно

## Задача.

Сколькими способами можно расставить белые фигуры (короля, ферзя, две ладьи, двух слонов и двух коней) на первой линии шахматной доски (не соблюдая шахматные правила)?

Ответ: 
$$P(1,1,2,2,2) = \frac{8!}{1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 5040$$

Величина  $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$  обозначается

Через  $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$  или  $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$

и называется

**полиномиальным коэффициентом.**

## Полиномиальная формула:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n &= \\ &= \sum P(n_1, n_2, \dots, n_k) \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \dots \cdot x_k^{n_k} \end{aligned}$$

Где сумма распространена на всевозможные разбиения  $n_1 + n_2 + \dots + n_k$  числа  $n$  на  $k$  целых неотрицательных слагаемых.

Доказательство:

Запишем

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$$

в виде произведения  $n$  сомножителей и раскроем скобки, выписывая все сомножители в порядке их появления.

Получим всевозможные перестановки с повторениями, составленные из букв  $x_1, x_2, \dots, x_k$  такие, что в каждую перестановку входит  $n$  букв.

Чтобы найти коэффициент при  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$

надо сосчитать, сколько перестановок с повторениями содержат  $n_1$  раз букву  $x_1$ , -  $n_2$  раз букву  $x_2$  и т.д.

Число таких перестановок  $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$

где  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ , так как в каждый член разложения входит по одному элементу из каждой скобки, а общее число перемножаемых скобок равно  $n$ . ♦



## Пример 1

Написать разложение полинома третьей степени

$$\begin{aligned}(a + b + c)^3 &= C_3(3,0,0)a^3 + C_3(2,1,0)a^2b + C_3(2,0,1)a^2c + C_3(1,2,0)ab^2 + \\ &+ C_3(1,1,1)abc + C_3(1,0,2)ac^2 + C_3(0,3,0)b^3 + C_3(0,2,1)b^2c + \\ &+ C_3(0,1,2)bc^2 + C_3(0,0,3)c^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + \\ &+ 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3\end{aligned}$$

**Задание:** определить полиномиальные коэффициенты в данном разложении

## Пример 2

Найти разложение степени тринома  $(x_1 + x_2 + x_3)^4$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^4$$

$$= x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 4(x_1^3x_2 + x_1^3x_3 + x_1x_2^3 + x_2^3x_3 + x_1x_3^3 + x_2x_3^3) +$$

$$+ 6(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) + 12(x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_3^2x_2 + x_2^2x_3x_1 + x_3^2x_1x_2 + x_3x_1^2x_2)$$

Пример. Найти коэффициент при  $x^3 y^2$  из разложения степени  $(x + y + 3)^7$

Коэффициент при  $x^3 y^2 z^2$  из разложения

степени  $(x + y + z)^7$  равен  $\frac{7!}{3!2!2!} = 210$

Имеем член разложения  $210x^3 y^2 z^2$

При  $z = 3^2$  получаем  $1890x^3 y^2$

Пример. Найти коэффициент при  $x^{30}$  в разложении выражения  $(3 - x^2 + x^5)^{19}$  по полиномиальной формуле, полученный после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

Общий член разложения по полиномиальной формуле имеет вид:  $3^m \cdot (-x^2)^n \cdot (x^5)^k \cdot P(m, n, k)$

Для отыскания всех случаев, в которых возникает  $x^{30}$ , решаем в целых неотрицательных числах уравнение  $2n + 5k = 30$ .

Выразим  $k$ :  $k = 6 - \frac{2n}{5}$ . Видно, что  $k$  принимает целые значения, если  $n$  кратно 5. Выпишем все такие случаи:

$$n = 0 \Rightarrow k = 6; \quad n = 5 \Rightarrow k = 4;$$

$$n = 10 \Rightarrow k = 2; \quad n = 15 \Rightarrow k = 0.$$

Для каждой найденной пары значений  $n, k$  значение  $m$  находим из уравнения  $m + n + k = 19$ . Получим 4 набора  $(m; n; k)$ :

$$(13; 0; 6), (10; 5; 4), (7; 10; 2), (4; 15; 0).$$

Слагаемые, содержащие  $x^{30}$ , таковы:

$$3^{13} \cdot (-x^2)^0 \cdot (x^5)^6 \cdot P(13,0,6); \quad 3^{10} \cdot (-x^2)^5 \cdot (x^5)^4 \cdot P(10,5,4);$$

$$3^7 \cdot (-x^2)^{10} \cdot (x^5)^2 \cdot P(7,10,2); \quad 3^4 \cdot (-x^2)^{15} \cdot (x^5)^0 \cdot P(4,15,0).$$

В итоге, коэффициент при  $x^{30}$  имеет вид:

$$19! \cdot \left( \frac{3^{13}}{13!0!6!} - \frac{3^{10}}{10!5!4!} + \frac{3^7}{7!10!2!} - \frac{3^4}{4!15!0!} \right).$$

Ответ:  $19! \cdot \left( \frac{3^{13}}{13!0!6!} - \frac{3^{10}}{10!5!4!} + \frac{3^7}{7!10!2!} - \frac{3^4}{4!15!0!} \right).$

**Формула  
включений и  
исключений**

## Формула включений и исключений

Пусть даны  $N$  объектов (предметов), каждый из которых может обладать или не обладать одним или несколькими из свойств  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Через  $\bar{a}_i$  обозначим отсутствие свойства  $a_i$ ;

через  $N(a)$  – количество предметов, обладающих свойством  $a$  ( $a$  – любое из свойств  $a_i$  или  $\bar{a}_i$ );

через  $N(a, b, c, \dots, k)$  – количество предметов, обладающих попарно различными свойствами  $a, b, c, \dots, k$

## Формула включений и исключений

Если все свойства  $a_i$  попарно не совместимы (т.е.  $N(a_i a_k) = 0$  при  $i \neq k$ ), то формула имеет вид:

$$N(a'_1 \dots a'_n) = N - \sum_{1 \leq i \leq n} N(a_i)$$



## Формула включений и исключений

Тогда, очевидно,

$$N(a'_i) = N - N(a_i)$$

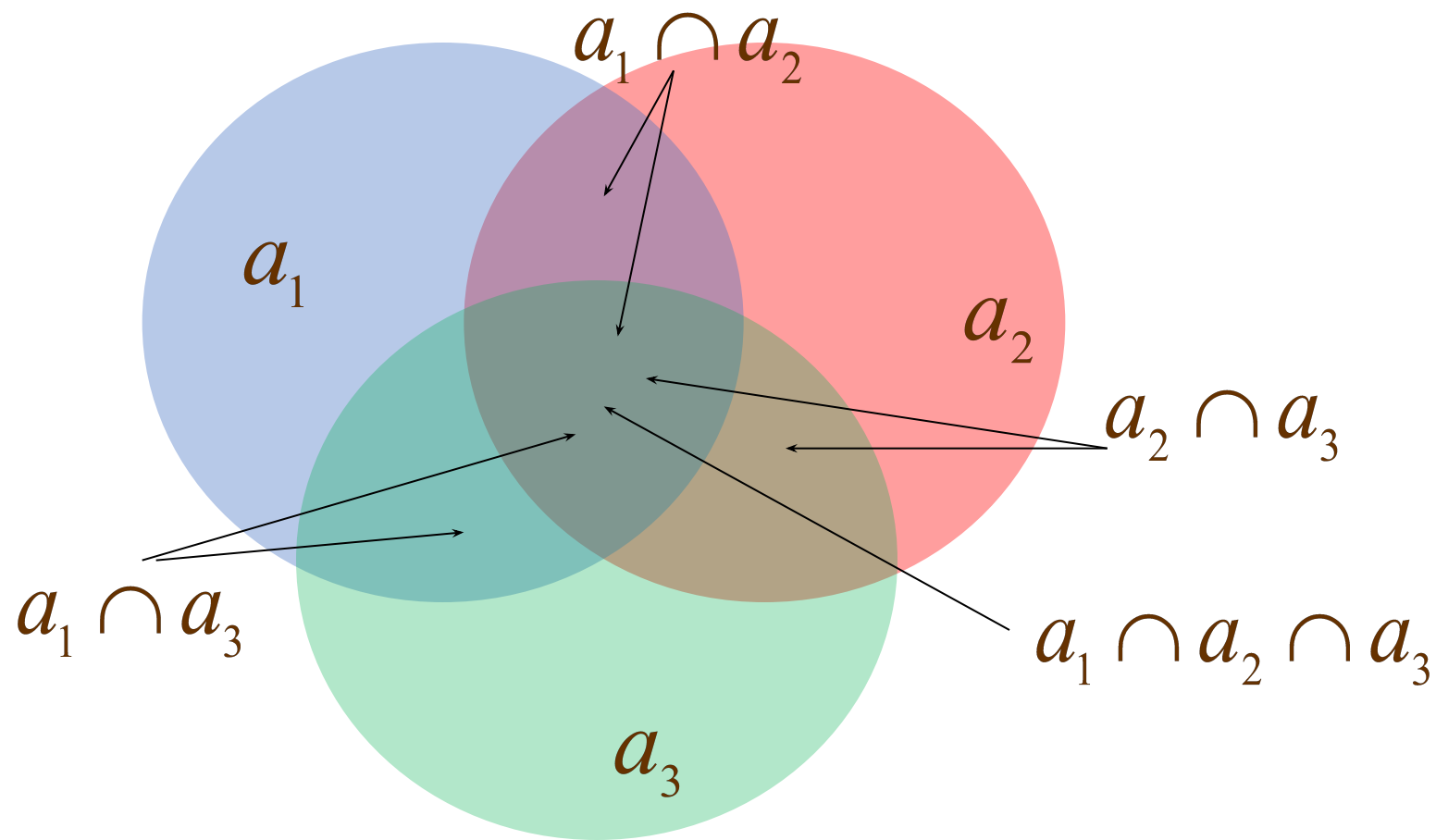
$$N(a'_1 a'_2) = N - N(a_1) - N(a_2) + N(a_1 a_2)$$

т.к. при вычитании  $N(a_1)$  и  $N(a_2)$  из общего числа предметов

число  $N(a_1 a_2)$  вычитается дважды.

## Формула включений и исключений

$$N(a'_1 a'_2 a'_3) = N - N(a_1) - N(a_2) - N(a_3) + N(a_1 a_2) + N(a_1 a_3) + N(a_2 a_3) - N(a_1 a_2 a_3)$$



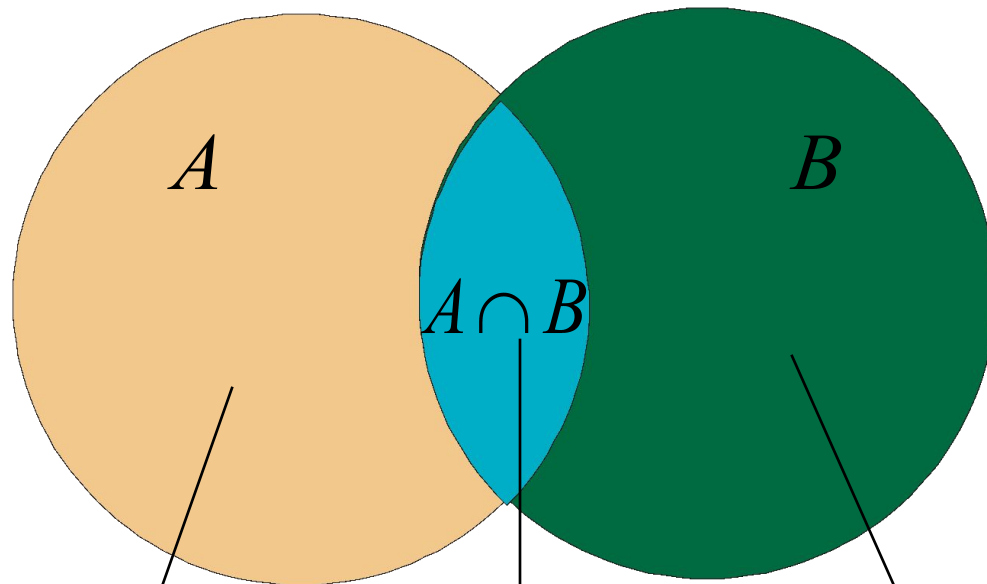
## Формула включений и исключений

При произвольном  $n$  справедлива формула включений и исключений:

$$N(a'_1 a'_2 \dots a'_n) = N - \sum_{1 \leq i \leq n} N(a_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(a_i a_j) + \dots + (-1)^n N(a_1 a_2 \dots a_n)$$

# Формула включений и исключений

Сколько положительных целых чисел, не превышающих 1000, делятся на 7 или на 11?



$$|A| = 142$$

делится на 7

$$|B| = 90$$

делится на 11

$$|A \cap B| = 12$$

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{7 \cdot 11} \right\rfloor \\ &= 142 + 90 - 12 \\ &= 220 \end{aligned}$$

**Пример.**

*Подсчитать количество различных перестановок цифр числа 123132, при которых никакие 2 одинаковые цифры не идут друг за другом.*

Общее количество различных перестановок цифр числа 123132 равно  $P(2,2,2) = \frac{6!}{2!2!2!} = \frac{720}{8} = 90$ .

Если две какие-то одинаковые цифры стоят рядом, мы можем считать эту двойную цифру единым символом. Тогда количество перестановок, содержащих этот символ, равно

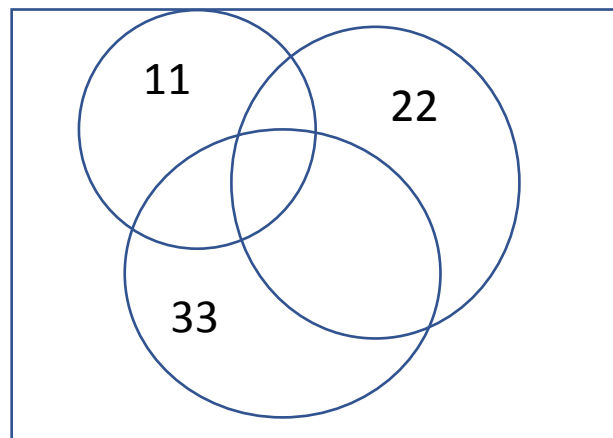
$$P(2,2,1) = \frac{5!}{2!2!1!} = \frac{120}{4} = 30.$$

Заметим, что количество таких случаев равно  $C_3^1 = 3$ .

Аналогично, количество перестановок, в которых присутствуют пара двойных символов, равно  $P(2,1,1) = \frac{4!}{2!1!1!} = \frac{24}{2} = 12$ , количество таких случаев равно  $C_3^2 = 3$ , а общее число перестановок, образованных парами одинаковых цифр, равно  $P(1,1,1) = 3! = 6$ .

В итоге, применяя формулу включений и исключений, будем иметь:  $90 - 3 \cdot 30 + 3 \cdot 12 - 6 = 30$ .

Ответ: 30 перестановок.



# Рекуррентные соотношения

## *Рекуррентные соотношения*

При решении многих комбинаторных задач используется метод сведения данной задачи к аналогичной задаче, касающейся меньшего числа предметов.

Такой метод называется **методом рекуррентных соотношений**. Пользуясь рекуррентным соотношением можно свести задачу об  $n$  предметах к задаче об  $(n-1)$  предметах, потом об  $(n-2)$  предметах и т.д. Последовательно уменьшая число предметов, доходим до задачи, которую уже легко решить. Во многих случаях удастся получить из рекуррентного отношения явную формулу для решения комбинаторной задачи.



# Примеры рекуррентных формул

$$P_n = P_{n-1} \cdot n \quad n! = (n-1)! \cdot n$$

$$A_n^k = n \cdot A_{n-1}^{k-1} \quad \bar{A}_n^k = n \cdot \bar{A}_n^{k-1}$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

# Линейные рекуррентные соотношения

Рекуррентное соотношение вида

$$a_n = b_1(n)a_{n-1} + b_2(n)a_{n-2} + b_3(n)a_{n-3} + \dots + b_p(n)a_p$$

называется **линейным рекуррентным соотношением порядка  $p$** , т.к.  $a_n$  выражается через  $p$  элементов  $a_i$  (вид  $a_1, p$ )

Соотношение линейно-рекуррентное, т.к. показатель каждой степени  $a_i$  равен 1.



# Рекуррентные соотношения

## Примеры

1)  $a_n = 3a_{n-1}^3 + 4a_{n-2}$  - нелинейное, т.к.  $a_{n-1}$  в 3-ей степени

2)  $a_n = 3n^3 a_{n-1} + n \cdot a_{n-2}$  - линейное

3)  $a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1} - 3a_{n+1} + 1$  - нелинейное рекуррентное соотношение порядка 2, т.к. зависит от  $a_n$  и  $a_{n+1}$

4)  $a_{n+3} = 6a_n \cdot a_{n+2} + a_{n+1}$  - нелинейное рекуррентное соотношение порядка 3, т.к. зависит от  $a_n$ ,  $a_{n+1}$  и  $a_{n+2}$

5)  $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$  - линейное рекуррентное соотношение порядка 2, т.к. зависит от  $a_n$  и  $a_{n+1}$

## Линейные рекуррентные соотношения

**Решением** рекуррентного соотношения является последовательность, при подстановке которой соотношение тождественно выполняется.

Решение рекуррентного соотношения  $p$ -го порядка называется **общим**, если оно зависит от  $p$  произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_p$  и путем подбора этих постоянных можно получить любое решение данного соотношения.

### Пример

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$$
$$a_n = 2^n; a_{n+1} = 2^{n+1}; a_{n+2} = 2^{n+2}$$
$$2^{n+2} = 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n = 3 \cdot 2^n \cdot 2^1 - 2 \cdot 2^n$$

$2^n$  - решение данного рекуррентного соотношения

## *Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами*

Линейное рекуррентное соотношение вида

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + b_3 a_{n-3} + \dots + b_p a_p, \quad b_p \neq 0$$

с постоянными коэффициентами  $b_i$  при  $1 \leq i \leq p$  называется **линейным однородным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами.**

# Числа Фибоначчи

# Последовательность (числа) Фибоначчи

Числовая последовательность, в которой каждое число равно сумме двух предыдущих, называется **последовательностью Фибоначчи (числами Фибоначчи)**.

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1).$$

Выражение чисел Фибоначчи через  $C_n^k$  имеет вид:

$$F(n) = C_{n+1}^0 + C_n^1 + C_{n-1}^2 + \dots +$$

$$C_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$$

где  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  если  $n$  нечетно ( $p$  - целая часть числа  $\frac{n+1}{2}$ )

$$p = \frac{n}{2}$$

, если  $n$  четно

## Числа Фибоначчи. Пример

Пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата через 2 месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна пара кроликов?

### Решение:

Через месяц будет 2 пары кроликов.

Через 2 месяца приплод даст только первая пара кроликов и получится 3 пары.

Через 3 месяца приплод дадут и исходная пара, и пара, появившаяся 2 месяца тому назад. Всего будет 5 пар кроликов.





# Числа Фибоначчи. Пример

$F_n$  – количество пар кроликов через  $n$  месяцев.

Через  $n+1$  месяцев будет  $F_n$  пар и еще столько новорожденных пар кроликов, сколько было в конце месяца  $n-1$ , т.е.  $F_{n-1}$ .



$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

По условию:  $F_0 = 1, F_1 = 2 \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_2 = 1 + 2 = 3 \\ F_3 = 2 + 3 = 5 \\ F_4 = 3 + 5 = 8 \text{ и т.д.} \end{array} \right.$$

где  $F_n$  – числа Фибоначчи



Отношения вида  $a_{n+2} = b_1 a_{n+1} + b_2 a_n$

Решение данных отношений основано на следующих утверждениях:

1)  $a_1(n)$  и  $a_2(n)$  – решения данного рекуррентного отношения, тогда для любых чисел  $A$  и  $B$  последовательность  $a_n = A \cdot a_1(n) + B \cdot a_2(n)$  также решение этого отношения.

2) Если число  $r_1$  – корень квадратного уравнения  $r^2 = b_1 r + b_2$ , то последовательность  $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, \dots$  есть решение рекуррентного отношения  $a_{n+2} = b_1 a_{n+1} + b_2 a_n$

## Решение отношений вида $a_{n+2} = b_1 a_{n+1} + b_2 a_n$

1) Составляем квадратное уравнение  $r^2 = b_1 r + b_2$ , которое является характеристическим для данного отношения.

2) Если квадратное уравнение имеет 2 различных корня  $r_1$  и  $r_2$ , то общее решение отношения  $a_{n+2} = b_1 a_{n+1} + b_2 a_n$  имеет вид:

$$a_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$$

# Общее решение для рекуррентного отношения для чисел Фибоначчи

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Характеристическое уравнение:

$$r^2 = r + 1$$

Корни уравнения:

числа  $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  и  $r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

Общее решение:

$$F_n = C_1 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

## Числа Фибоначчи для начальных условий $F_0=0, F_1=1$

•

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \frac{1}{2}(C_1 + C_2) + \frac{\sqrt{5}}{2}(C_1 - C_2) = 1 \end{cases}$$

$$C_2 = -C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} C_1 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} C_2 \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

## ТЕСТ-ВОПРОСЫ

1. Свойство симметрии биномиальных коэффициентов определяется как:

$$\text{а) } \binom{n}{k} = C_n^k \quad \text{в) } C_{n-k}^k = C_n^{n-k} \quad C_n^k = C_n^{n-k}$$

2. Биномиальные коэффициенты определяются формулой:

$$\text{а) } A_n^k = k! C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1) \quad P_n = n!$$

$$\text{в) } C_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

3. Полиномиальные коэффициенты определяются формулой:

$$\text{а) } C_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} \quad C_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{m!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$$

$$\text{в) } C_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$