Системы массового обслуживания (СМО)

Основные понятия

- требование на обслуживание;
- поток заявок (имеет случайный закон распределения);
- канал обслуживания.

- Системы бывают *одноканальные* и *многоканальные*.
- Каналом обслуживания называется «устройство», которое в любой момент времени может обслуживать только одно требование.
- СМО бывает с отказами и с ожиданием.

СМО с ожиданием

СМО с ожиданием бывает трех типов:

- упорядоченное обслуживание;
- случайное обслуживание;
- приоритетное обслуживание.

СМО с отказами

Характеристики СМО с отказами:

- абсолютная пропускная способность — это среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;
- относительная пропускная способность — это средняя доля поступивших заявок, обслуженных системой.

Основные характеристики СМО

- число каналов n;
- λ — интенсивность потока заявок (среднее число заявок, поступивших в единицу времени);
- μ – производительность каналов (среднее число заявок, обслуженных в единицу времени).

Поток заявок и время обслуживания

- $\lambda(t)$ — интенсивность потока заявок.

Предположения:

1. стационарность: $\lambda(t) = \lambda = \mathrm{const}$;
2. отсутствие последействия;
3. ординарность.

Поток заявок и время обслуживания

- Если выполняются условия с 1 по 3, то такой поток называется **простейшим** или **стационарным Пуассоновским**.
- Если выполняются 2 и 3 и не выполняется 1, то поток называется **нестационарным Пуассоновским**.
- Вероятность того, что на участке времени длительностью τ произойдет ровно m событий равно:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, (m = 0, 1, \dots)$$

a — среднее число событий, приходящееся на участок τ;

$a = \lambda\tau$ — для стационарного потока.

Поток заявок и время обслуживания

- Закон распределения интервала времени T между соседними событиями в Пуассоновском потоке равен:

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}, t > 0$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$$

$$m_t = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma_t = \frac{1}{\lambda}$$

Поток заявок и время обслуживания

- $T_{об}$ — время обслуживания одной заявки

$$g(t) = \mu e^{-\mu t},$$

$$\mu = \frac{1}{M[T_{об}]}$$

λ — плотность потока заявки

μ — плотность потока обслуживания

СМО с отказами

- Набор состояния системы:

все каналы свободны

один занят, остальные свободны

СМО с отказами

- Каждая система характеризуется своим набором вероятностей.

$$\sum_{i=0}^{n} P_i(t) = 1$$

$$\mu = \frac{1}{t^*_{об}}; \quad t^*_{об} = M[T_{об}]$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$$

$$g(t) = \mu e^{-\mu t}, t > 0$$

СМО с отказами

- $$P_{\text{отк}}(t) = P_n(t)$$
- q — относительная пропускная способность.
- $q(t) = 1 - P_n(t)$ — вероятность застать хотя бы один свободный канал.

- Для определения случайных величин служат системы дифференциальных уравнений Эрланга.

$$P_i(t) = P_i = \text{const}$$

при $t \to \infty$ функции вероятности становятся const.

СМО с отказами

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0; \quad P_2 = \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} P_0; \quad P_3 = \frac{\lambda^3}{3!\mu^3} P_0 \quad \dots$$

$$\forall k \le n; \qquad P_k = \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k} P_0$$

Пусть $\frac{\lambda}{\mu} = \alpha$ — приведенная плотность потока заявок

$$\alpha = \lambda t_{\text{об}}^*; \qquad P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}}$$

СМО с отказами

- Формула Эрланга:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}}; \quad 0 \le k \le n$$

- Рекуррентные формулы Эрланга:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}};$$

$$P_1 = \alpha P_0; \qquad P_2 = \frac{\alpha}{2}P_1; \qquad P_3 = \frac{\alpha}{3}P_2, \dots; \qquad P_n = \frac{\alpha}{n}P_{n-1}$$

СМО с отказами

- $$P_{\text{отк}} = P_n = \frac{\alpha^n}{n!\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}};$$

$q = 1 - P_{\text{отк}}$ — относительная пропускная способность;
$A = (1 - P_{\text{отк}})\lambda = q\lambda$ — абсолютная пропускная способность;
$n^*_{\text{об}}$ — среднее число заявок, находящихся в обслуживании.

$$n^*_{\text{об}} = \sum_{k=1}^{n} kP_k$$

Одноканальная система

- $$n = 1$$

$$P_{\text{отк}} = P_1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$A = q\lambda = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}$$

$$n_{\text{об}}^{*} = P_1$$

Пример №1

- Рассмотрим одноканальную СМО — телефонную линию.
- Заявка, пришедшая в момент, когда линия занята, получает отказ.
- Интенсивность потока заявок $\lambda = 0{,}8$ (среднее количество вызовов в минуту), средняя продолжительность разговора $t^*_{\text{об}} = 1{,}5 \text{ мин.}$
- Найти:
  - относительную пропускную способность q;
  - абсолютную пропускную способность A;
  - вероятность отказа;
  - сравнить фактическую пропускную способность с номинальной, когда каждый разговор длится с точностью 1,5 мин., и звонки следуют один за другим.

Пример №1

$$\mu = \frac{1}{t_{\text{об}}^*} = 0{,}667$$

$$q = \frac{0{,}667}{0{,}8 + 0{,}667} = 0{,}455$$

$$A = \lambda q = 0{,}364$$

$$P_{\text{отк}} = 1 - q = 0{,}545$$

$$A_{\text{ном}} = \frac{1}{t_{\text{об}}^*} = 0{,}667$$

Пример №2

- АТС имеет четыре линии связи, плотность потока заявок $\lambda = 3$, средняя длительность разговора $t^*_{\text{об}} = 2\ \text{мин}$.
- Найти:
  - вероятность отказа;
  - среднюю долю времени, в течение которого телефонная станция вообще не загружена.

$$\mu = \frac{1}{t^*_{\text{об}}} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 6$$

Пример №2

$$P_{\text{отк}} = P_4 = \frac{\alpha^4}{4!\left(1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!}\right)} \approx 0{,}47$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!}} = 0{,}0087$$

СМО с ограниченной длиной очереди

- n — число каналов обслуживания;
- λ — плотность потока заявок;
- $T_{\text{об}}$ — время обслуживания;
- $\mu = \frac{1}{M[T_{\text{об}}]}$ — плотность обслуживания;
- m — предельная длина очереди.

СМО с ограниченной длиной очереди

- Возможные состояния системы:

все каналы свободны

все заняты, в очереди нет ни одной заявки

все заняты, в очереди одна заявка

СМО с ограниченной длиной очереди

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0; \quad 0 \le k \le n$$

$$P_{n+s} = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s \frac{\alpha^n}{n!} P_0; \quad 1 \le s \le m$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{m} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}$$

СМО с ограниченной длиной очереди

- Рекуррентные соотношения:

СМО с ограниченной длиной очереди

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - P_{n+m}; \qquad A = \lambda q$$

— среднее число заявок в очереди;

— среднее число заявок, находящихся в обслуживании;

— среднее время между соседними освобождениями каналов;

— среднее время ожидания в очереди.

Пример

- Рассмотрим заправку с одной колонкой ($n = 1$), размер площадки допускает не более трех машин ($m = 3$), $\lambda = 1$ (одна машина в минуту), $t^*_{об} = 1{,}25$.
- Найти все возможные характеристики этой системы.

$$\mu = \frac{1}{t^*_{об}} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$$

Пример

$$P_{\text{отк}} = P_4 = 0{,}3$$

$$q = (1 - P_{\text{отк}}) = 0{,}7$$

$$A = \lambda q \approx 0{,}7$$

$$m_{\text{оч}}^{*} = 0 \cdot (0{,}12 + 0{,}15) + 1 \cdot 0{,}19 + 2 \cdot 0{,}27 + 3 \cdot 0{,}3 = 1{,}57$$

$$n_{\text{об}}^{*} = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot (1 - P_0) = 0{,}88$$

$$t_{\text{ож}}^{*} = 1{,}25 \cdot 1{,}57 = 1{,}96$$

СМО с ограниченным временем ожидания

- Теоретически длина очереди может быть любой, но время пребывания заявки в очереди ограничено величиной $T_{\text{ож}}$, и эта величина случайная с плотностью распределения
$$h(t) = \upsilon \cdot e^{-\upsilon t} (t > 0),$$
где υ — величина обратная среднему времени ожидания:
$$\upsilon = \frac{1}{t^*_{\text{ож}}}, t^*_{\text{ож}} = M[T_{\text{ож}}]$$
- υ — плотность ухода заявки из очереди.
- Если $\upsilon \to \infty$, тогда $t^*_{\text{ож}} \to 0$ (система с отказами).
- Если $\upsilon \to 0$, тогда $t^*_{\text{ож}} \to \infty$ (чистая система с ожиданиями).

СМО с ограниченным временем ожидания

- Возможные состояния системы:

СМО с ограниченным временем ожидания

- Для этой системы существуют предельные формулы Эрланга:

………..

СМО с ограниченным временем ожидания

- $$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n+s}}{n!\,\mu^n \prod_{m=1}^{s} (n\mu + m\upsilon)} \right)^{-1}$$
- υ — плотность ухода заявки из очереди;
- $\frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot t^*_{\text{ож}} = \alpha$ — среднее число заявок, стоящих в очереди, приходящееся на среднее время обслуживания одной заявки;
- $\frac{\upsilon}{\mu} = \upsilon \cdot t^*_{\text{об}} = \beta$ — среднее число заявок, покинувших очередь.

СМО с ограниченным временем ожидания

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0; \quad (0 < k \le n)$$

$$P_{n+s} = \frac{\alpha^{n+s} P_0}{n! \prod_{m=1}^{s} (n + m\beta)}; \quad (s \ge 1)$$

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^{s} (n + m\beta)} \right)^{-1}$$

СМО с ограниченным временем ожидания

- Рекуррентные формулы:

$$P_k = \frac{\alpha}{k} P_{k-1}; \;\; (0 < k \leq n)$$

$$P_{n+s} = \frac{\alpha}{n + s\beta} P_{n+s-1}; \;\; (s \geq 1)$$

$$P_{\text{отк}} = \frac{\upsilon}{\lambda} m_s = \frac{\beta}{\alpha} m_s; \;\; m_s = \sum_{s=1}^{\infty} s P_{n+s}$$

Замечание!

- Если $\alpha \geq n$, то такие системы оказываются **нестационарными.**

Задача 1

- На вход двухканальной системы с ограниченным временем ожидания поступает простейший поток заявок с плотностью $\lambda = 3$ заявки в час, среднее время обслуживания одной заявки $t^*_{\text{об}} = 20\text{ мин}$, среднее время ожидания $t^*_{\text{ож}} = 30\text{ мин}$.
- Найти:
  - вероятность наличия очереди $P_{\text{оч}}$;
  - среднюю длину очереди m_s;
  - вероятность отказа $P_{\text{отк}}$.

Задача 1

$$P_{\text{оч}} = 1 - (P_0 + P_1 + P_2) = 0{,}18$$

$$m_s = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 \ldots = 0{,}18$$

$$P_{\text{отк}} = \frac{\beta}{\alpha} m_s \approx 0{,}14$$

Пример оптимизации характеристик СМО

- Пусть имеется одноканальная СМО с отказами, плата, взимаемая за обслуживание одной заявки, неизменна и равна C_1, интенсивность потока заявок λ, интенсивность потока обслуживания μ — управляема, среднее время обслуживания зависит от квалификации мастера и использованного оборудования. Чем выше μ , тем больше издержки I, т. е. $\mu \sim I$ (пропорциональны), коэффициент пропорциональности C_2. Требуется найти такое μ, при котором прибыль максимальна.

Пример оптимизации характеристик СМО

- $$D = c_1 \bar{n}$$

$\bar{n}$ — среднее число заявок, обслуженных в единицу времени;

$$\bar{n} = \lambda(1 - P_{\text{отк}}) = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}$$

$$D = c_1 \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}$$

$I = c_2\mu$ — издержки;

$z = c_1 \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} - c_2\mu$ — (прибыль = доход – издержки);

$$\frac{\partial z}{\partial \mu} = 0$$

Пример оптимизации характеристик СМО

$$\frac{\partial z}{\partial \mu} = c_1 \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} - c_1 \frac{\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2} - c_2 = 0$$

$$\mu^2 + 2\lambda\mu + \lambda^2 \left(1 - \frac{c_1}{c_2}\right) = 0$$

$$\mu_{\ 1,2} = \lambda \left(-1 \pm \sqrt{\frac{4c_1}{c_2} - 3}\right)$$

$$\mu = \lambda \left(\sqrt{\frac{4c_1}{\quad} - 3} - 1 \right)$$