Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

Справочный материал к практике 11 по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии»

Функции нескольких переменных.
Пределы функций нескольких переменных

*Составитель:
ст. преподаватель кафедры «Физико-математические науки» Черемухин А. Д.*

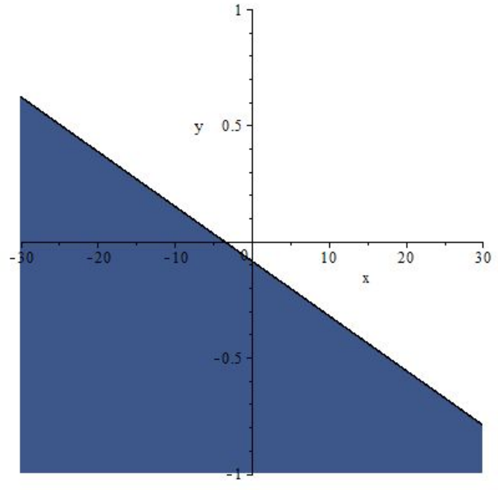
На ООФ накладываются ограничения при наличии:
- корня четной степени
- логарифмов
- дробей

$$\frac{f(x,y)}{h(x,y)}+\sqrt{s(x,y)}+\log_{a(x,y)}\mathrm{b}(x,y)\Rightarrow ООФ\in\begin{cases}h(x,y)\neq 0\\ s(x,y)\geq 0\\ a(x,y)>0\\ a(x,y)\neq 1\\ b(x,y)>0\end{cases}$$

В случае с функциями двух переменных ООФ представляет собой область в плоскости

Пример 1. Изобразите ООФ $f(x,y)=\sqrt{-2x-85y-7}$

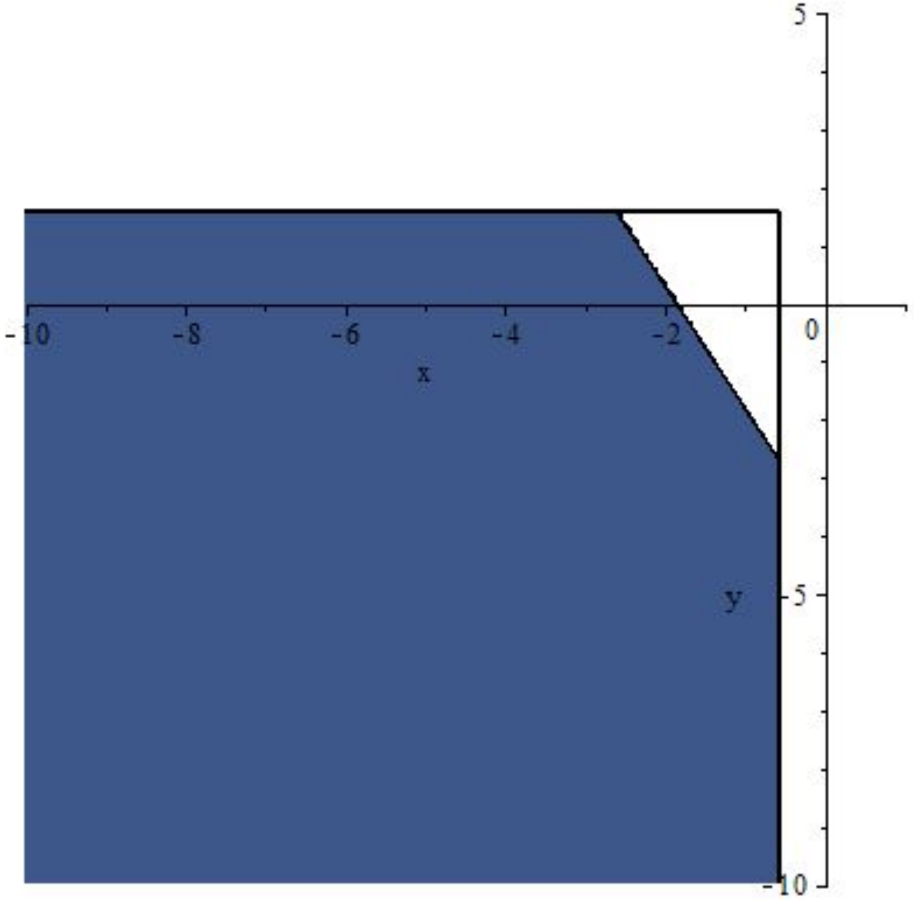
$$f(x,y)=\sqrt{-2x-85y-7}\Rightarrow \mathrm{D}(x,y)\in -2x-85y-7\geq 0$$
$$\Rightarrow x\leq -\frac{85}{2}y-\frac{7}{2}$$



Пример 2. Изобразите ООФ $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{-7x-4}+\sqrt{-37y+58}}{\ln(-72x-34y-133)}$

$$\frac{\sqrt{-7x-4}+\sqrt{-37y+58}}{\ln(-72x-34y-133)} \Rightarrow D(x,y)\in$$

$$\left\{\begin{array}{c} -7x-4\geq 0 \\ -37y+58\geq 0 \\ -72x-34y-133>0 \\ \ln(-72x-34y-133)\neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x\leq -\dfrac{4}{7} \\ y\leq \dfrac{58}{37} \\ x<-\dfrac{17}{36}y-\dfrac{133}{72} \\ y\neq -\dfrac{36}{17}x-\dfrac{67}{17} \end{array}\right.$$



Нахождение повторных пределов происходит по тем же правилам, что и нахождение обычных пределов

Пример 3. Найдите повторные пределы $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right);\ \lim\limits_{y\to a}\left(\lim\limits_{x\to b} f(x,y)\right)\ f(x,y)=\dfrac{x+y}{x\cdot y},\ a=2,\ b=\infty$

$$\lim_{x\to 2}\left(\lim_{y\to\infty}\frac{x+y}{x\cdot y}\right) \qquad \lim_{y\to\infty}\frac{x+y}{x\cdot y}=\lim_{y\to\infty}\frac{y\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{y}\right)}{x\cdot y}=\lim_{y\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{y}+1\right)}{x}=\frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{y\to 2}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x+y}{x\cdot y}\right) \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x+y}{x\cdot y}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\frac{x}{x}+\frac{y}{x}\right)}{x\cdot y}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{y}{x}\right)}{y}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{y} \qquad \lim_{y\to 2}\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$$

Нахождение двойных пределов основано обычно на замене переменных, позволяющих свести две переменные в одну

Пример 4. Найдите двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to 3}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

Решение. Обозначим $x=1/t$, тогда условие $x\to\infty$ $y\to 3$ эквивалентно условию $(t, y)\to(0, 3)$, следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to 3}} \frac{x^2}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{(t,y)\to(0,3)} \frac{\ln(1+t)}{t(1+ty)} = \lim_{(t,y)\to(0,3)} \frac{1}{1+ty} = 1$$

и

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to 3}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to 3}} \frac{x^2}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e.$$