



Государственное бюджетное  
образовательное учреждение  
высшего образования  
«Нижегородский государственный  
инженерно-экономический университет»

*Справочный материал к практике II по  
дисциплине «Математика» для студентов  
направления подготовки  
09.03.02 «Информационные системы и  
технологии»*

## **Функции нескольких переменных. Пределы функций нескольких переменных**

*Составитель:  
ст. преподаватель кафедры «Физико-  
математические науки» Черемухин А. Д.*

На ООФ накладываются ограничения при наличии:

- корня четной степени
- логарифмов
- дробей

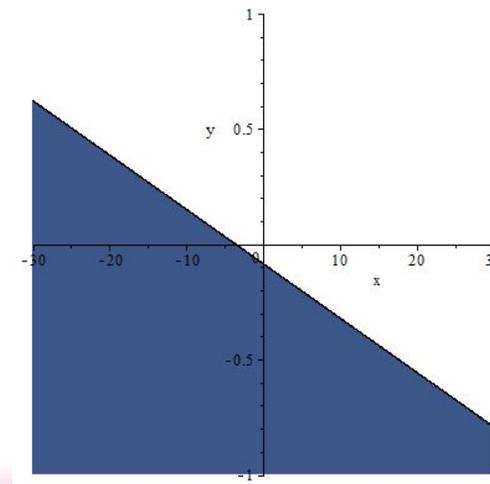
$$\frac{f(x, y)}{h(x, y)} + \sqrt{s(x, y)} + \log_{a(x, y)} b(x, y) \Rightarrow \text{ООФ} \in \begin{cases} h(x, y) \neq 0 \\ s(x, y) \geq 0 \\ a(x, y) > 0 \\ a(x, y) \neq 1 \\ b(x, y) > 0 \end{cases}$$

В случае с функциями двух переменных ООФ представляет собой область в плоскости

Пример 1. Изобразите ООФ  $f(x, y) = \sqrt{-2x - 85y - 7}$

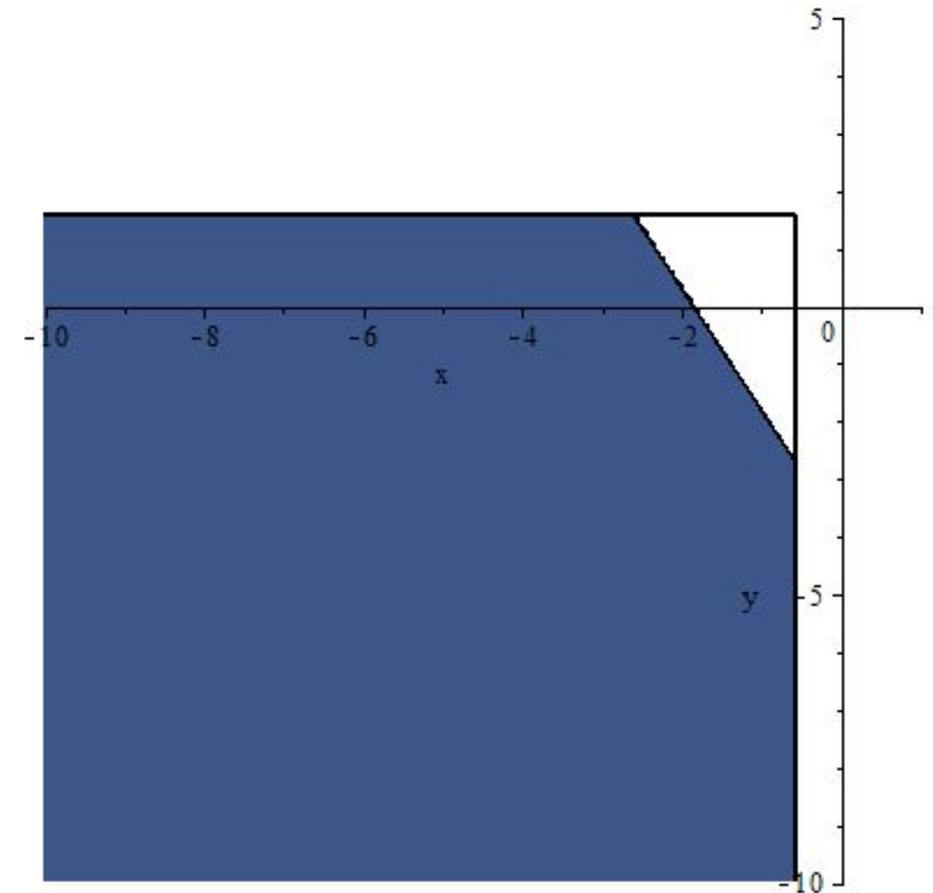
$$f(x, y) = \sqrt{-2x - 85y - 7} \Rightarrow D(x, y) \in -2x - 85y - 7 \geq 0$$

$$\Rightarrow x \leq -\frac{85}{2}y - \frac{7}{2}$$



Пример 2. Изобразите ООФ  $f(x, y) = \frac{\sqrt{-7x-4} + \sqrt{-37y+58}}{\ln(-72x-34y-133)}$

$$\frac{\sqrt{-7x-4} + \sqrt{-37y+58}}{\ln(-72x-34y-133)} \Rightarrow D(x, y) \in \left\{ \begin{array}{l} x \leq -\frac{4}{7} \\ y \leq \frac{58}{37} \\ -72x - 34y - 133 > 0 \\ \ln(-72x - 34y - 133) \neq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < -\frac{17}{36}y - \frac{133}{72} \\ y \neq -\frac{36}{17}x - \frac{67}{17} \end{array} \right.$$



Нахождение повторных пределов происходит по тем же правилам, что и нахождение обычных пределов

Пример 3. Найдите повторные пределы  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right); \lim_{y \rightarrow a} \left( \lim_{x \rightarrow b} f(x, y) \right)$   $f(x, y) = \frac{x+y}{x \cdot y}$ ,  $a = 2, b = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x+y}{x \cdot y} \right) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x+y}{x \cdot y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{y} \right)}{x \cdot y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{x}{y} + 1 \right)}{x} = \frac{1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{y \rightarrow 2} \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+y}{x \cdot y} \right) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+y}{x \cdot y} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left( \frac{x}{x} + \frac{y}{x} \right)}{x \cdot y} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 + \frac{y}{x} \right)}{y} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{y} = \frac{1}{y} \quad \lim_{y \rightarrow 2} \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

Нахождение двойных пределов основано обычно на замене переменных, позволяющих свести две переменные в одну

Пример 4. Найдите двойной предел  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 3}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$ .

**Решение.** Обозначим  $x = 1/t$ , тогда условие  $x \rightarrow \infty$   $y \rightarrow 3$  эквивалентно условию  $(t, y) \rightarrow (0, 3)$ , следовательно,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 3}} \frac{x^2}{x+y} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{(t, y) \rightarrow (0, 3)} \frac{\ln(1+t)}{t(1+ty)} = \lim_{(t, y) \rightarrow (0, 3)} \frac{1}{1+ty} = 1$$

и

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 3}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 3}} \frac{x^2}{x+y} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e.$$