ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА. НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

$$\sqrt{f(x)} < g(x) <=> \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases}$$

Иррациональные неравенства

Сегодня на занятии мы рассмотрим способы решений двух видов неравенств, которые могут пригодиться при подготовке к единому государственному экзамену, если вы хотите решать задачи из второй части экзамена.

Рассмотрим неравенство вида

$$\sqrt{f(x)} < g(x)$$

Такие неравенства называются **иррациональными**. В нашем выражении присутствует корень квадратный, который накладывает свои ограничения на область допустимых значений.

Первое, что мы должны заметить, корень квадратный извлекается только из положительных чисел, так что **f(x)≥0**.

Второе, вспомните график функции корня квадратного, значения которые он принимает не меньше нуля, тогда для выполнения условий неравенства требуется условие **g(x)>0**, равенство нулю не возможно, так как наше исходное неравенство строгое и равенство значений не возможно.

Третье, обе части неравенства не отрицательные, тогда используя теорему 5 занятия о равносильности неравенств, мы можем **обе части нашего неравенства возвести квадрат**, то есть получить неравенство:

$$f(x) < (g(x))^2 - \text{равносильное исходному.}$$

Иррациональные неравенства

И так при решении иррациональных неравенств можно переходить к следующей системе неравенств:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) <=> \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases}$$

Иррациональные неравенства

Теперь давайте рассмотрим неравенство вида

$$\sqrt{f(x)} > g(x)$$

f(x)≥0 – это безусловное условие которое должно накладываться как и в предыдущем примере.

а) Заметим если g(x)<0 и f(x)≥0 то неравенство выполняется, так как, повторимся, извлечение корня квадратного дает положительное число, которое всегда больше отрицательного. Если выполняется такое условие, то мы решили исходное неравенство.

б) Если g(x)≥0 то обе части неравенства не отрицательные, тогда используя теорему 5 занятия о равносильности неравенств, мы можем обе части нашего неравенства возвести квадрат, то есть получить неравенство: $f(x) > (g(x))^2$ – равносильное исходному.

В этом случае мы можем опустить проверку условия f(x)≥0, так как если g(x)≥0, то для f(x)≥0 подавно выполняется неравенство, вспомните неравенства следствия.

Иррациональные неравенства.

И так, неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно следующей совокупности систем:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Иррациональные неравенства.

Пример. Решить неравенства:

а) $\sqrt{x^2+x-30} < x$ **б)** $\sqrt{x^2+x-30} > x$

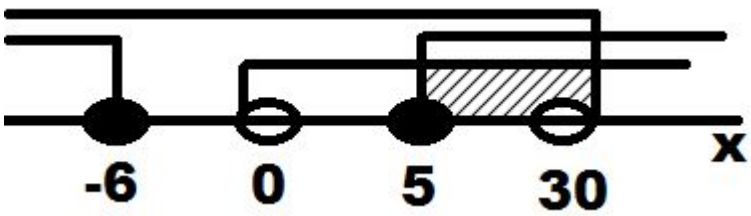
Решение. а) Применим знания полученные выше

$$\sqrt{x^2+x-30} < x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-30 \geq 0 \\ x > 0 \\ x^2+x-30 < x^2 \end{cases}$$

Решим систему

$$\begin{cases} (x-5)(x+6) \geq 0 \\ x > 0 \\ x < 30 \end{cases}$$

Воспользуемся методом интервалов



Решения всех трех неравенств системы пересекаются на отрезке [5;30) – который и есть решение исходного неравенства.

Иррациональные неравенства.

б) Нам нужно решить совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > 0 \\ x^2 + x - 30 > x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + x - 30 \geq 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > 0 \\ x > 30 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ (x-5)(x+6) \geq 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

Решения каждой системы очевидны, даже не применяя метод интервалов

$$\left[\begin{array}{l} x > 30 \\ x \leq 6 \end{array}\right.$$

Ответ: а) x є[5;30) **б)** x є(-∞;6] U (30;+∞).

Неравенства с модулями.

Неравенства, которые содержат переменную под знаком модуля, могут решаться разными методами. Мы рассмотрим три способа решения, советую применять третий способ, он может занимать немного больше времени, но зато гораздо больше шансов на правильное решение неравенства.

Пример. Решить неравенство:

$$|3x - 6| > 6$$

Решение.

Первый способ.

$$|3(x - 2)| > 6;\ |(x - 2)| > 2$$

Как мы помним, геометрически смысл модуля есть ни что иное как расстояние между точка x и 2, согласно нашему неравенству оно должно превышать 2. Тогда решением будет (-∞;0)U(4;+∞)

Ответ: xϵ(-∞;0)U(4;+∞).

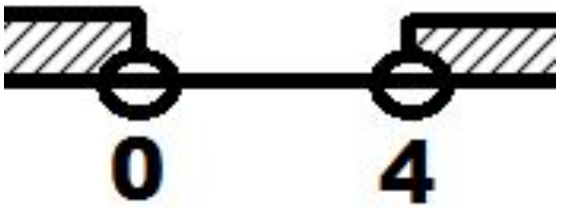
Неравенства с модулями.

Второй способ. Обе части нашего неравенства неотрицательны, тогда воспользовавшись теоремой 5 равносильности неравенств, мы можем возвести в квадрат обе части неравенства

$$(|3x-6|)^2 > 36$$

$$9x^2 - 36x + 36 > 36$$

$$9x(x-4) > 0$$



Ответ: x∈(-∞;0)U(4;+∞).

Неравенства с модулями.

Третий способ. В зависимости от знака выражения 3x-6, мы можем раскрыть модуль двумя разными способами – с разными знаками. Тогда исходное неравенство сводится к совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-6\geq 0\\3x-6\geq 6\end{cases}\\\begin{cases}3x-6\leq 0\\6-3x\geq 6\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 2\\x\geq 4\end{cases}\\\begin{cases}x\leq 2\\x\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x\geq 4\\x\leq 0\end{array}\right.$$

Ответ: x∈(-∞;0)U(4;+∞).

Каждым способом получили одинаковый ответ, значит решение правильное, каким способом пользоваться решать вам самим, но все-таки более рекомендовано использовать третий. Давайте рассмотрим еще один пример решения неравенств третьим способом.

Неравенства с модулями.

Пример. Решить неравенство:

$$|x^2 + x - 12| > -x^2 - 4x$$

Решение. Модуль может раскрываться двумя способами:

1. Если $x^2 + x - 12 \geq 0$, то $|x^2 + x - 12| = x^2 + x - 12$

2. Если $x^2 + x - 12 \leq 0$, то $|x^2 + x - 12| = -(x^2 + x - 12)$

Нам осталось решить совокупность двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + x - 12 \geq 0 \\ x^2 + x - 12 > -x^2 - 4x \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + x - 12 \leq 0 \\ -(x^2 + x - 12) > -x^2 - 4x \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+4)(x-3) \geq 0 \\ 2x^2 + 5x - 12 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+4)(x-3) \leq 0 \\ -x^2 - x + 12 + x^2 + 4x > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

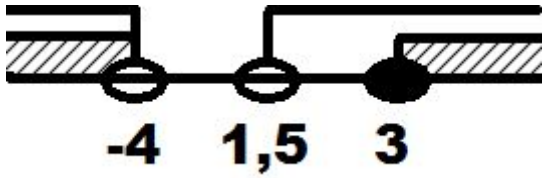
Неравенства с модулями.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+4)(x-3)\geq 0\\(2x-3)(x+4)>0\end{cases}\\\begin{cases}(x+4)(x-3)\leq 0\\3x>-12\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+4)(x-3)\geq 0\\(2x-3)(x+4)>0\end{cases}\\\begin{cases}(x+4)(x-3)\leq 0\\x>-4\end{cases}\end{array}\right.$$

Для каждой системы построим интервалы решения.

$$\begin{cases}(x+4)(x-3)\geq 0\\(2x-3)(x+4)>0\end{cases}$$



$$\begin{cases}(x+4)(x-3)\leq 0\\x>-4\end{cases}$$

xϵ(-∞;-4)U[3;+∞) xϵ(-4;3]

Осталось объединить два промежутка и записать ответ.

Ответ: xϵ(-∞;-4)U(-4; +∞].

Иррациональные неравенства. Неравенства с модулями.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Решить неравенства:

а) $\sqrt{x^2-3x-28}<x$ **б)** $\sqrt{x^2-3x-28}>x$

2. Решить неравенства тремя способами:

$$|5x+9|<24$$

3. Решить неравенство:

$$|x^2+3x-10|>2x-x^2$$

Спасибо за внимание!