

The background features a dark blue gradient with a starry pattern. On the left side, there is a large circular scale with numerical markings from 140 to 260 in increments of 10. Several circular diagrams with arrows are scattered across the page, some representing mathematical concepts like limits or function behavior.

# ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ РАЦИОНАЛЬНЫХ И ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

Число  $A$  называется **пределом функции**  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

При этом  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon,$$

т.е. функция принимает сколь угодно большие по абсолютной величине значения, при стремлении значений аргумента к  $x_0$ .

Функция имеет конечный предел при неограниченном возрастании аргумента, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ или } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Запись  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , означает, что функция принимает сколь угодно большие по абсолютной величине значения при неограниченном возрастании абсолютного значения аргумента, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall |x| > \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon.$$

# КАК НАЙТИ ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ?

Из определений следует, что для вычисления предела функции в точке или на бесконечности нужно сначала попытаться найти значение функции в предельном значении аргумента, на практике это обозначим так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = [f(x_0)].$$

Например,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4}{x-2} = \left[ \frac{1+4}{1-2} \right] = -5$  (здесь все просто).

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+4}{x-2} = \left[ \frac{4+4}{2-2} \right] = \left[ \frac{8}{0} \right] = \infty$  (придется научиться делить на ноль)

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \left[ \frac{4-4}{2-2} \right] = \left[ \frac{0}{0} \right]$ , а это неопределенность, от которой необходимо избавиться для нахождения предела:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4 \text{ (тоже все просто, как в седьмом классе)}$$

# ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для успешной работы необходимо повторить

Разложение на множители квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где  $x_1, x_2$  – корни квадратного трехчлена.

Формулы сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

# ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

**Пример 1.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$ .

**Решение.** Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности  $\left[\frac{0}{0}\right]$ . Для её раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим на общий множитель  $(x + 1) \neq 0$  ( $x \rightarrow -1$ , но  $x \neq -1$ )

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x} = \frac{-1-2}{-1} = 3.$$

**Пример 2.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 8}$ .

**Решение.** Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности  $\left[\frac{0}{0}\right]$ . Для её раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители. Для разложения на множители знаменателя используем формулу  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ . Затем сократим на общий множитель  $(x - 2) \neq 0$  ( $x \rightarrow 2$ , но  $x \neq 2$ )

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)}{(x^2 + 2x + 4)} = \frac{2+3}{4+4+4} = \frac{5}{12}$$

# ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

**Пример 3.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$ .

**Р е ш е н и е.** Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности  $\left[\frac{0}{0}\right]$ . Для её раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители. Для разложения на множители числителя используем формулу  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ . Затем сократим на общий множитель  $(x - 1) \neq 0$  ( $x \rightarrow 1$ , но  $x \neq 1$ )

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1+1}{2\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}.$$

# ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

**Пример 4.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$ .

**Решение.** Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности  $\left[\frac{0}{0}\right]$ .

При наличии иррациональных выражений рекомендуется перевести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и после этого выполнить упрощение.

В предложенной задаче переведем иррациональность из знаменателя в числитель. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на выражение  $\sqrt{x^2+5}+3$  (сопряженное знаменателю). После этого для преобразования знаменателя используем формулу  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{x^2+5-9} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x+2)} = \frac{\sqrt{2^2+5}+3}{2+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

# ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

**Пример 5.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}$ .

**Р е ш е н и е.** Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности  $\left[\frac{0}{0}\right]$ . При наличии иррациональных выражений рекомендуется перевести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и после этого выполнить упрощение.

В предложенной задаче переведем иррациональность из числителя в знаменатель. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на выражение  $\sqrt{1+2x}+3$  (сопряженное числителю). После этого для преобразования знаменателя используем формулу  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1+2x-9}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{2}{\sqrt{1+8}+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



# ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

**Пример 6.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}$ .

**Решение.** Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности  $\left[\frac{0}{0}\right]$ . При наличии иррациональных выражений рекомендуется перевести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и после этого выполнить упрощение.

В предложенной задаче переведем иррациональность из числителя в знаменатель. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на выражение  $\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2+1} + 1$  (неполный квадрат суммы). Для последующего преобразования числителя используем формулу  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x^2+1}-1)\left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2+1} + 1\right)}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2+1} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^3 - 1}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2+1} + 1\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1-1}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2+1} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2+1} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2+1} + 1} = \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{0^2+1}\right)^2 + \sqrt[3]{0^2+1} + 1} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

# ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Одним из мощных способов вычисления пределов является **правило** (раскрытия неопределенностей) **Лопиталья**, которое докажем позже, а пока применим его на практике без доказательства.

**Теорема** (Лопиталья). Пусть

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \text{ (или } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0);$$

2) функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют производные в окрестности точки  $x_0$ , причем существует предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ ,

тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

В виде правила запишем:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[ \frac{0}{0} \text{ или } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[m]{x}-1)'}{(\sqrt[n]{x}-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}}{\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}} = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{m}$

# ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ или } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ или } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Полезны следующие варианты второго замечательного предела:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k \text{ или } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + kx)^{\frac{1}{x}} = e^k.$$

# ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

**Пример 1.** Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x}$ .

**Решение.** Так как при  $x \rightarrow 0$   $\sin 7x \rightarrow 0$ , то имеет место неопределенность  $\left[\frac{0}{0}\right]$ . Для использования первого замечательного предела домножим числитель и знаменатель дроби на 7:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \sin 7x}{7x} = 7 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 7 \cdot 1 = 7.$$

**Пример 2.** Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 3x}$ .

**Решение.** Числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю при  $x \rightarrow 0$ . Применим тригонометрическое тождество  $\operatorname{tg} 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$  и вычислим предел с помощью первого замечательного предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos 3x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{3 \sin 3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x = = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

# ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

то  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  – эквивалентные бесконечно малые при  $x \rightarrow x_0$ , обозначают  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ .

**Теорема** Если  $\alpha(x) \sim a(x)$  и  $\beta(x) \sim b(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x)}{b(x)}$$

# ТАБЛИЦА ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

при $x \rightarrow 0$	если $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$
$\sin x \sim x$	$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\arcsin x \sim x$	$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\operatorname{arctg} x \sim x$	$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$	$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha(x)^2}{2}$
$e^x - 1 \sim x$	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
$a^x - 1 \sim x \ln a$	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$
$\ln(1+x) \sim x$	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
$(1+x)^p - 1 \sim px$	$(1+\alpha(x))^p - 1 \sim p\alpha(x)$

# ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ

**Пример 1.** Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}$ .

**Р е ш е н и е.** Воспользуемся теоремой о замене функций в пределе отношения эквивалентными:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x} = \left| \begin{array}{l} 3x \rightarrow 0 \Rightarrow \sin 3x \sim 3x \\ 4x \rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 4x \sim 4x \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}.$$

**Пример 2.** Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2}$ .

**Р е ш е н и е.** В числителе воспользуемся теоремой о замене функций в пределе разности эквивалентными:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2} &= \left| \begin{array}{l} \sin x \sim x \\ \frac{x}{2} \rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot x - \left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \frac{x^2}{4}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7}{4}x^2}{x^2} = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

# ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ

Пример 3. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 2 \operatorname{arctg} 3x + 3x^2}{\ln(1 + 3x + \sin^2 2x)}$ .

Р е ш е н и е. Воспользуемся теоремой о замене функций в пределе суммы и отношения эквивалентными:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 2 \operatorname{arctg} 3x + 3x^2}{\ln(1 + 3x + \sin^2 2x)} &= \left| \begin{array}{l} \sin 2x \sim 2x; \quad \operatorname{arctg} 3x \sim 3x; \\ (3x + \sin^2 2x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0 \Rightarrow \\ \ln(1 + 3x + \sin^2 2x) \sim 3x + \sin^2 2x \sim 3x + (2x)^2 \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 2 \cdot 3x + 3x^2}{3x + (2x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 6x + 3x^2}{3x + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(8 + 3x)}{x(3 + 4x)} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$



# ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ

Пример 4. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{e^{3x^2} - 1}$ .

Р е ш е н и е. По таблице эквивалентных бесконечно малых получаем:

$$\operatorname{arctg} x^2 \sim x^2, e^{3x^2} - 1 \sim 3x^2 \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{e^{3x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

# ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ

**Пример 5.** Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

**Решение.** Величины  $2x$  и  $3x$  не являются бесконечно малыми при  $x \rightarrow \pi$ , поэтому бесконечно малые при  $x \rightarrow \pi$  величины  $\sin 2x$  и  $\sin 3x$  нельзя заменить на их аргументы  $2x$  и  $3x$  соответственно.

Сделаем замену переменной. Пусть  $y = x - \pi$ , тогда  $x = \pi + y$  и  $y \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pi$ .

Получим

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin (2\pi + 2y)}{\sin (3\pi + 3y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 2y}{(-\sin 3y)} = \lim_{y \rightarrow 0} -\frac{2y}{3y} = -\frac{2}{3}.$$

# НО НЕ ВСЕ ТАК ПРОСТО

Пусть  $f(x) \sim g(x)$ , т.е. по определению эквивалентных функций  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , тогда по определению предела функции в точке  $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$  и

$$f(x) = g(x)(1 + \alpha(x)) = g(x) + g(x)\alpha(x) = g(x) + o(g(x)),$$

следовательно,

$$f(x) - g(x) = o(g(x)).$$

Так как порядок бесконечно малой  $o(g(x))$  в общем случае неизвестен, то переход к эквивалентным функциям в разности нужно производить осторожно.

Например, заменим на эквивалентные слагаемые в числителе в следующем пределе:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos x - \sin^2 x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x) - \sin^2 x}{x^4} = \left| \begin{array}{l} 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} ; \quad \sin^2 x \sim x^2 \\ \sin^2 x \sim x^2 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{x^2}{2} - x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^4} = 0.$$

Однако, выполнив тождественные преобразования тригонометрического выражения в числителе, получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos x - \sin^2 x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos x - (1 - \cos^2 x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \cos x + \cos^2 x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4} = \\ &= \left| 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{4}}{x^4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Порядок бесконечно малой  $o(g(x))$  и более точные эквивалентные функции научимся определять позже с помощью формулы Тейлора.

Замечание. В рассмотренном ранее примере  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2}$  разность в числителе заменили на эквивалентные, так как  $2x \sin x \sim 2x^2$ ,  $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{4}$  при  $x \rightarrow 0$  и  $2x^2 \neq \frac{x^2}{4}$ .

Домашнее задание (сборник задач Бермана Г.Н.)

- № 272  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$  ОТВЕТ: 0
- № 277  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$  ОТВЕТ: -1
- № 297  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$  ОТВЕТ: 3
- № 326  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\operatorname{tg}^3 x - \sin^3 x}$  ОТВЕТ:  $\infty$
- № 327  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$  ОТВЕТ: 0
- № 329  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1 - \sin x)^2}}$  ОТВЕТ:  $\infty$