Тема 2. Модели экспоненциального сглаживания

Экспоненциальное сглаживание – простой и эффективный метод усреднения по времени ФВР для оценки его основных статистик. Модель экспоненциальной скользящей средней (exponential moving average - EMA) имеет вид линейного разностного уравнения первого порядка

$$y(n) = \alpha\, x(n) + (1-\alpha) y(n-1) ;\, 0 \le \alpha \le 1$$ - параметр сглаживания

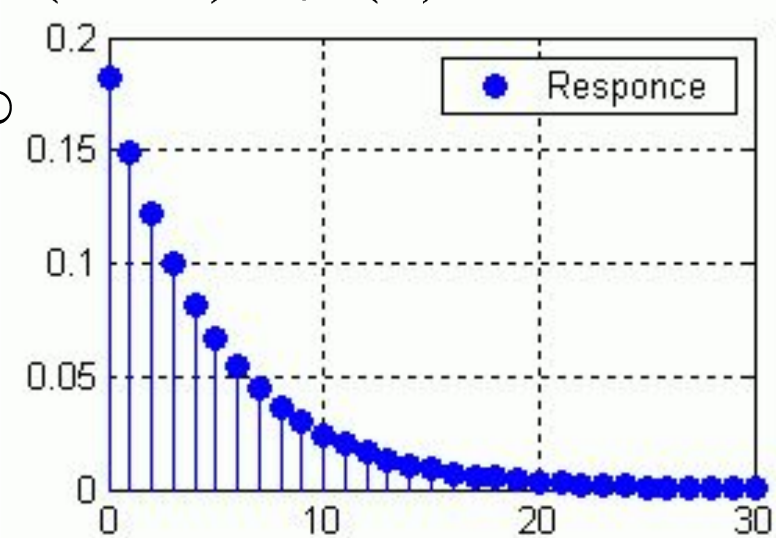
$x(n)$ - текущий отсчет ряда ; $y(n)$ - модель тренда ; EMA - БИХ фильтр

$$y(n) = \alpha \sum_{k=0}^{K-1} (1-\alpha)^k x(n-k) + (1-\alpha)^K y(0) ;\, n \ge K$$

$y(0)$ - начальное значение EMA ; $K \to \infty$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{MA}(k) x(n-k) ;$$

$$h_{MA}(n) = \begin{cases} \alpha(1-\alpha)^n & , n \ge 0 \\ 0 & , n < 0 \end{cases}$$

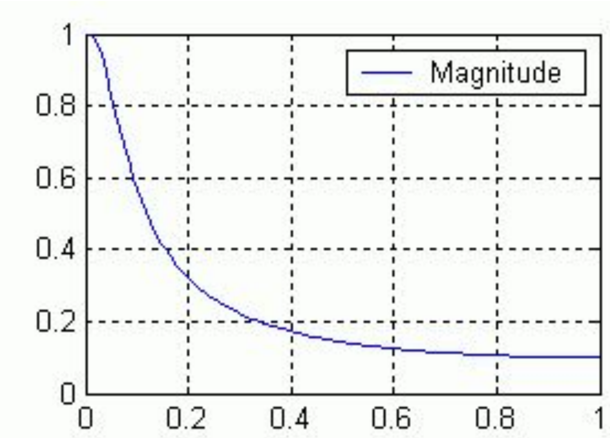


Импульсная характеристика EMA

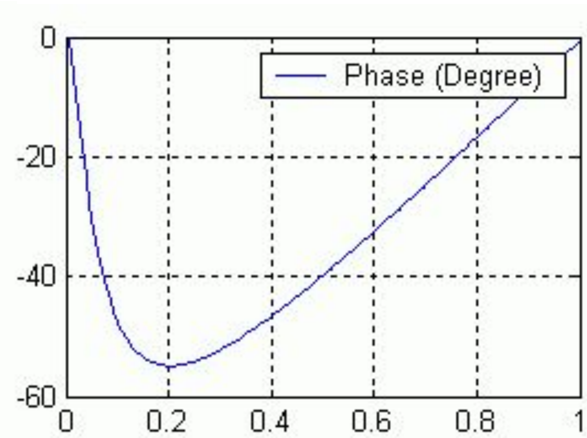
Свойства EMA

1. Спектральные : $0 \le f\,\Delta t \le 1$ - нормированная частота

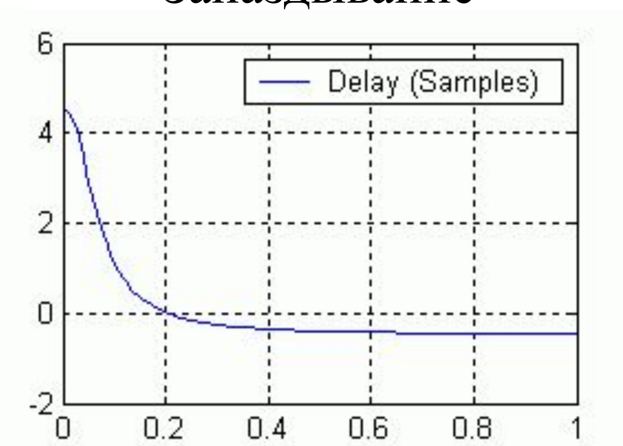
АЧХ



ФЧХ



Запаздывание



2. Целевая функция :

$$\min_{y(n)} \left\{ \alpha\left(x(n)-y(n)\right)^2 + (1-\alpha)\left(y(n)-y(n-1)\right)^2 \right\}$$

3. Оценка запаздывания – способ Эйлерса (Ehlers) :

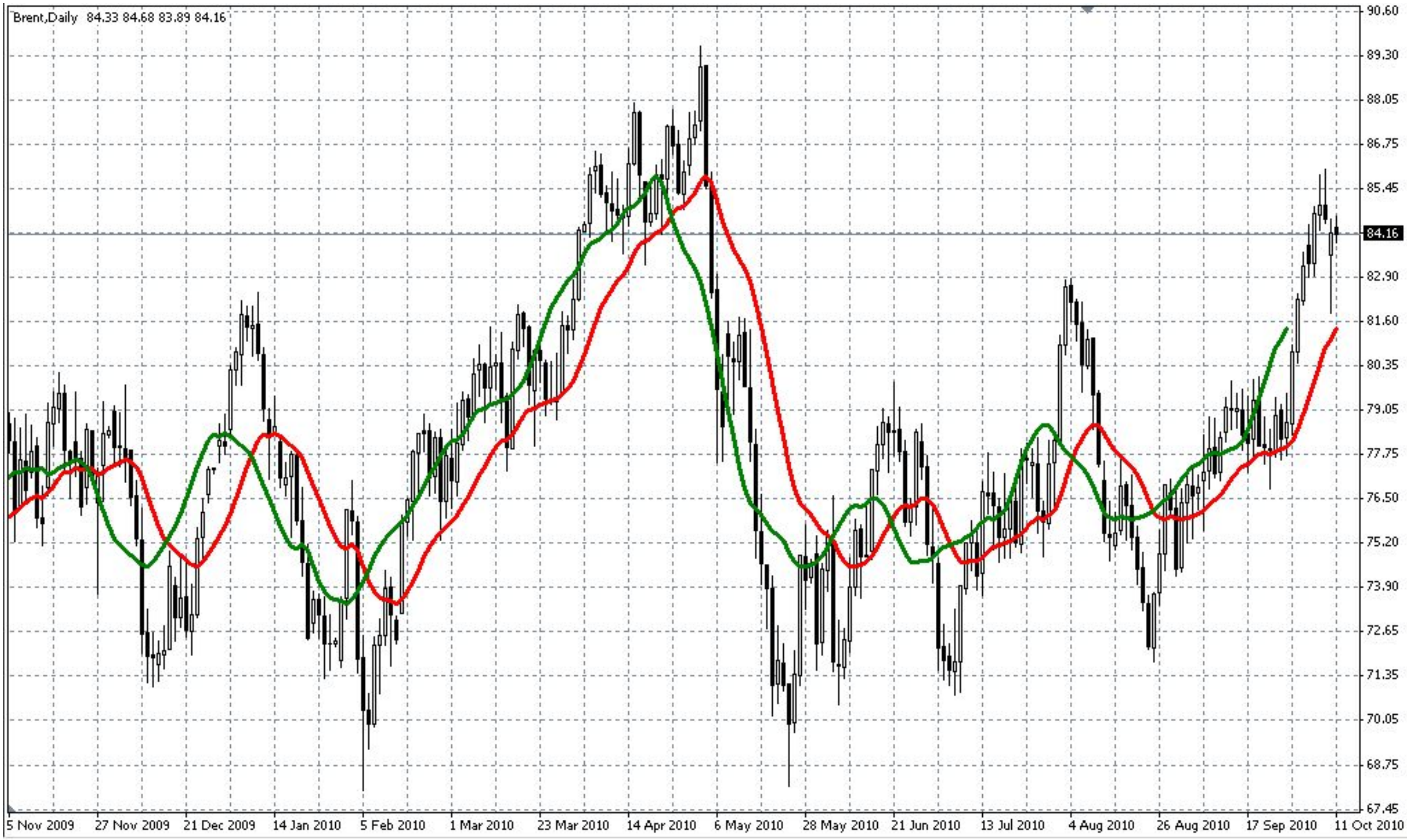
$$y(n) = \alpha\, x(n) + (1-\alpha)\, y(n-1) = Ema\left(x(n), \alpha\right); \alpha = 2/(K+1)$$

$$n - Lag = \alpha\, n + (1-\alpha)(n - 1 - Lag); \; Lag = \frac{K-1}{2} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

4. Моделирование тренда : $\alpha = 0,1\,;\, Lag = 9\,;\, K = 19$

Долговременная память :

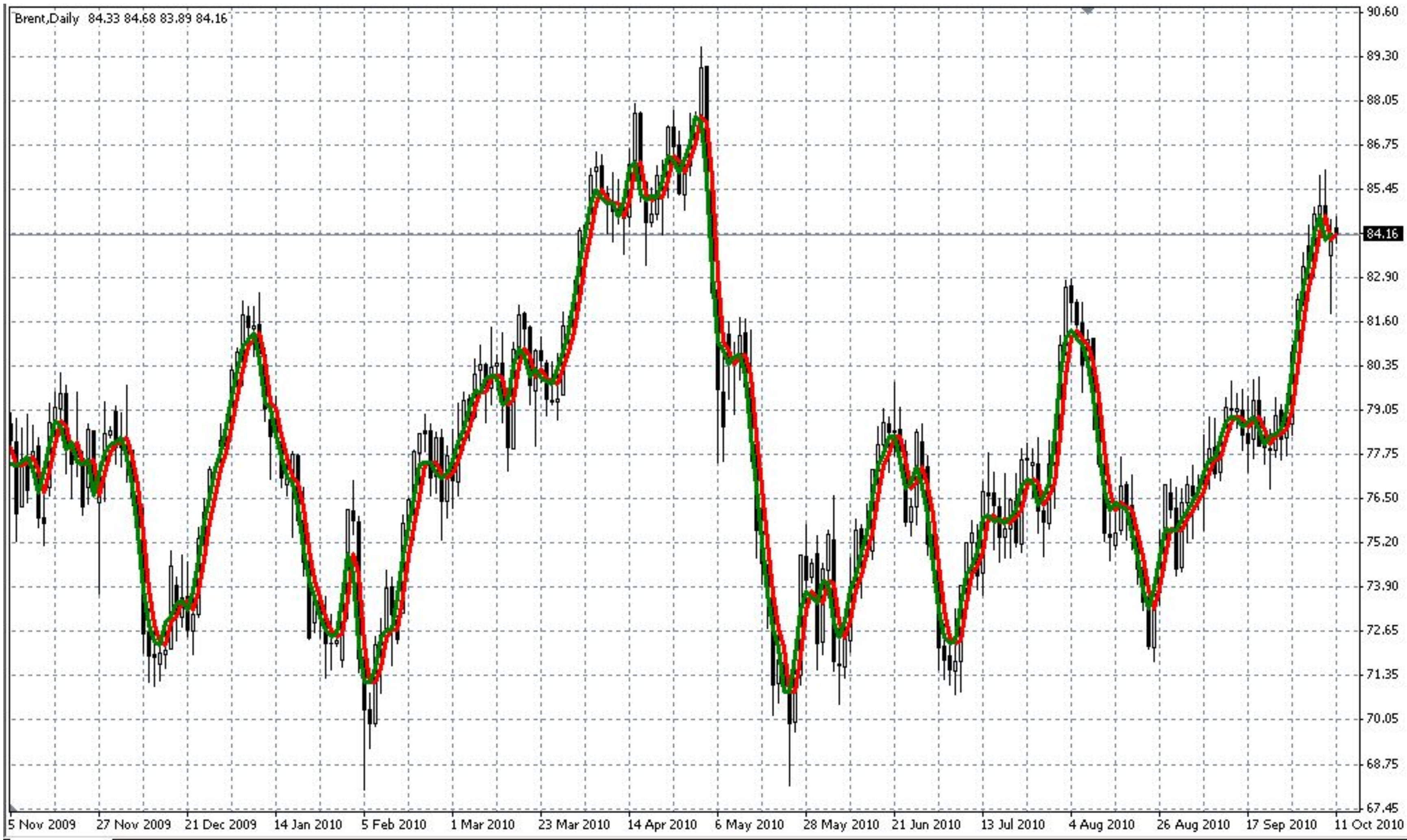
$$h_{MA}(0) = 0,1\,;\, h_{MA}(1) = 0,09\,;\, h_{MA}(2) = 0,081\,;\, \ldots$$



5. Краткосрочный прогноз : $\alpha = 0{,}5\,;\, Lag = 1\,;\, K = 3$

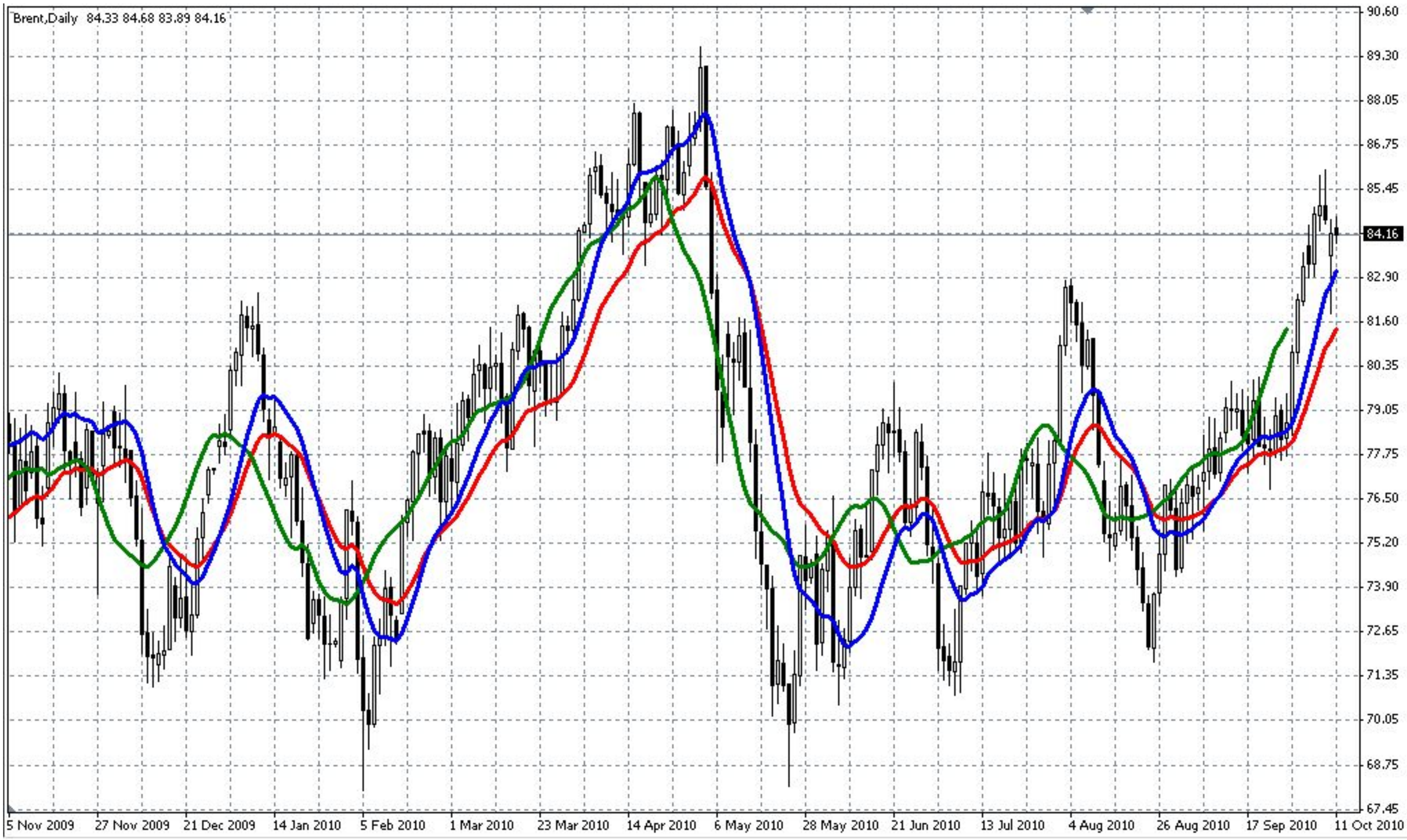
$$h_{MA}(0) = 0{,}5\,;\, h_{MA}(1) = 0{,}25\,;\, h_{MA}(2) = 0{,}125\,;\,\ldots$$

$y(n) = y(n-1) + \alpha\{x(n) - y(n-1)\}$ - прогнозная форма EMA



6. Не запаздывающая модель тренда Эйлерса : $\alpha = 0{,}1\,;\, Lag \approx 0\,;\, K = 19$

$$y(n) = 2\,Ema(x(n),\alpha) - Ema(x(n),\alpha/2)$$



Модифицированная ЕМА Булашова (МЕМА)

1. Целевая функция :

$$\min_{y(n)} \left\{ \begin{aligned} \alpha\big(x(n)-y(n)\big)^2 + \gamma\big(y(n)-y(n-1)\big)^2 + \\ +\beta\big(y(n)-2y(n-1)+y(n-2)\big)^2 \end{aligned} \right\}$$

$\alpha > 0\,, \beta > 0\,, \gamma > 0$ - параметры регуляризации; $\alpha + \beta + \gamma = 1$

$$y(n) = \alpha\, x(n) + (1-\alpha)y(n-1) + \beta\{y(n-1) - y(n-2)\}$$

2. Оценка запаздывания : $n - Lag = \alpha\, n + (1-\alpha)(n-1-Lag) +$

$Lag = (1-\alpha-\beta)/\alpha\,;$ $\quad +\beta(n-1-Lag-n+2+Lag);$

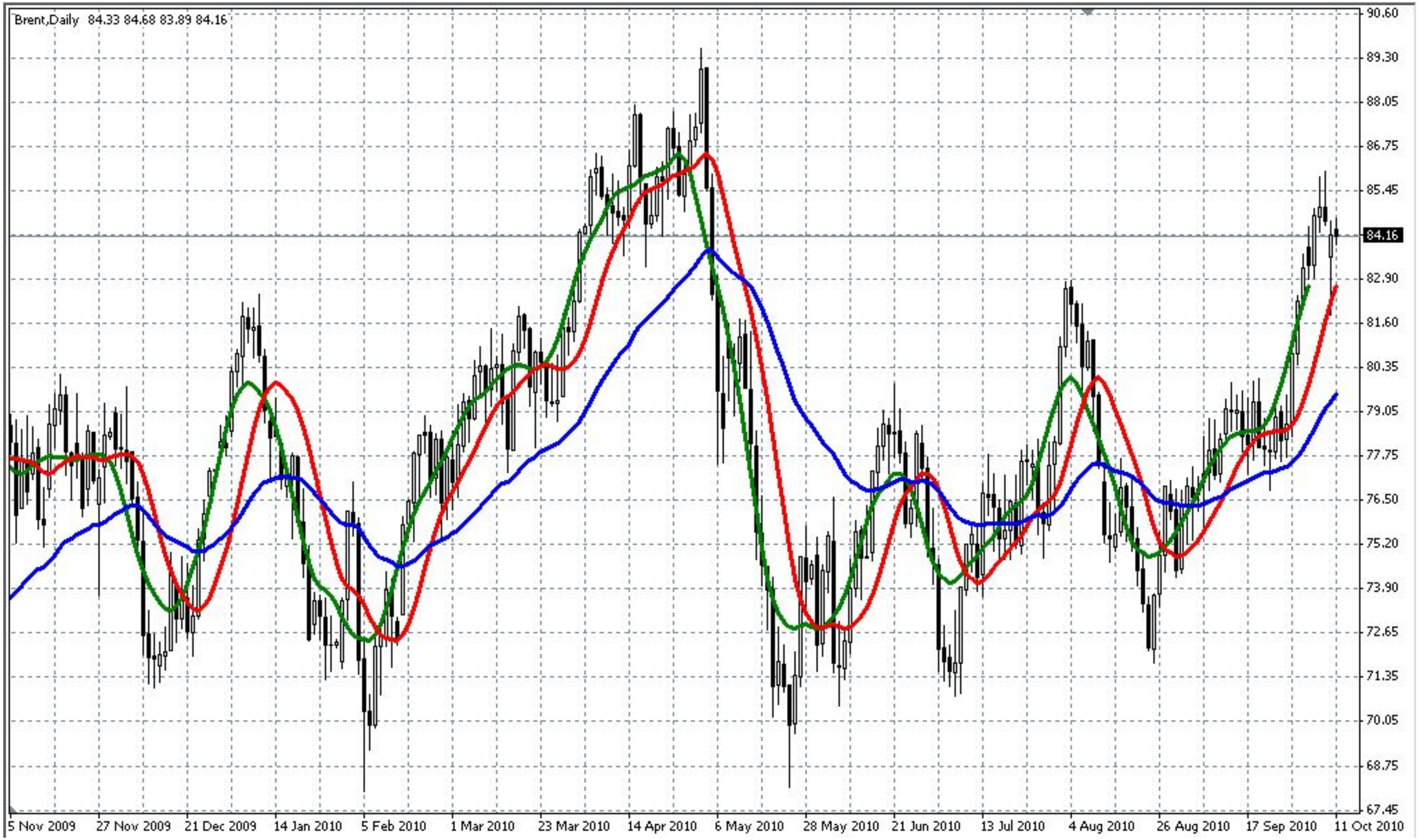
$\alpha+\beta<1;\ \beta = 1-\alpha(Lag+1) \ge 0{,}5$ - штраф за сложность ;

3. Управляемые параметры МЕМА :

$Lag \le 9$ - запаздывание относительно ВР ; β - степень гладкости тренда

$\alpha = (1-\beta)/(Lag+1) \le 0{,}5/(Lag+1)$ - параметр сглаживания

4. Моделирование тренда : $Lag = 5\,;\, \beta = 0{,}7 \Rightarrow \alpha = 0{,}05\,;\, K = 41$



4. Импульсная характеристика MEMA :

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}h_{MA}^{(1)}(k)-\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}h_{MA}^{(2)}(k)\right)x(n-k)$$

MEMA – двухкомпонентная смесь $Ema(x(n),\alpha_1)$ и $Ema(x(n),\alpha_2)$

$$\alpha_{1,2}=\left(1+\alpha-\beta\pm\sqrt{(1-\alpha+\beta)^2-4\beta}\right)/2\,;\,0<\alpha_1<\alpha_2<1$$

$$h_{MA}^{(1,2)}(n)=\begin{cases}\alpha\left(1-\alpha_{1,2}\right)^n, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

Модель линейного темпа изменения рынка Хольта - Брауна

1. Прогноз рынка на один шаг времени (локально линейный тренд) :

$$\tilde{x}_1(n-1) = \tilde{x}(n) = a_1(n-1) + a_2(n-1)$$

$a_1(n-1)$ - среднее значение рынка в момент времени (n - 1) ;

$a_2(n-1)$ - темп изменения рынка в момент времени (n - 1) ;

2. Алгоритм Хольта адаптации параметров локально линейного тренда :

$$a_1(n) = \alpha_1 x(n) + (1-\alpha_1)\tilde{x}_1(n-1); 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$$

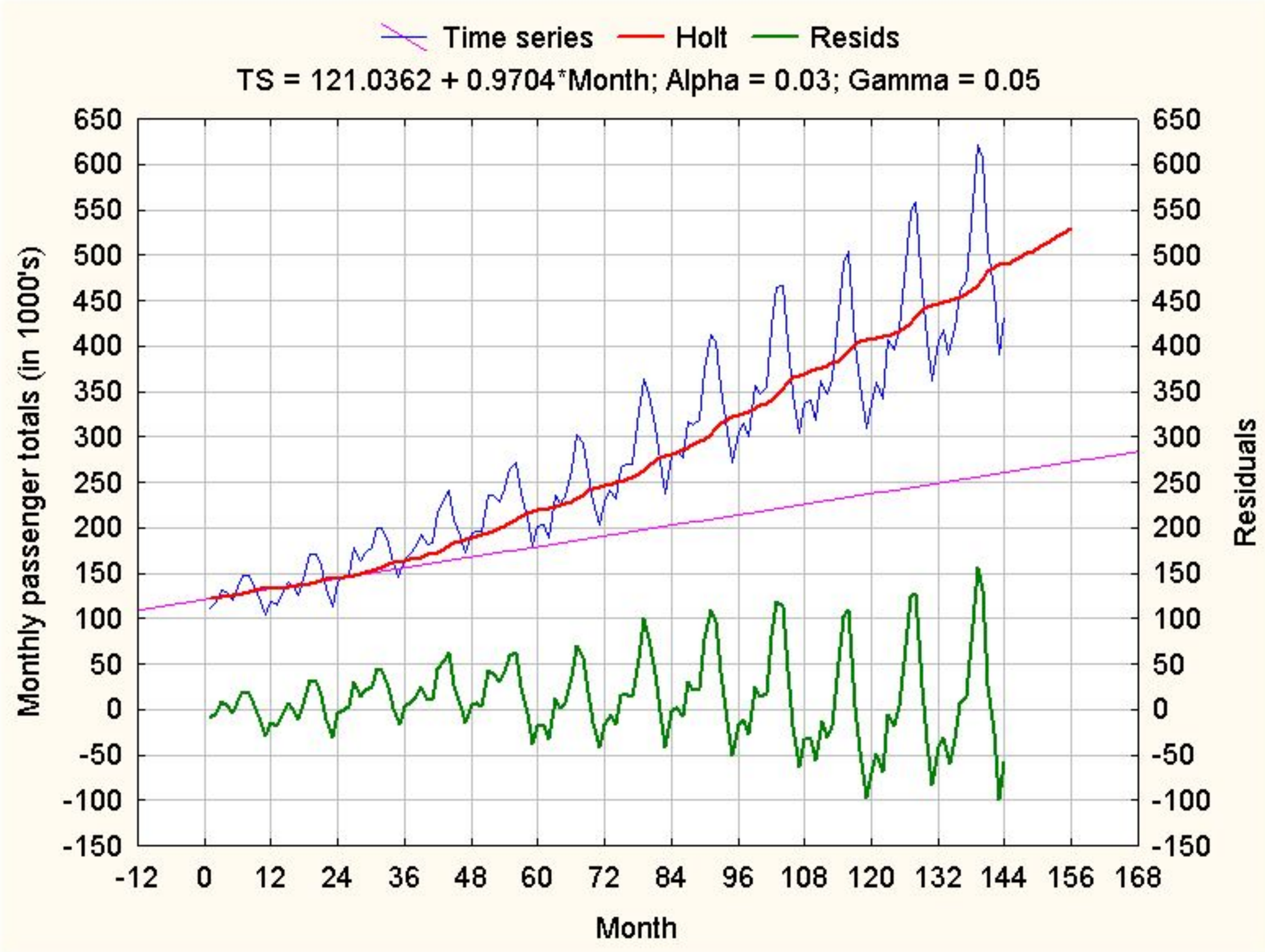
$$a_2(n) = \alpha_2 (a_1(n) - a_1(n-1)) + (1-\alpha_2) a_2(n-1)$$

3. Алгоритм Хольта в терминах ошибки прогноза рынка на один шаг времени :

$$e(n) = x(n) - \tilde{x}_1(n-1)$$

$$a_1(n) = a_1(n-1) + a_2(n-1) + \alpha_1 e(n)$$

$$a_2(n) = a_2(n-1) + \alpha_1 \alpha_2 e(n)$$



Time series
Holt
Resids
TS = 121.0362 + 0.9704*Month; Alpha = 0.03; Gamma = 0.05
Monthly passenger totals (in 1000's)
Residuals
Month
650
600
550
500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
-50
-100
-150
-12
0
12
24
36
48
60
72
84
96
108
120
132
144
156
168

4. Алгоритм Брауна в терминах ошибки прогноза рынка на один шаг времени :

$0 < \beta < 1$ - коэффициент дисконтирования, характеризует старение данных за один шаг времени

$$\alpha_1 = 1 - \beta^2 \; ; \; \alpha_1 \alpha_2 = (1-\beta)^2 = \left(1 - \sqrt{1-\alpha_1}\right)^2$$

***Шаг* 0 :** Инициализация. Выбрать параметр сглаживания $0 < \alpha < 1$

и начальные значения : $n = 1\,;\, \tilde{x}_1(0)\,;\, a_1(0)\,;\, a_2(0)$

***Шаг* 1 :** Вычислить ошибку прогноза рынка на один шаг времени :

$$e(n) = x(n) - \tilde{x}_1(n-1)$$

***Шаг* 2 :** Корректировать среднее значение рынка за один шаг времени :

$$a_1(n) = a_1(n-1) + a_2(n-1) + \alpha\, e(n)$$

***Шаг* 3 :** Корректировать темп изменения рынка за один шаг времени :

$$a_2(n) = a_2(n-1) + \left(1 - \sqrt{1-\alpha}\right)^2 e(n)$$

***Шаг* 4 :** Вычислить прогноз рынка на один шаг времени :

$$\tilde{x}_1(n) = a_1(n) + a_2(n)$$

***Шаг* 5 :** Цикл по времени $n = n + 1$. Идти к ***Шагу* 1**.

5. Адаптация параметра сглаживания по ошибке прогноза рынка

Следящий контрольный сигнал Брауна :

$$C_B(n) = \left(\sum_{k=0}^{K-1} e(n-k)\right) \Big/ Ema\left(\left|e(n)\right|, \gamma\right); 0 < \gamma < 1$$

Условие адекватности модели исходному ВР : $\left|C_B(n)\right| \le C_{\max}$

Недостатки контрольного сигнала Брауна :

1. может не вернуться в допустимые пределы, даже если модель будет вновь адекватна исходному ВР;
2. может превышать допустимые пределы, а модель формирует достаточно точный прогноз.

Следящий контрольный сигнал Тригга :

$$C_T(n) = Ema(e(n), \gamma) / Ema\left(\left|e(n)\right|, \gamma\right); \left|C_T(n)\right| \le 1$$

Условие адекватности модели исходному ВР :

$$P\left\{\left|C_T(n)\right| \le C_{\max}\right\} = 0{,}95\,; C_{\max} = 2{,}4\sqrt{\gamma/(2-\gamma)}$$

Модель Брауна адаптации параметра сглаживания : $\alpha(n) = \left|C_T(n)\right|$

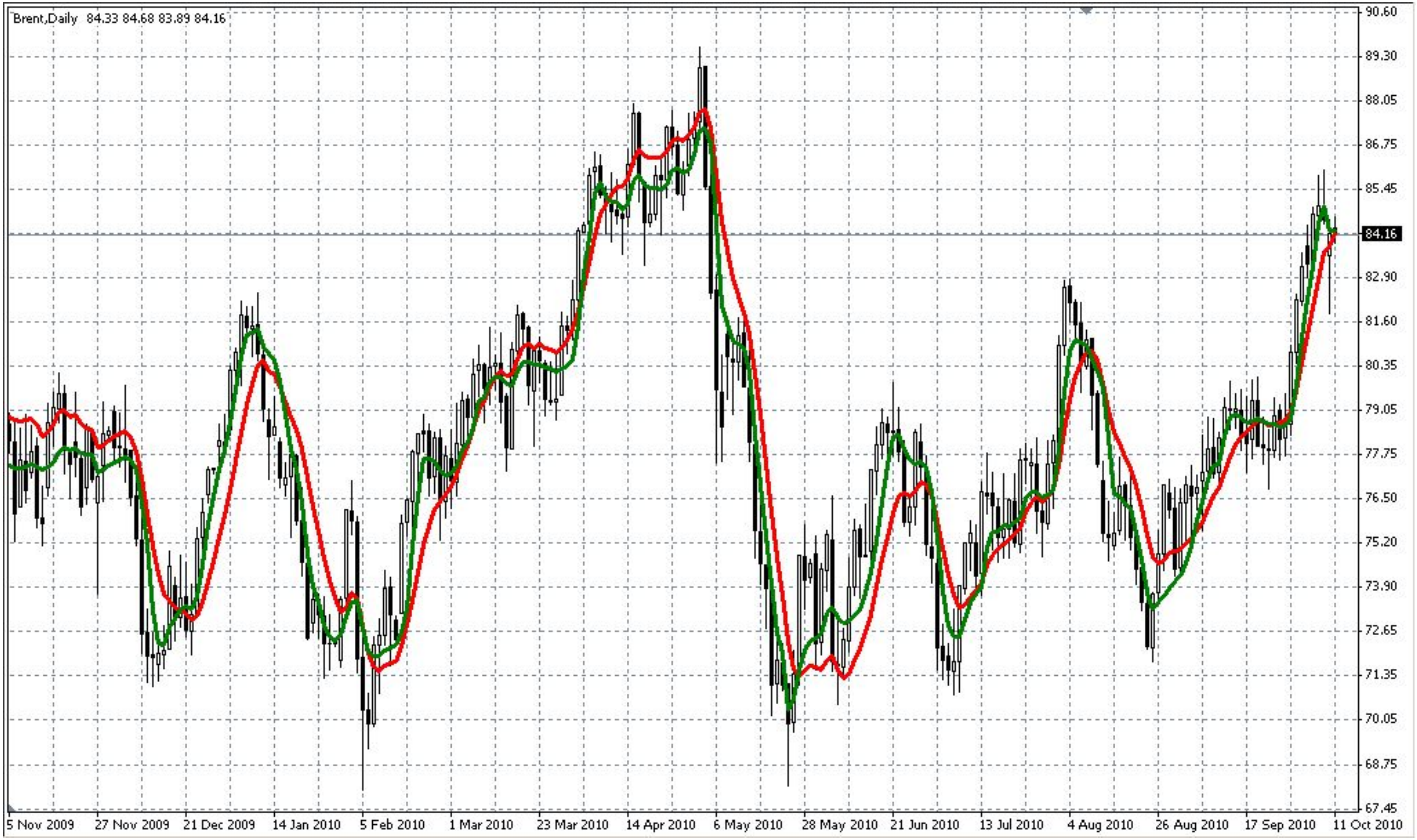
6. Функция распределения контрольного сигнала Тригга для однократного экспоненциального сглаживания :

Вероятность $P\left(\left\|C_T\right\| < C_{\max}\right)$	Порог адекватности модели $C_{\max}$				
	$\gamma = 0{,}1$	$\gamma = 0{,}2$	$\gamma = 0{,}3$	$\gamma = 0{,}4$	$\gamma = 0{,}5$
0,70	0,24	0,33	0,44	0,53	0,64
0,80	0,29	0,40	0,52	0,62	0,73
0,85	0,32	0,45	0,57	0,67	0,77
0,90	0,35	0,50	0,63	0,72	0,82
0,95	0,42	0,58	0,71	0,80	0,88
0,96	0,43	0,60	0,73	0,82	0,89
0,97	0,45	0,62	0,76	,0,84	0,90
0,98	0,48	0,66	0,79	0,87	0,92
0,99	0,53	0,71	0,82	0,92	0,94

7. Практическая модель адаптации параметра сглаживания :

$$\alpha(n) = \begin{cases} \alpha_{\min} & , \alpha_{\min} > \left|C_T(n)\right| \\ \left|C_T(n)\right| & , \alpha_{\min} \le \left|C_T(n)\right| \le \alpha_{\max} \\ \alpha_{\max} & , \alpha_{\max} < \left|C_T(n)\right| \end{cases}$$

8. Индикатор Брауна – Кауфмана :



Сезонные модели экспоненциального сглаживания

Аддитивный сезонный цикл Тейла – Вейджа

1. Прогноз рынка на один шаг времени :

$$\tilde{x}(n) = \tilde{a}(n) + c(n - T + 1);\ \tilde{a}(n) = a_1(n-1) + a_2(n-1)$$

$a_1(n-1)$ - среднее значение рынка в момент времени (n - 1) ;

$a_2(n-1)$ - темп изменения рынка в момент времени (n - 1) ;

$c(n-T)$ - значение рыночного цикла в момент времени ($n - T$) ;

2. Алгоритм Тейла – Вейджа (ТВ) адаптации параметров сезонного цикла :

$$a_1(n) = \alpha_1 (x(n) - c(n-T)) + (1-\alpha_1)\tilde{a}(n)$$

$$a_2(n) = \alpha_2 (a_1(n) - a_1(n-1)) + (1-\alpha_2) a_2(n-1)$$

$$c(n) = \alpha_3 (x(n) - a_1(n)) + (1-\alpha_3) c(n-T)$$

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < 1$$

3. Алгоритм ТВ в терминах ошибки прогноза рынка на один шаг времени :

***Шаг* 0 :** Инициализация. Выбрать параметры сглаживания

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3$$

и начальные значения :

$$n = T \; ; \tilde{x}(T) \; ; a_1(T-1) \; ; a_2(T-1) \; ; c(k) \, , \, k = \overline{0 \; ; (T-1)}$$

***Шаг* 1 :** Вычислить прогноз рынка на один шаг времени :

$$\tilde{x}(n) = a_1(n-1) + a_2(n-1) + c(n-T)$$

***Шаг* 2 :** Вычислить ошибку прогноза рынка на один шаг времени :

$$e(n) = x(n) - \tilde{x}(n)$$

***Шаг* 3 :** Корректировать среднее значение рынка за один шаг времени :

$$a_1(n) = a_1(n-1) + a_2(n-1) + \alpha_1 e(n)$$

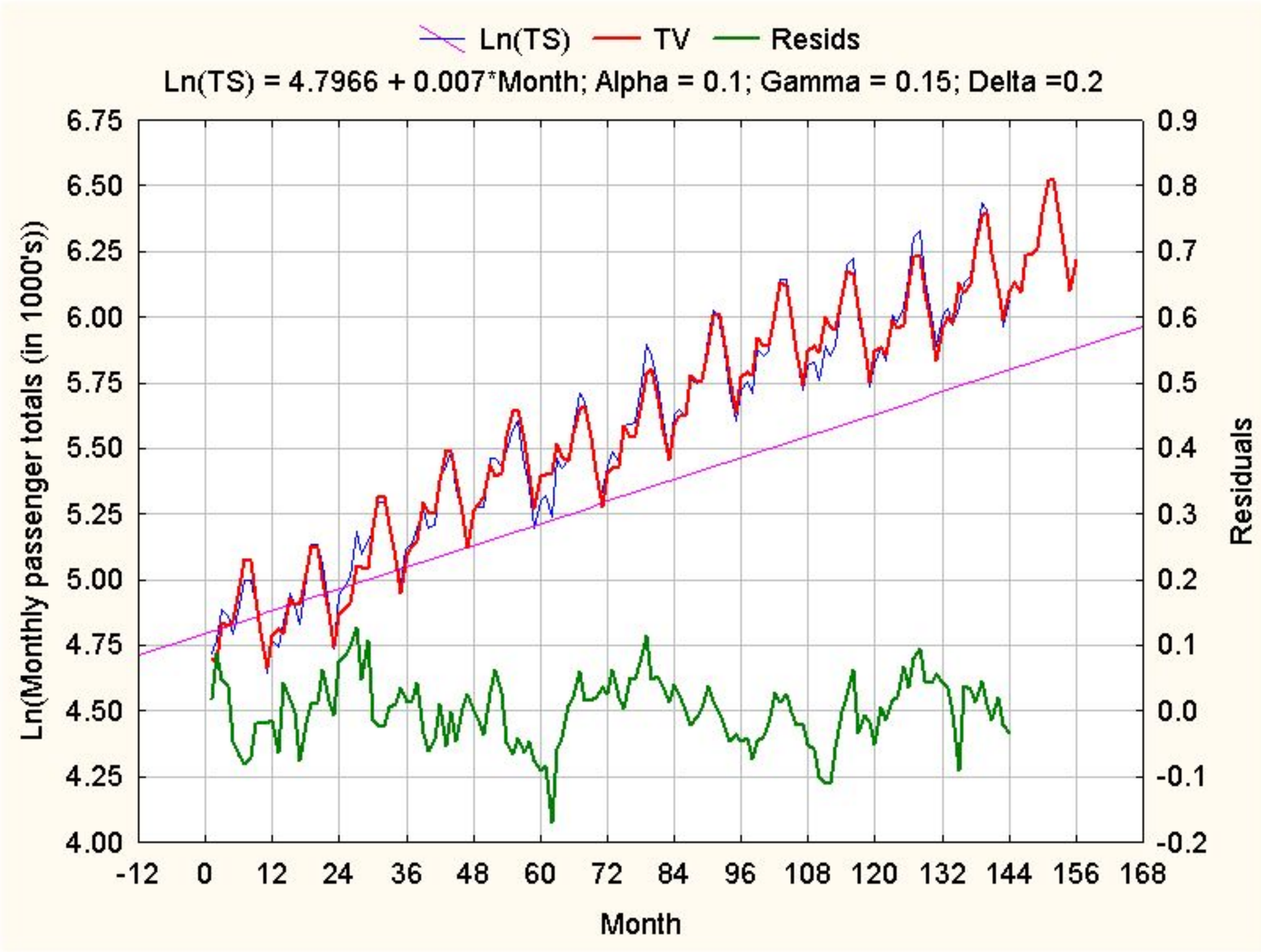
***Шаг* 4 :** Корректировать темп изменения рынка за один шаг времени :

$$a_2(n) = a_2(n-1) + \alpha_1 \alpha_2 e(n)$$

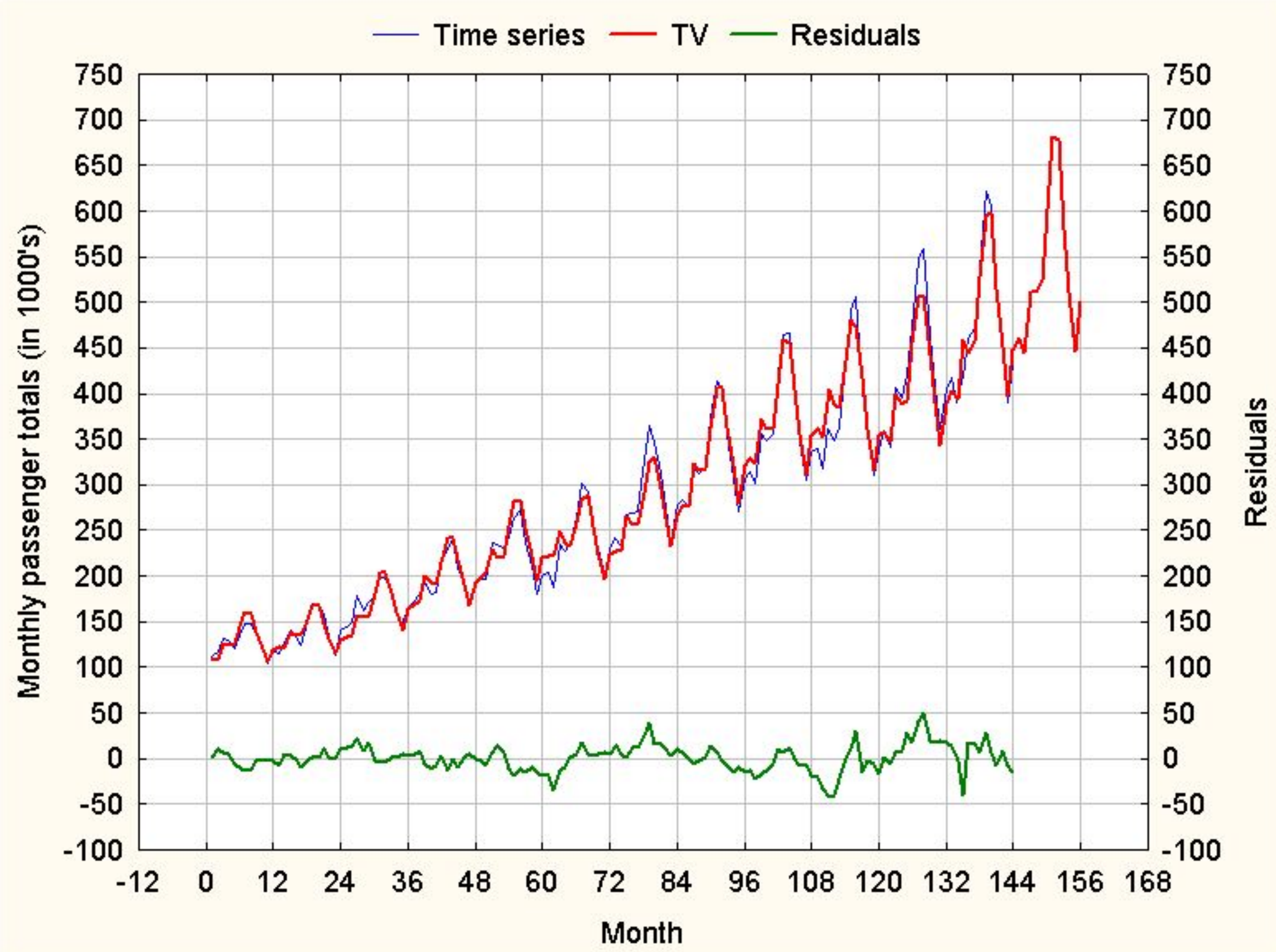
***Шаг* 5 :** Корректировать сезонный цикл за один шаг времени :

$$c(n) = c(n-T) + \alpha_3 (1 - \alpha_1) e(n)$$

***Шаг* 6 :** Цикл по времени $n = n + 1$. Идти к ***Шагу* 1**.



Ln(TS)
TV
Resids
Ln(TS) = 4.7966 + 0.007*Month; Alpha = 0.1; Gamma = 0.15; Delta =0.2
Ln(Monthly passenger totals (in 1000's))
Residuals
Month
6.75
6.50
6.25
6.00
5.75
5.50
5.25
5.00
4.75
4.50
4.25
4.00
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
-0.1
-0.2
-12
0
12
24
36
48
60
72
84
96
108
120
132
144
156
168



Time series
TV
Residuals
Monthly passenger totals (in 1000's)
Residuals
Month
750
700
650
600
550
500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
-50
-100
-12
0
12
24
36
48
60
72
84
96
108
120
132
144
156
168

Мультипликативный сезонный цикл Винтерса

1. Прогноз рынка на один шаг времени :

$$\tilde{x}(n) = \tilde{a}(n)c(n - T + 1); \tilde{a}(n) = a_1(n-1) + a_2(n-1)$$

$a_1(n-1)$ - среднее значение огибающей в момент времени (n - 1) ;

$a_2(n-1)$ - темп изменения рынка в момент времени (n - 1) ;

$c(n-T)$ - значение рыночного цикла в момент времени ($n - T$) ;

2. Алгоритм Винтерса адаптации параметров сезонного цикла :

$$a_1(n) = (\alpha_1 x(n) / c(n-T)) + (1-\alpha_1)\tilde{a}(n)$$

$$a_2(n) = \alpha_2(a_1(n) - a_1(n-1)) + (1-\alpha_2)a_2(n-1)$$

$$c(n) = (\alpha_3 x(n) / a_1(n)) + (1-\alpha_3)c(n-T)$$

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < 1$$

3. Алгоритм Винтерса в терминах ошибки прогноза рынка на один шаг времени :