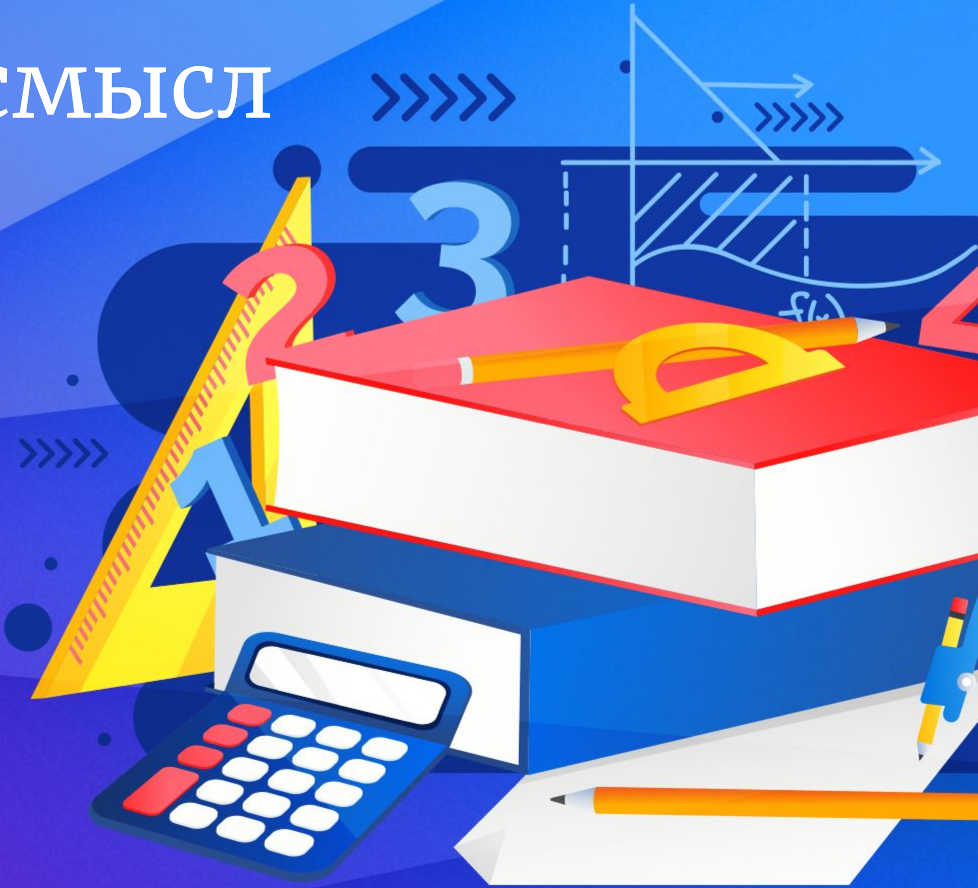
Геометрический смысл производной



Производная
и её геометрический смысл

Сегодня на уроке

1. Выясним геометрический смысл производной функции.

2. Выведем уравнение касательной к графику дифференцируемой функции.

3. Познакомимся со способом построения касательной к параболе.

Чему равна производная функции $f(x) = 5^x - \cos x$?

А $f'(x) = 5\ln x + \cos x$

В $f'(x) = 5^x \ln 5 + \sin x$

Б $f'(x) = \ln 5 + \sin x$

Г $f'(x) = 5^x \ln 5 - \sin x$

Чему равна производная функции $f(x) = 5^x - \cos x$?

А $f'(x) = 5\ln x + \cos x$

В $f'(x) = 5^x \ln 5 + \sin x$

Б $f'(x) = \ln 5 + \sin x$

Г $f'(x) = 5^x \ln 5 - \sin x$

Чему равна производная функции $f(x) = x^3 \cos x$?

А $f'(x) = 3x^2 \cos x + x^3 \sin x$

В $f'(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x$

Б $f'(x) = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$

Г $f'(x) = -3x^2 \cos x$

Чему равна производная функции $f(x) = x^3 \cos x$?

А $f'(x) = 3x^2 \cos x + x^3 \sin x$

В $f'(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x$

Б $f'(x) = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$

Г $f'(x) = -3x^2 \cos x$

Чему равно значение $f'(x_0)$, если $f(x) = e^x \ln x$, $x_0 = 1$?

А e

В 0

Б 1

Г -1

Чему равно значение $f'(x_0)$, если $f(x) = e^x \ln x$, $x_0 = 1$?

А e

В 0

Б 1

Г -1

Вспомним

Функция вида $y = kx + b$, где k и b – любые действительные числа, называется линейной.

Графиком этой функции является прямая.

Число $k = \operatorname{tg} \alpha$ называют угловым коэффициентом прямой,

угол α – угол, который эта прямая образует с осью Ox.

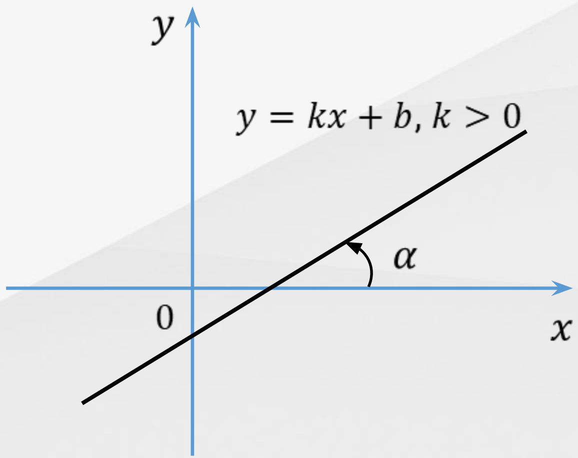
Вспомним

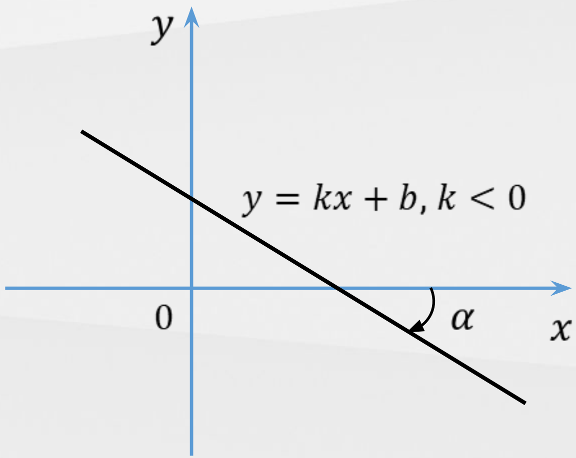
Если $k > 0$, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Функция возрастает.

Если $k < 0$, то $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

Функция убывает.



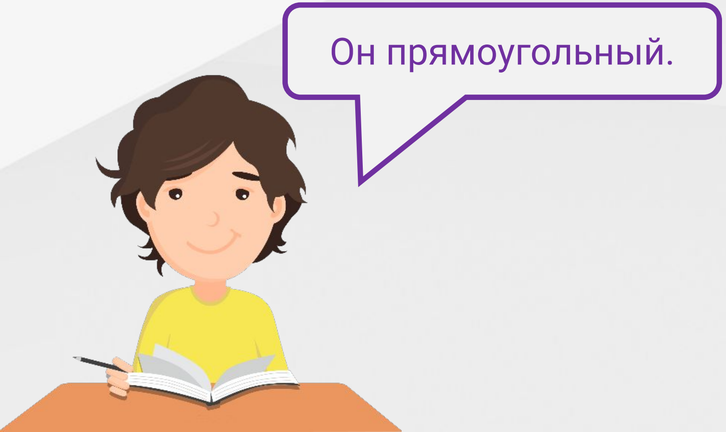


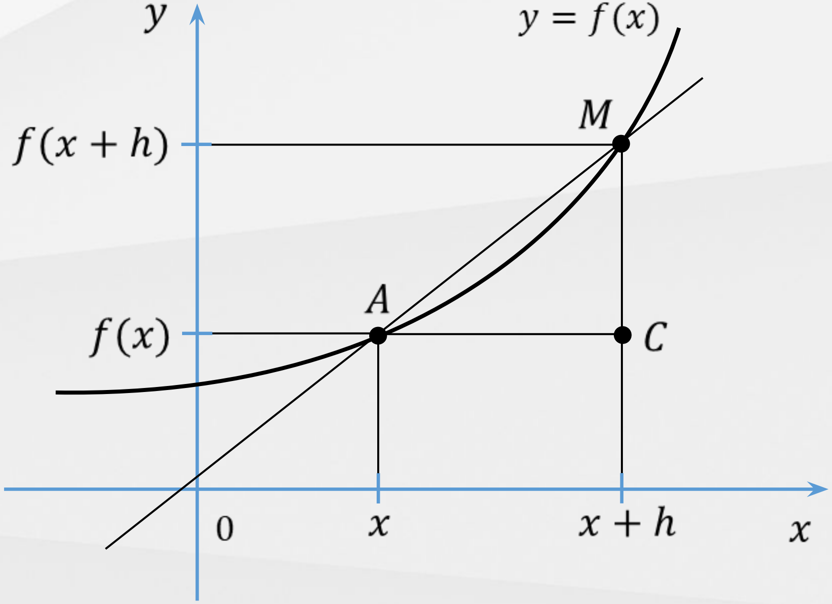
Геометрический смысл производной

$A\ (x; f(x)),\ M\ (x+h; f(x+h)).$

ΔACM – прямоугольный.

$C\ (x+h; f(x))$





Геометрический смысл производной

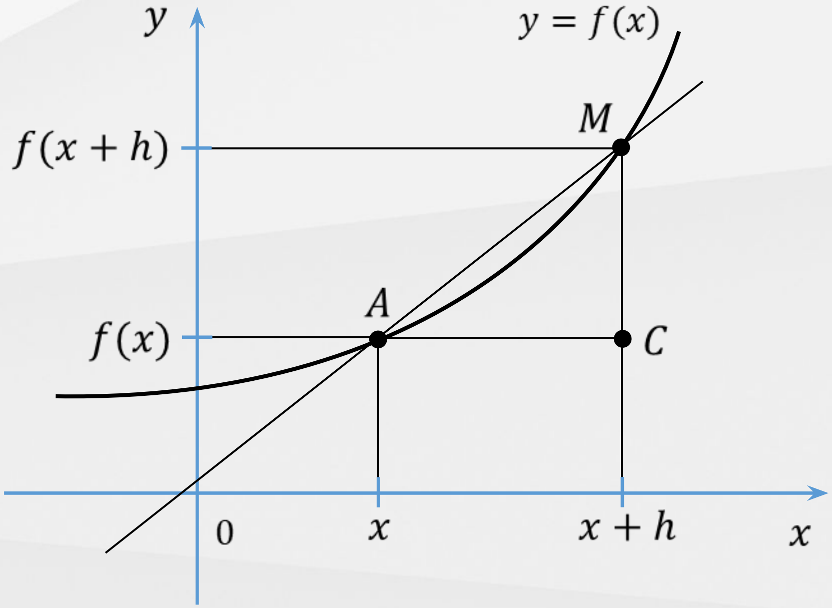
$A\ (x; f(x)),\ M\ (x+h; f(x+h)).$

ΔACM – прямоугольный.

$C\ (x+h; f(x))$

Найдём угловой коэффициент k прямой AM.

Коэффициент k зависит от h, т. е. его можно рассматривать как функцию $k(h)$.



Геометрический смысл производной

$A\,(x; f(x)),\ M\,(x+h; f(x+h)).$

ΔACM – прямоугольный.

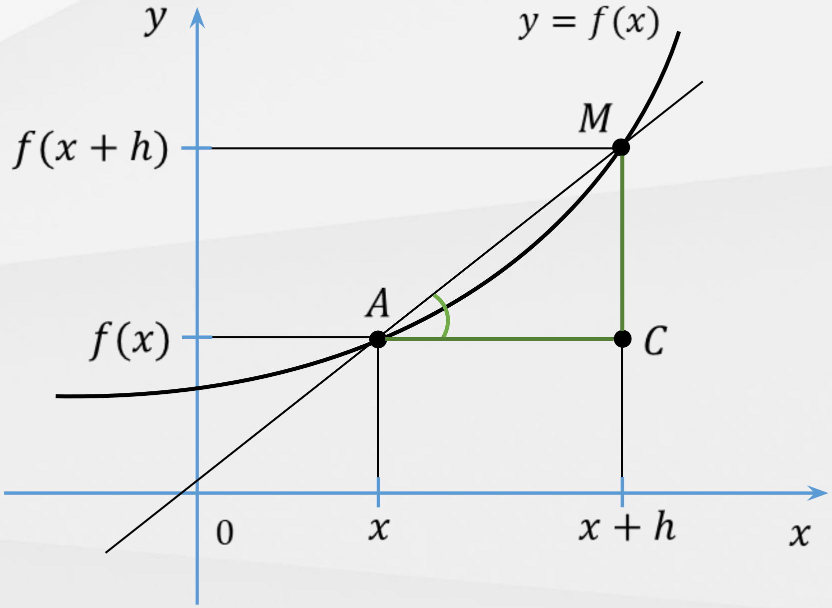
$C\,(x+h; f(x))$

$$k(h) = \operatorname{tg}\angle CAM = \frac{MC}{AC},$$

$$MC = f(x+h) - f(x),$$

$$AC = (x+h) - x = h.$$

Тогда $k(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}.$



Геометрический смысл производной

$A\ (x; f(x)),\ M\ (x+h; f(x+h)).$

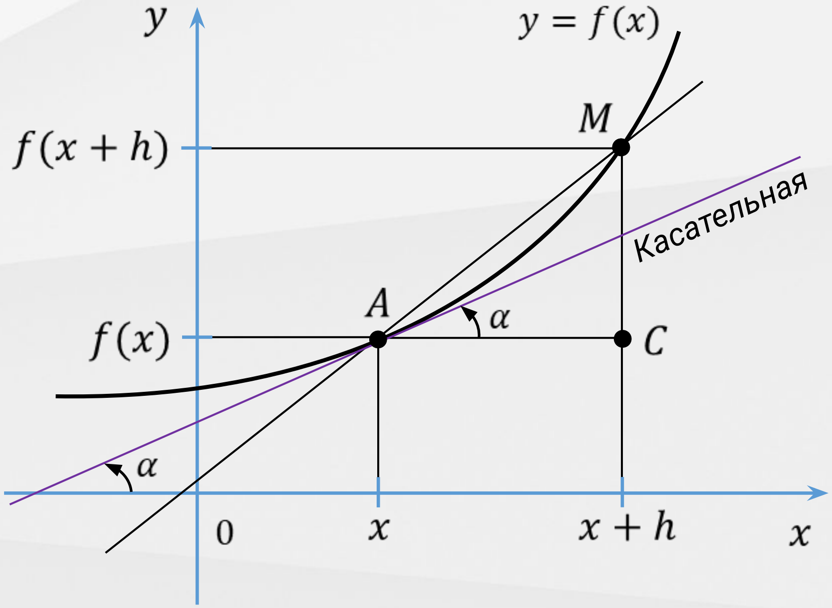
ΔACM – прямоугольный.

$C\ (x+h; f(x))$

$$k(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Пусть число x фиксировано, $h \to 0$.
Прямая AM будет стремиться занять положение прямой, которую называют касательной к графику функции $y = f(x)$,

т. к. $\lim\limits_{h\to 0} k(h) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$



$$\boxed{f'(x) = \operatorname{tg}\alpha}$$

Геометрический смысл производной

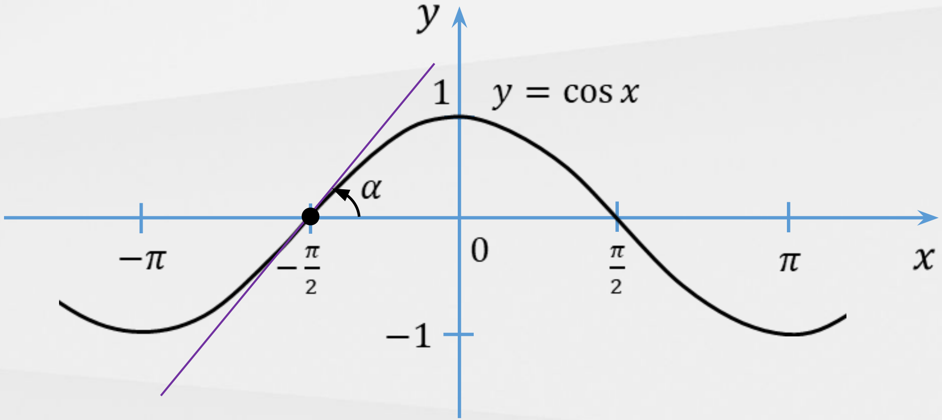
Значение производной функции $f(x)$ в точке x равно угловому коэффициенту касательной к графику в точке $(x; f(x))$.

Геометрический смысл производной

Найдём угол между касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ и осью Ox.

Найдём значение производной данной функции при $x = -\frac{\pi}{2}$.

Для этого найдём угловой коэффициент касательной к графику этой функции в точке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.



Геометрический смысл производной

Найдём угол между касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ и осью Ox.

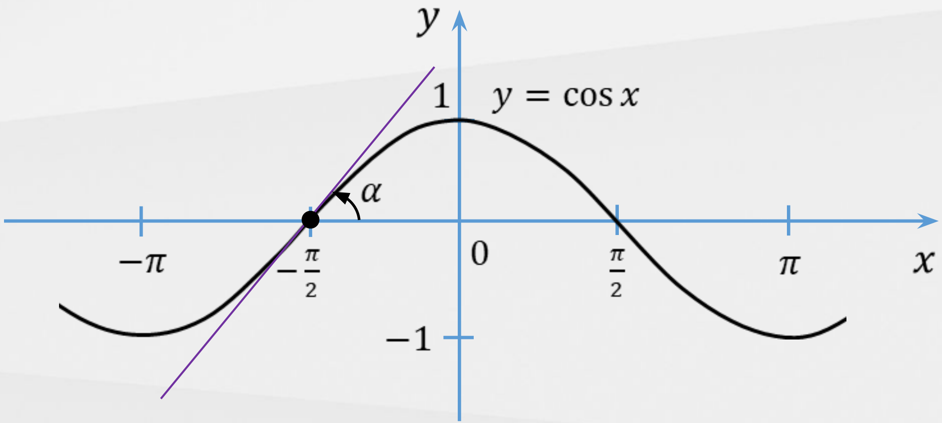
Найдём значение производной данной функции при $x = -\frac{\pi}{2}$.

$f(x) = \cos x,$

$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x.$

$\operatorname{tg} \alpha = f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$

$\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$



$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$

Геометрический смысл производной

Найдём угол между касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ и осью Ox.

Найдём значение производной данной функции при $x = -\frac{\pi}{2}$.

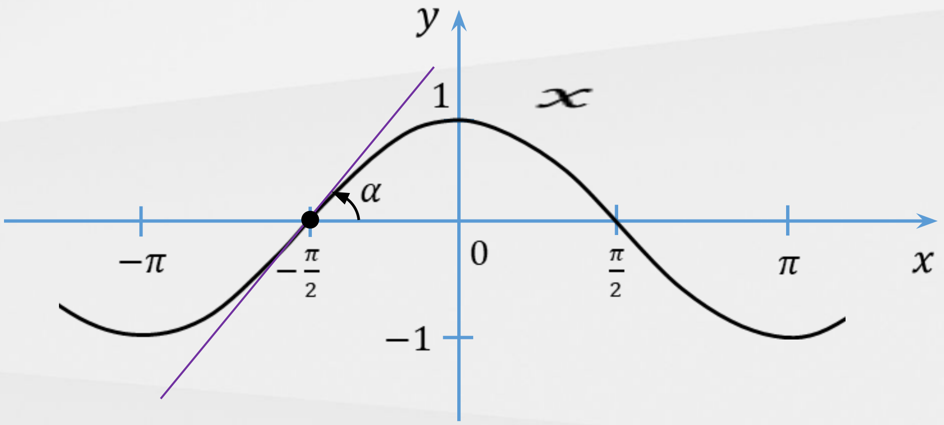
$f(x) = \cos x,$

$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x.$

$\operatorname{tg}\alpha = f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$

$\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$

Угол между касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ и осью абсцисс равен $\frac{\pi}{4}$.



Геометрический смысл производной

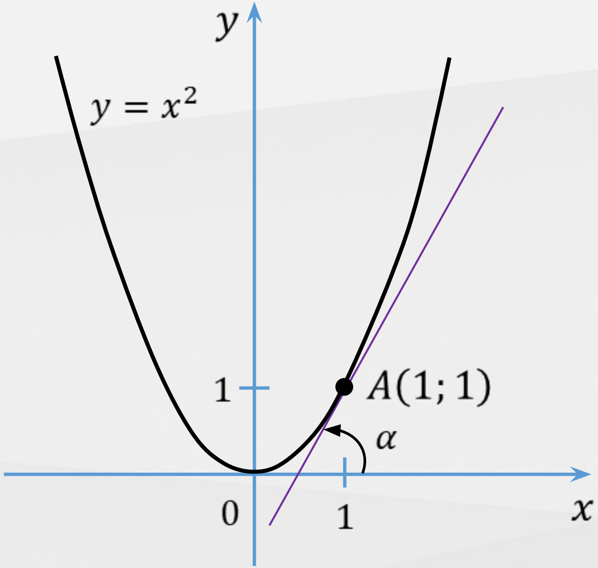
Найдём угол между касательной к параболе $y = x^2$ в точке $(1; 1)$ и напишем уравнение этой касательной.

$f(x) = x^2,$

$f'(x) = (x^2)' = 2x.$

$\operatorname{tg}\alpha = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2,$

$\alpha = \operatorname{arctg} 2.$



$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$$

Геометрический смысл производной

Найдём угол между касательной к параболе $y = x^2$ в точке $(1; 1)$ и напишем уравнение этой касательной.

$f(x) = x^2$,

$f'(x) = (x^2)' = 2x$.

$\operatorname{tg}\alpha = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$,

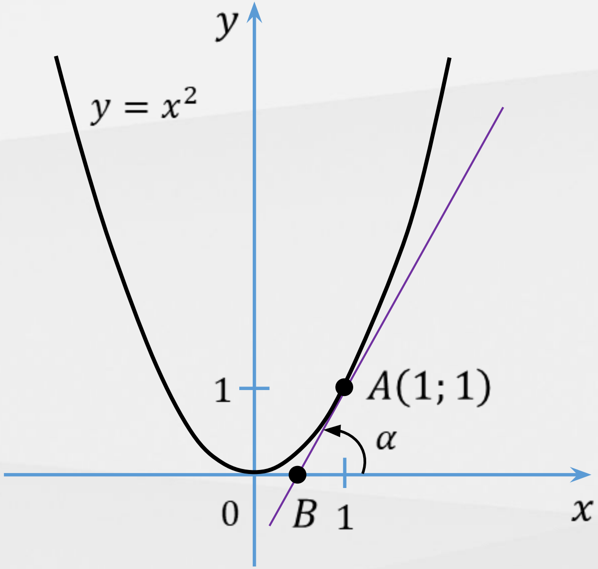
$\alpha = \operatorname{arctg} 2$.

Если $y = kx + b$ – уравнение прямой AB, то $k = \operatorname{tg}\alpha = 2$.

Тогда $y = 2x + b$.

$1 = 2 \cdot 1 + b$, $b = 1 - 2$, $b = -1$.

Следовательно, $y = 2x - 1$ – уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке $A\ (1; 1)$.



Уравнение касательной

Выведем уравнение касательной к графику дифференцируемой функции $f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$.

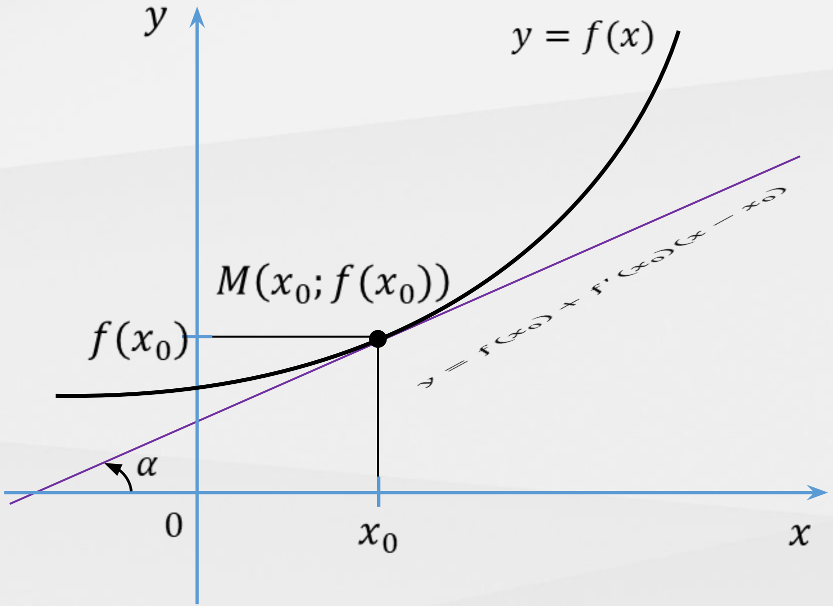
Пусть $y = kx + b$ – искомое уравнение касательной.

$k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, т. е. $y = f'(x_0)x + b$.

$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$, $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$,

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$



$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$

Уравнение касательной

Давайте найдём уравнение касательной к графику функции $y = 3\sin x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

$$f(x) = 3\sin x,$$

$$f(x_0) = 3\sin\frac{\pi}{3} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$f'(x) = (3\sin x)' = 3\cos x,$$

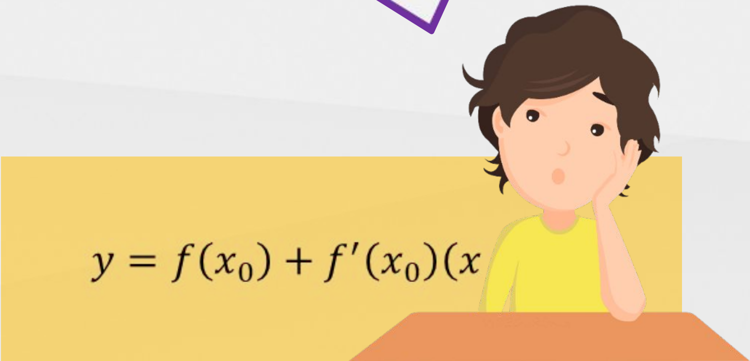
$$f'(x_0) = 3\cos\frac{\pi}{3} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{2},$$

$$y = \frac{3}{2}x + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{2}\right).$$

А чему равен угол между этой касательной и осью Ox?



Уравнение касательной

Давайте найдём уравнение касательной к графику функции $y = 3\sin x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

$f(x) = 3\sin x,$

$f(x_0) = 3\sin\frac{\pi}{3} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

$f'(x) = (3\sin x)' = 3\cos x,$

$f'(x_0) = 3\cos\frac{\pi}{3} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$

$y = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$

$y = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{2},$

$y = \frac{3}{2}x + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{2}\right).$

$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}.$

$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$

Уравнение касательной

Покажем, что касательная к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой x_0 пересекает ось Ox в точке $\frac{x_0}{2}$.

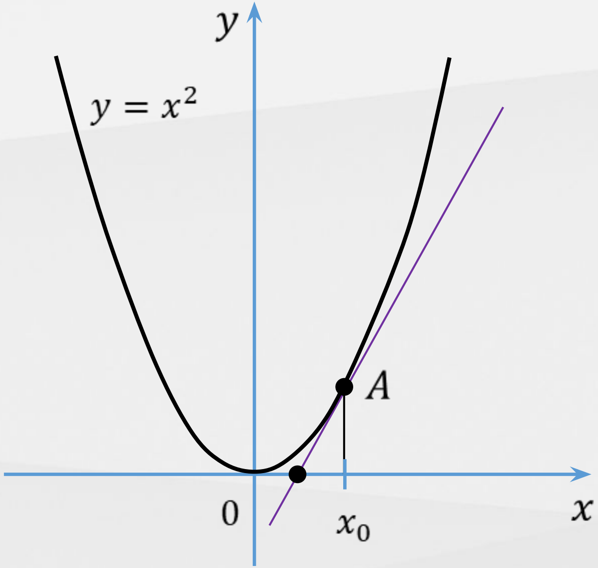
Пусть $f(x) = x^2$, тогда $f(x_0) = {x_0}^2$.

$f'(x) = (x^2)' = 2x$, $f'(x_0) = 2x_0$.

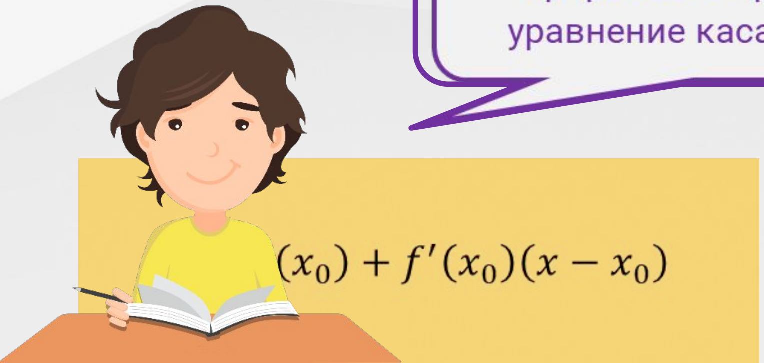
$y = {x_0}^2 + 2x_0(x - x_0)$,

$y = {x_0}^2 + 2x_0x - 2{x_0}^2$,

$y = 2x_0x - {x_0}^2$.



Для этого нам надо приравнять правую часть уравнение касательной к 0.



Уравнение касательной

Покажем, что касательная к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой x_0 пересекает ось Ox в точке $\frac{x_0}{2}$.

Пусть $f(x) = x^2$, тогда $f(x_0) = {x_0}^2$.

$f'(x) = (x^2)' = 2x$, $f'(x_0) = 2x_0$.

$y = {x_0}^2 + 2x_0(x - x_0)$,

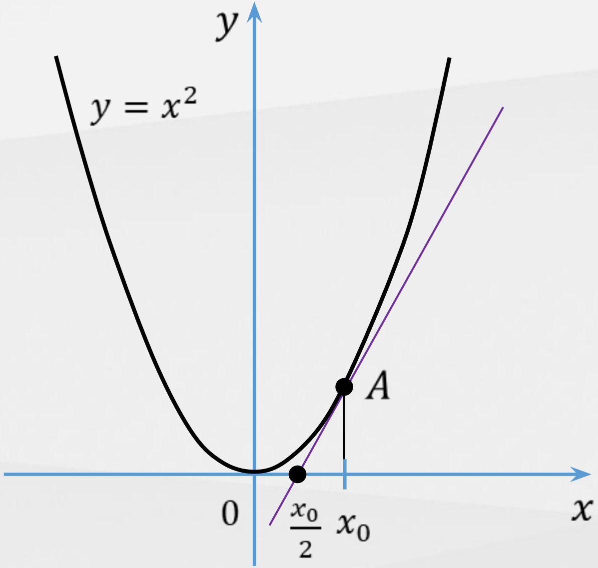
$y = {x_0}^2 + 2x_0x - 2{x_0}^2$,

$y = 2x_0x - {x_0}^2$.

$2x_0x - {x_0}^2 = 0$,

$2x_0x = {x_0}^2$,

$x = \frac{x_0}{2}$.



Геометрический способ построения касательной к параболе $y = x^2$ в точке A с абсциссой x_0:

прямая, проходящая через точку A и точку $\frac{x_0}{2}$ оси абсцисс, касается параболы в точке A.

Задание № 1

Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:
а) $f(x) = 2\cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$; б) $f(x) = x^2 + 2x,\ x_0 = 1$.

Решение:

а) $f(x) = 2\cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$;

$f'(x) = (2\cos x)' = -2\sin x,$

$k = f'(x_0) = -2\sin\frac{\pi}{2} = -2.$

б) $f(x) = x^2 + 2x,\ x_0 = 1$;

$f'(x) = (x^2 + 2x)' = 2x + 2,$

$k = f'(x_0) = 2 \cdot 1 + 2 = 4.$

Ответ: а) -2; б) 4.

$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$

Задание № 2

Найдите угол между касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью Ox:
а) $f(x) = \ln x, x_0 = 1$; б) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x, x_0 = 2$.

Решение:

а) $f(x) = \ln x, x_0 = 1;$

$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x},$

$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = \frac{1}{1} = 1,$

$\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$

б) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x, x_0 = 2;$

$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)' = x^2 - 1,$

$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = 2^2 - 1 = 3,$

$\alpha = \operatorname{arctg} 3.$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{arctg} 3$.

$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$

Задание № 3

Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = x^3 - 1$, $x_0 = -1$; б) $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$, $x_0 = 0$.

Решение:

а) $f(x) = x^3 - 1$, $x_0 = -1$;

$f(x_0) = (-1)^3 - 1 = -2,$

$f'(x) = (x^3 - 1)' = 3x^2,$

$f'(x_0) = 3(-1)^2 = 3,$

$y = -2 + 3(x + 1),$

$y = -2 + 3x + 3,$

$y = 3x + 1.$

б) $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$, $x_0 = 0$;

$f(x_0) = 0 + \frac{1}{0+1} = 1,$

$f'(x) = \left(x + \frac{1}{x+1}\right)' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2},$

$f'(x_0) = 1 - \frac{1}{(0+1)^2} = 0,$

$y = 1 + 0(x - 0),$

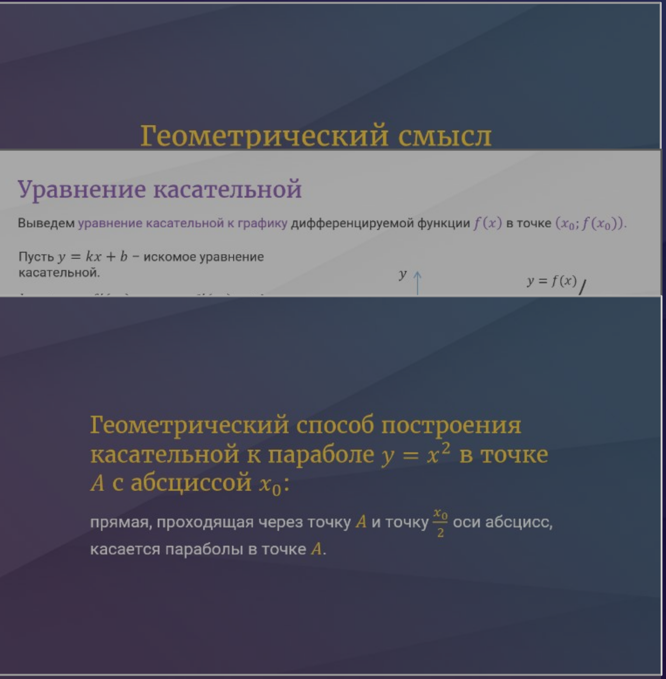
$y = 1.$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

Ответ: а) $y = 3x + 1$, б) $y = 1$.

Итоги урока



Геометрический способ построения касательной к параболе $y = x^2$ в точке A с абсциссой x_0:

прямая, проходящая через точку A и точку $\frac{x_0}{2}$ оси абсцисс, касается параболы в точке A.