

Тема 2. Модели экспоненциального сглаживания

Экспоненциальное сглаживание – простой и эффективный метод усреднения

по времени ФВР для оценки его основных статистик. Модель

экспоненциальной скользящей средней (exponential moving average - ЕМА)

имеет вид линейного разностного уравнения первого порядка

$$y(n) = \alpha x(n) + (1 - \alpha)y(n - 1); 0 \leq \alpha \leq 1 - \text{параметр сглаживания}$$

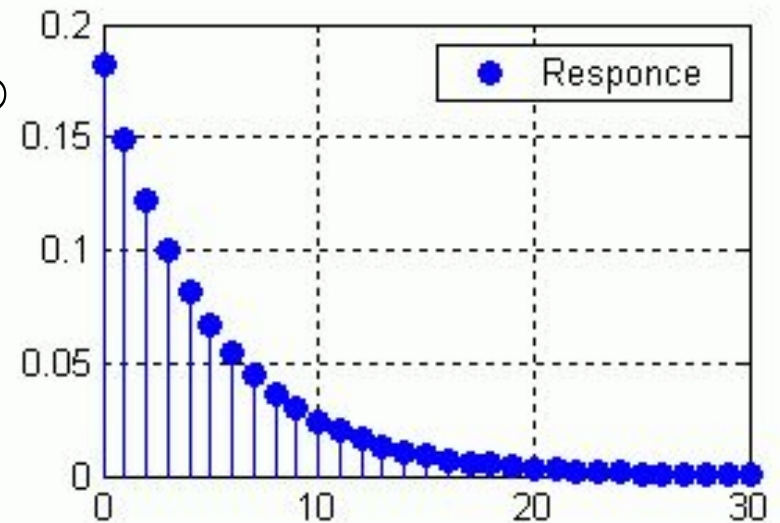
$x(n)$ - текущий отсчет ряда ; $y(n)$ - модель тренда ; ЕМА - БИХ фильтр

$$y(n) = \alpha \sum_{k=0}^{K-1} (1 - \alpha)^k x(n - k) + (1 - \alpha)^K y(0); n \geq K$$

$y(0)$ - начальное значение ЕМА ; $K \rightarrow \infty$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{MA}(k)x(n - k);$$

$$h_{MA}(n) = \begin{cases} \alpha(1 - \alpha)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

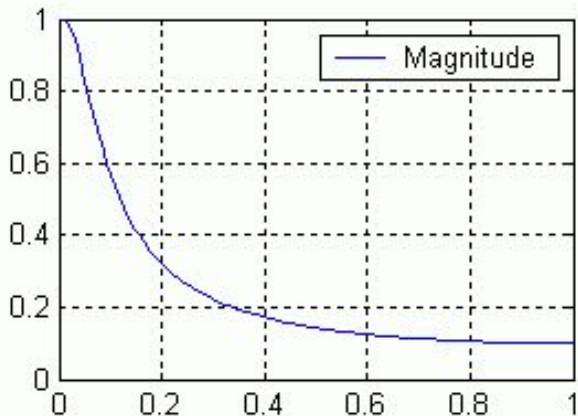


Импульсная характеристика ЕМА

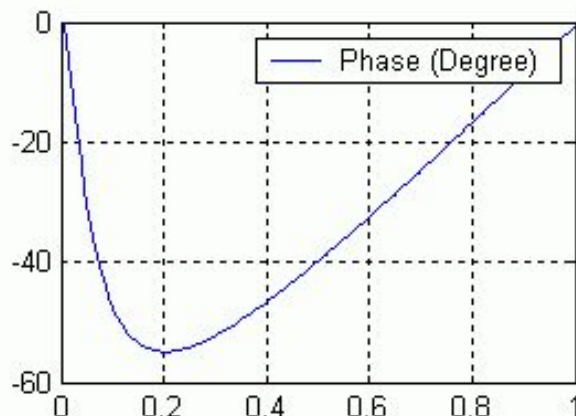
Свойства ЕМА

1. Спектральные : $0 \leq f \Delta t \leq 1$ - нормированная частота

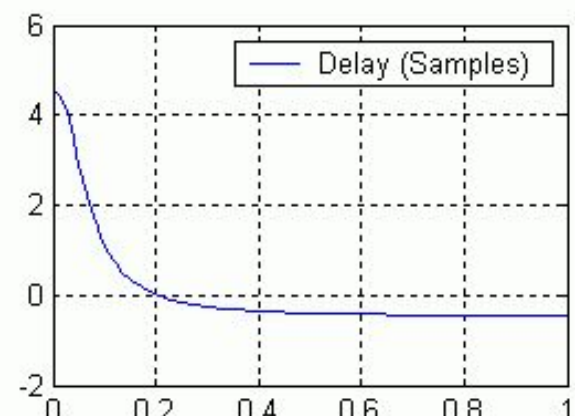
АЧХ



ФЧХ



Запаздывание



2. Целевая функция :

$$\min_{y(n)} \left\{ \alpha (x(n) - y(n))^2 + (1 - \alpha) (y(n) - y(n-1))^2 \right\}$$

3. Оценка запаздывания – способ Эйлера (Ehlers) :

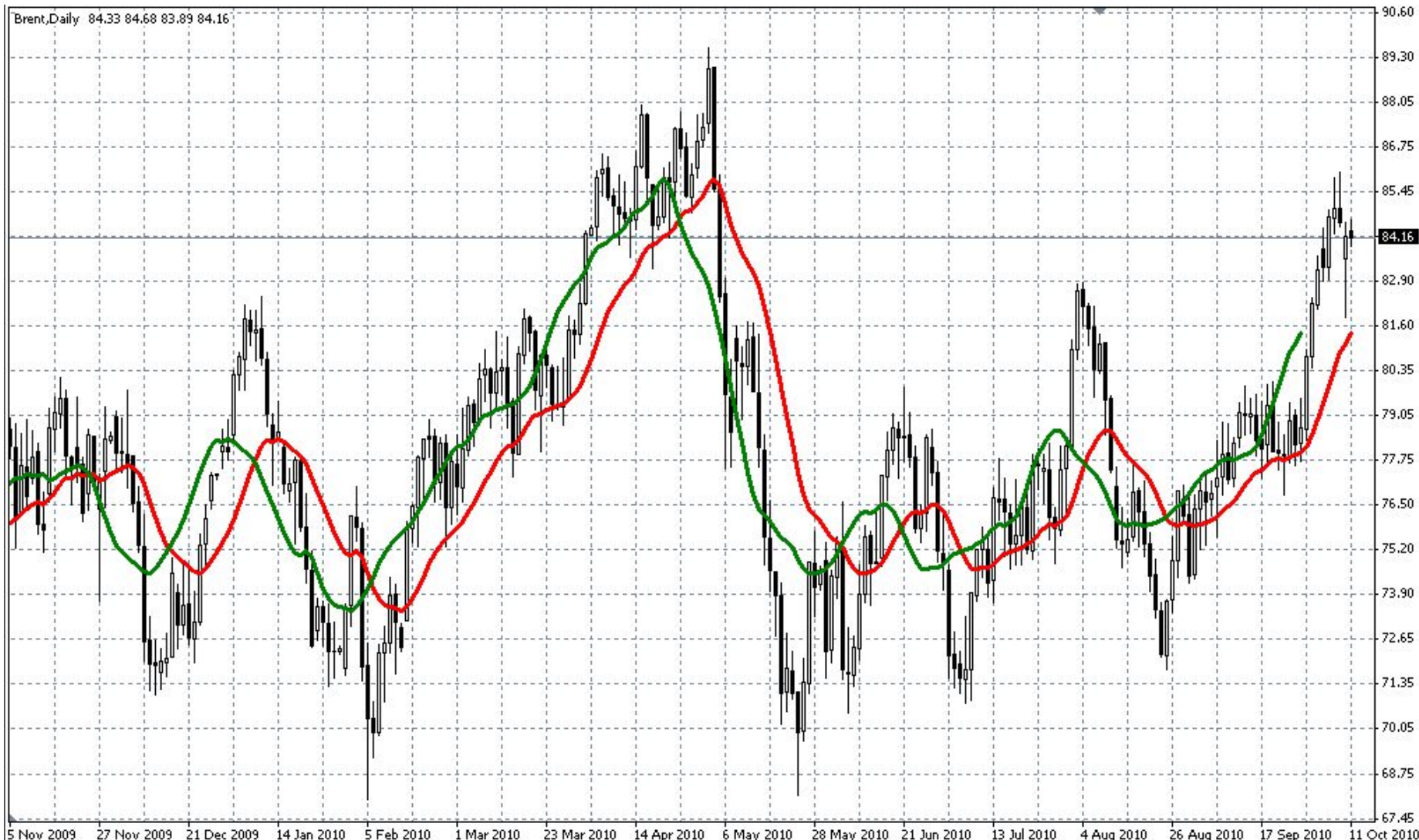
$$y(n) = \alpha x(n) + (1 - \alpha)y(n-1) = Ema(x(n), \alpha); \alpha = 2 / (K + 1)$$

$$n - Lag = \alpha n + (1 - \alpha)(n - 1 - Lag); Lag = \frac{K - 1}{2} = \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

4. Моделирование тренда : $\alpha = 0,1$; $Lag = 9$; $K = 19$

Долговременная память :

$$h_{MA}(0) = 0,1 ; h_{MA}(1) = 0,09 ; h_{MA}(2) = 0,081 ; \dots$$



5. Краткосрочный прогноз : $\alpha = 0,5$; $Lag = 1$; $K = 3$

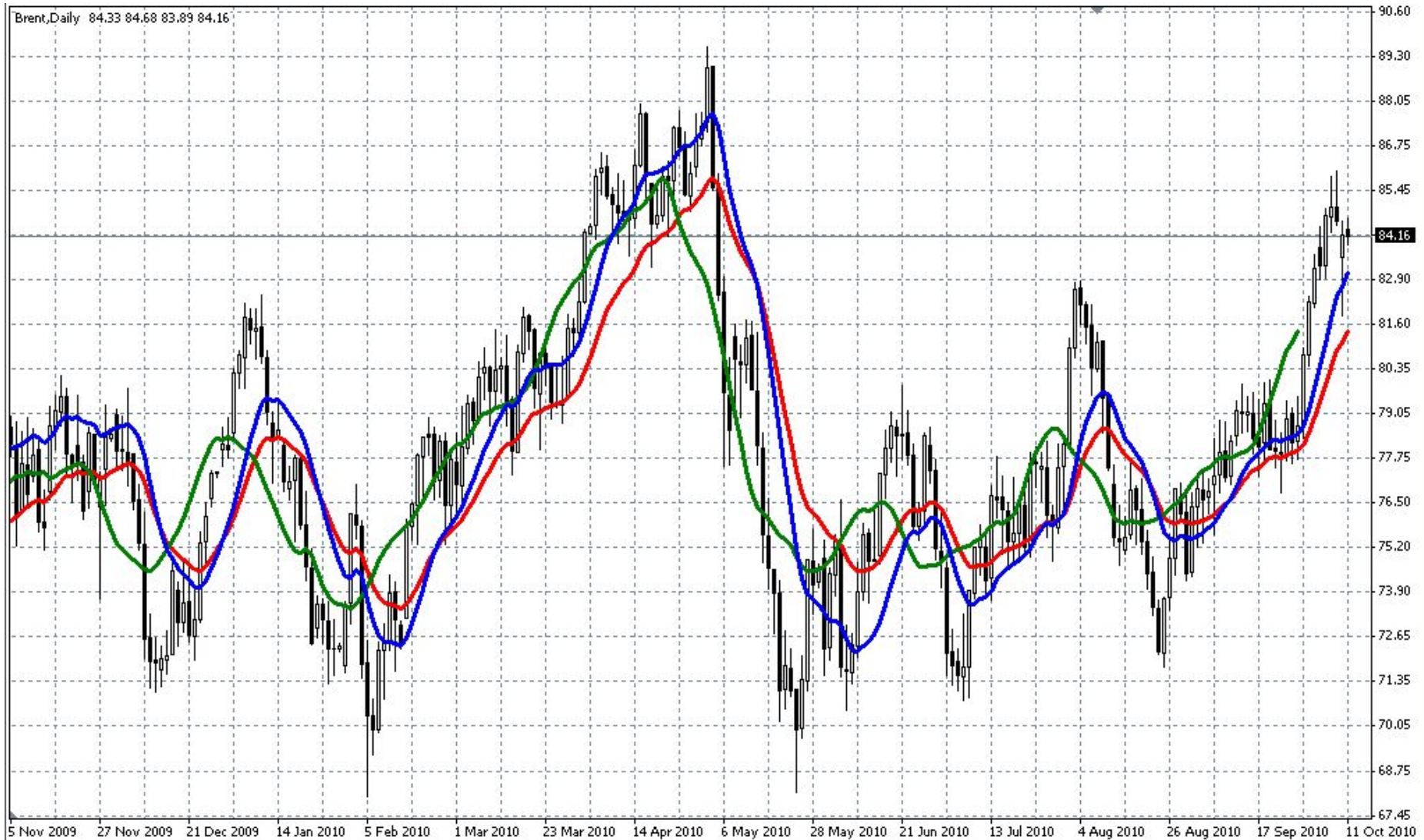
$$h_{MA}(0) = 0,5 ; h_{MA}(1) = 0,25 ; h_{MA}(2) = 0,125 ; \dots$$

$$y(n) = y(n-1) + \alpha \{x(n) - y(n-1)\} - \text{прогнозная форма ЕМА}$$



6. Не запаздывающая модель тренда Эйлера : $\alpha = 0,1$; $Lag \approx 0$; $K = 19$

$$y(n) = 2 Ema(x(n), \alpha) - Ema(x(n), \alpha/2)$$



Модифицированная ЕМА Булашова (МЕМА)

1. Целевая функция :

$$\min_{y(n)} \left\{ \alpha (x(n) - y(n))^2 + \gamma (y(n) - y(n-1))^2 + \right. \\ \left. + \beta (y(n) - 2y(n-1) + y(n-2))^2 \right\}$$

$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ - параметры регуляризации; $\alpha + \beta + \gamma = 1$

$$y(n) = \alpha x(n) + (1 - \alpha)y(n-1) + \beta \{ y(n-1) - y(n-2) \}$$

2. Оценка запаздывания : $n - Lag = \alpha n + (1 - \alpha)(n - 1 - Lag) +$

$$Lag = (1 - \alpha - \beta) / \alpha ; \quad + \beta(n - 1 - Lag - n + 2 + Lag) ;$$

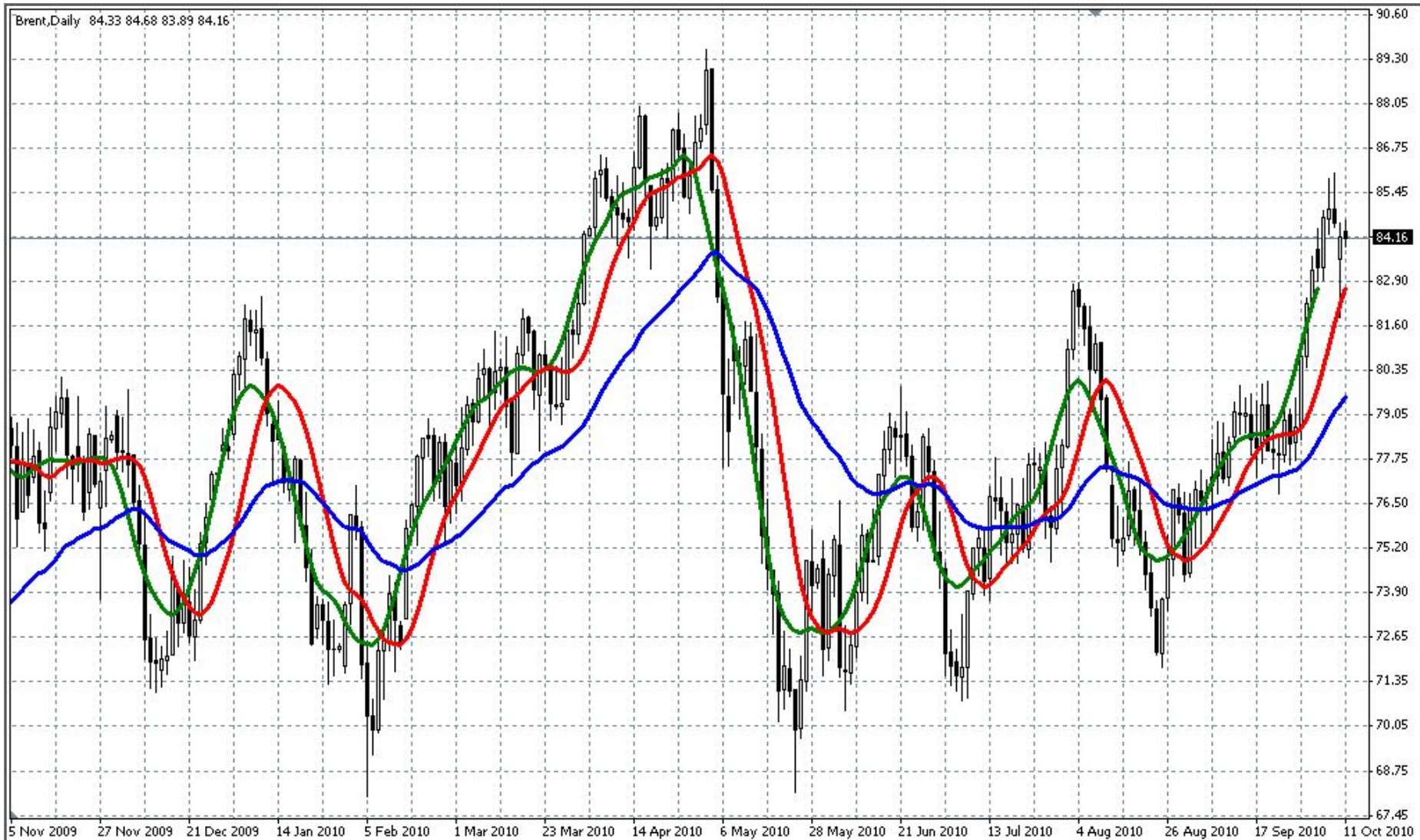
$\alpha + \beta < 1 ; \beta = 1 - \alpha(Lag + 1) \geq 0,5$ - штраф за сложность ;

3. Управляемые параметры МЕМА :

$Lag \leq 9$ - запаздывание относительно ВР ; β - степень гладкости тренда

$\alpha = (1 - \beta) / (Lag + 1) \leq 0,5 / (Lag + 1)$ - параметр сглаживания

4. Моделирование тренда : $Lag = 5 ; \beta = 0,7 \Rightarrow \alpha = 0,05 ; K = 41$



4. Импульсная характеристика МЕМА :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} h_{MA}^{(1)}(k) - \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} h_{MA}^{(2)}(k) \right) x(n - k)$$

МЕМА – двухкомпонентная смесь $Ema(x(n), \alpha_1)$ и $Ema(x(n), \alpha_2)$

$$\alpha_{1,2} = \left(1 + \alpha - \beta \mp \sqrt{(1 - \alpha + \beta)^2 - 4\beta} \right) / 2 ; 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$$

$$h_{MA}^{(1,2)}(n) = \begin{cases} \alpha (1 - \alpha_{1,2})^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Модель линейного темпа изменения рынка Хольта - Брауна

1. Прогноз рынка на один шаг времени (локально линейный тренд) :

$$\tilde{x}_1(n-1) = \tilde{x}(n) = a_1(n-1) + a_2(n-1)$$

$a_1(n-1)$ - среднее значение рынка в момент времени $(n-1)$;

$a_2(n-1)$ - темп изменения рынка в момент времени $(n-1)$;

2. Алгоритм Хольта адаптации параметров локально линейного тренда :

$$a_1(n) = \alpha_1 x(n) + (1 - \alpha_1) \tilde{x}_1(n-1); 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$$

$$a_2(n) = \alpha_2 (a_1(n) - a_1(n-1)) + (1 - \alpha_2) a_2(n-1)$$

3. Алгоритм Хольта в терминах ошибки прогноза рынка на один шаг времени :

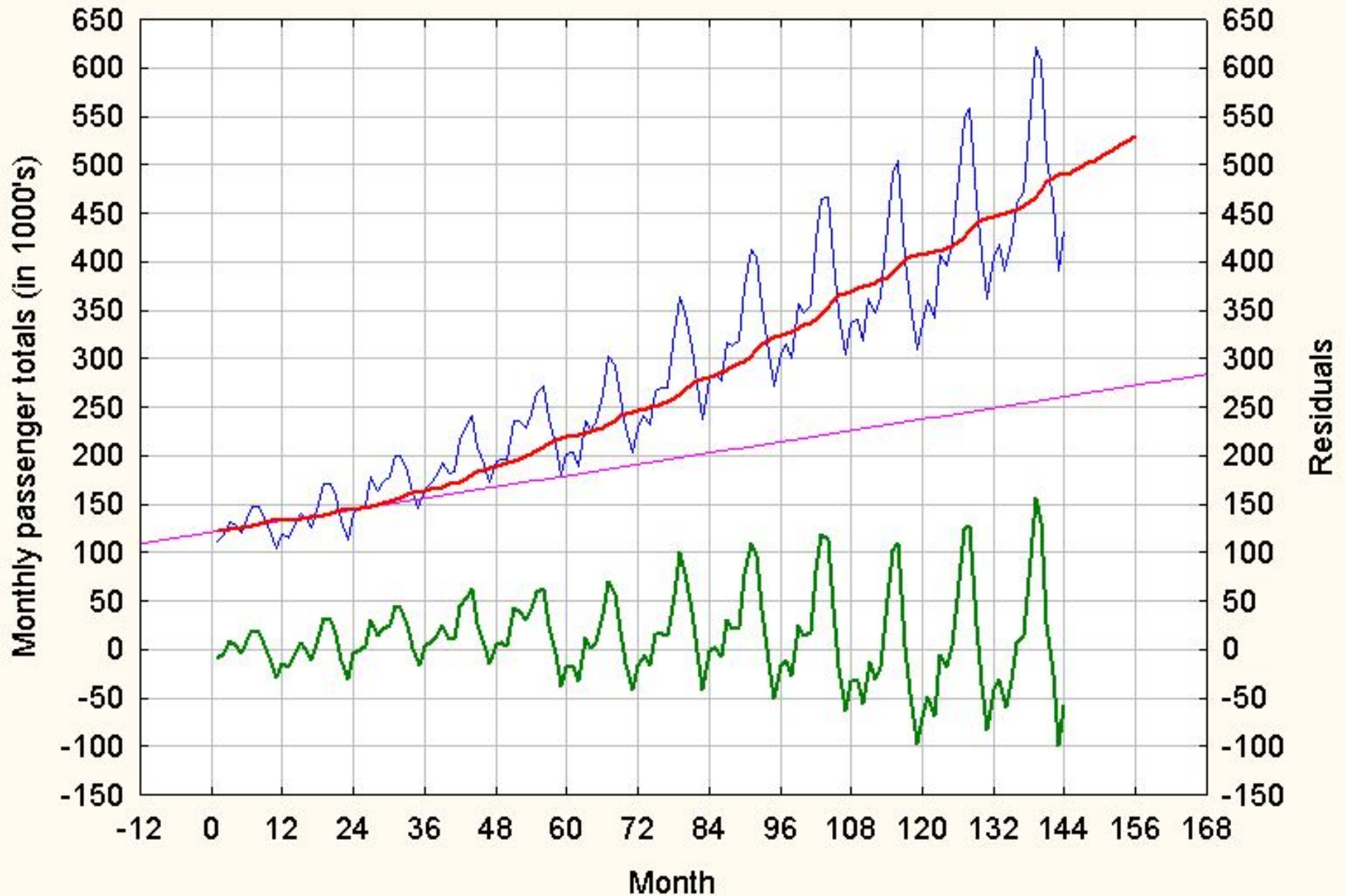
$$e(n) = x(n) - \tilde{x}_1(n-1)$$

$$a_1(n) = a_1(n-1) + a_2(n-1) + \alpha_1 e(n)$$

$$a_2(n) = a_2(n-1) + \alpha_1 \alpha_2 e(n)$$

Time series Holt Resids

TS = $121.0362 + 0.9704 \cdot \text{Month}$; Alpha = 0.03; Gamma = 0.05



4. Алгоритм Брауна в терминах ошибки прогноза рынка на один шаг времени :

$0 < \beta < 1$ - коэффициент дисконтирования, характеризует старение данных за один шаг времени

Шаг 0 : Инициализация. Выбрать параметр сглаживания $0 < \alpha < 1$

и начальные значения : $n = 1 ; \tilde{x}_1(0) ; a_1(0) ; a_2(0)$

Шаг 1 : Вычислить ошибку прогноза рынка на один шаг времени :

$$e(n) = x(n) - \tilde{x}_1(n-1)$$

Шаг 2 : Корректировать среднее значение рынка за один шаг времени :

$$a_1(n) = a_1(n-1) + a_2(n-1) + \alpha e(n)$$

Шаг 3 : Корректировать темп изменения рынка за один шаг времени :

$$a_2(n) = a_2(n-1) + \left(1 - \sqrt{1 - \alpha}\right)^2 e(n)$$

Шаг 4 : Вычислить прогноз рынка на один шаг времени :

$$\tilde{x}_1(n) = a_1(n) + a_2(n)$$

Шаг 5 : Цикл по времени $n = n + 1$. Идти к **Шагу 1**.

5. Адаптация параметра сглаживания по ошибке прогноза рынка

Следящий контрольный сигнал Брауна :

$$C_B(n) = \left(\sum_{k=0}^{K-1} e(n-k) \right) / \text{Ema}(|e(n)|, \gamma); 0 < \gamma < 1$$

Условие адекватности модели исходному ВР : $|C_B(n)| \leq C_{\max}$

Недостатки контрольного сигнала Брауна :

1. может не вернуться в допустимые пределы, даже если модель будет вновь адекватна исходному ВР;
2. может превышать допустимые пределы, а модель формирует достаточно точный прогноз.

Следящий контрольный сигнал Тригга :

$$C_T(n) = \text{Ema}(e(n), \gamma) / \text{Ema}(|e(n)|, \gamma); |C_T(n)| \leq 1$$

Условие адекватности модели исходному ВР :

$$P\{|C_T(n)| \leq C_{\max}\} = 0,95; C_{\max} = 2,4 \sqrt{\gamma / (2 - \gamma)}$$

Модель Брауна адаптации параметра сглаживания : $\alpha(n) = |C_T(n)|$

6. Функция распределения контрольного сигнала Тригга для однократного экспоненциального сглаживания :

Вероятность $P(C_T < C_{\max})$	Порог адекватности модели C_{\max}				
	$\gamma = 0,1$	$\gamma = 0,2$	$\gamma = 0,3$	$\gamma = 0,4$	$\gamma = 0,5$
0,70	0,24	0,33	0,44	0,53	0,64
0,80	0,29	0,40	0,52	0,62	0,73
0,85	0,32	0,45	0,57	0,67	0,77
0,90	0,35	0,50	0,63	0,72	0,82
0,95	0,42	0,58	0,71	0,80	0,88
0,96	0,43	0,60	0,73	0,82	0,89
0,97	0,45	0,62	0,76	0,84	0,90
0,98	0,48	0,66	0,79	0,87	0,92
0,99	0,53	0,71	0,82	0,92	0,94

7. Практическая модель адаптации параметра сглаживания :

$$\alpha(n) = \begin{cases} \alpha_{\min} & , \alpha_{\min} > |C_T(n)| \\ |C_T(n)| & , \alpha_{\min} \leq |C_T(n)| \leq \alpha_{\max} \\ \alpha_{\max} & , \alpha_{\max} < |C_T(n)| \end{cases}$$

8. Индикатор Брауна – Кауфмана :



Сезонные модели экспоненциального сглаживания

Аддитивный сезонный цикл Тейла – Вейджа

1. Прогноз рынка на один шаг времени :

$$\tilde{x}(n) = \tilde{a}(n) + c(n - T + 1); \tilde{a}(n) = a_1(n - 1) + a_2(n - 1)$$

$a_1(n - 1)$ - среднее значение рынка в момент времени $(n - 1)$;

$a_2(n - 1)$ - темп изменения рынка в момент времени $(n - 1)$;

$c(n - T)$ - значение рыночного цикла в момент времени $(n - T)$;

2. Алгоритм Тейла – Вейджа (ТВ) адаптации параметров сезонного цикла :

$$a_1(n) = \alpha_1 (x(n) - c(n - T)) + (1 - \alpha_1) \tilde{a}(n)$$

$$a_2(n) = \alpha_2 (a_1(n) - a_1(n - 1)) + (1 - \alpha_2) a_2(n - 1)$$

$$c(n) = \alpha_3 (x(n) - a_1(n)) + (1 - \alpha_3) c(n - T)$$

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < 1$$

3. Алгоритм ТВ в терминах ошибки прогноза рынка на один шаг времени :

Шаг 0 : Инициализация. Выбрать параметры сглаживания

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$$

и начальные значения :

$$n = T; \tilde{x}(T); a_1(T-1); a_2(T-1); c(k), k = \overline{0; (T-1)}$$

Шаг 1 : Вычислить прогноз рынка на один шаг времени :

$$\tilde{x}(n) = a_1(n-1) + a_2(n-1) + c(n-T)$$

Шаг 2 : Вычислить ошибку прогноза рынка на один шаг времени :

$$e(n) = x(n) - \tilde{x}(n)$$

Шаг 3 : Корректировать среднее значение рынка за один шаг времени :

$$a_1(n) = a_1(n-1) + a_2(n-1) + \alpha_1 e(n)$$

Шаг 4 : Корректировать темп изменения рынка за один шаг времени :

$$a_2(n) = a_2(n-1) + \alpha_1 \alpha_2 e(n)$$

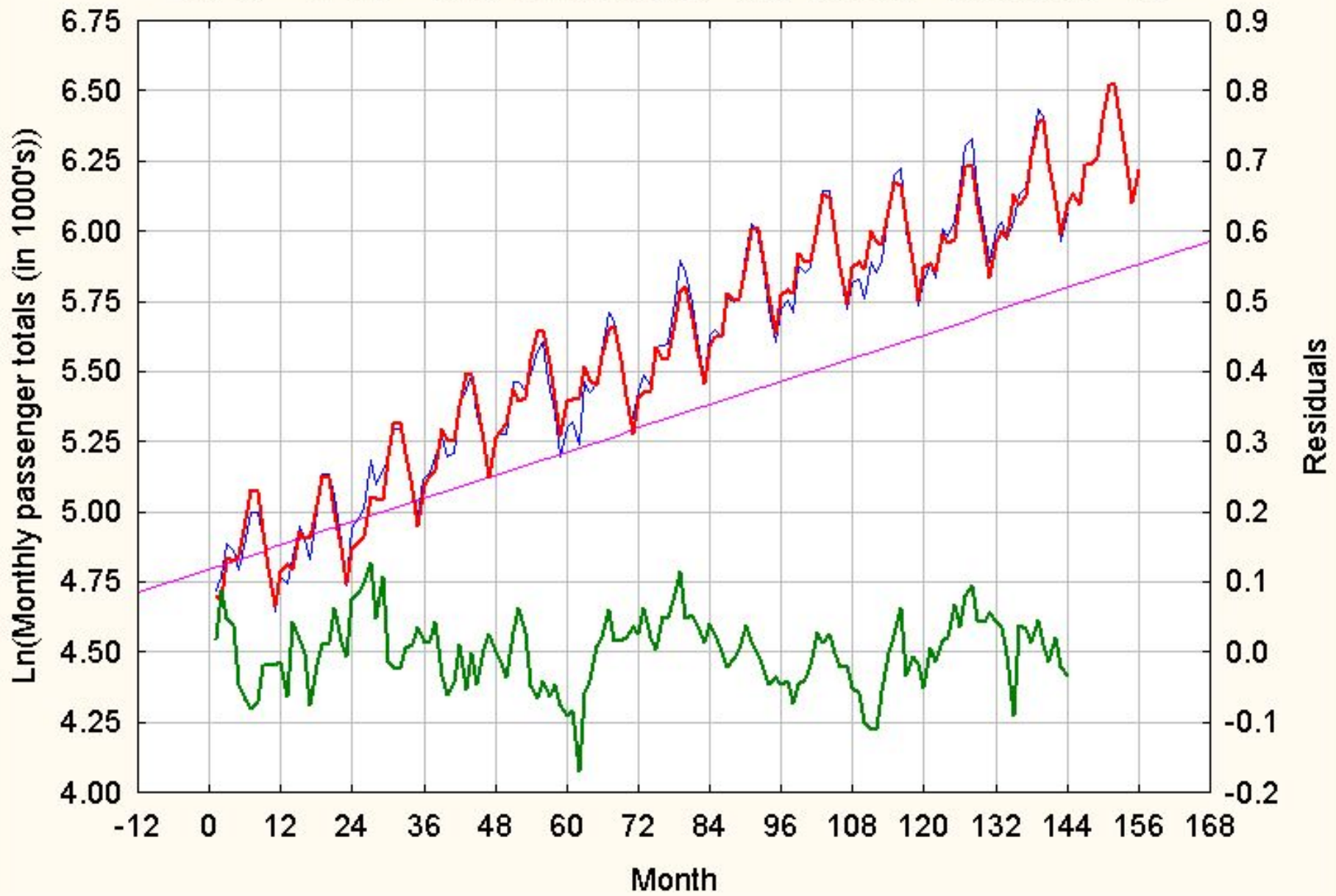
Шаг 5 : Корректировать сезонный цикл за один шаг времени :

$$c(n) = c(n-T) + \alpha_3 (1 - \alpha_1) e(n)$$

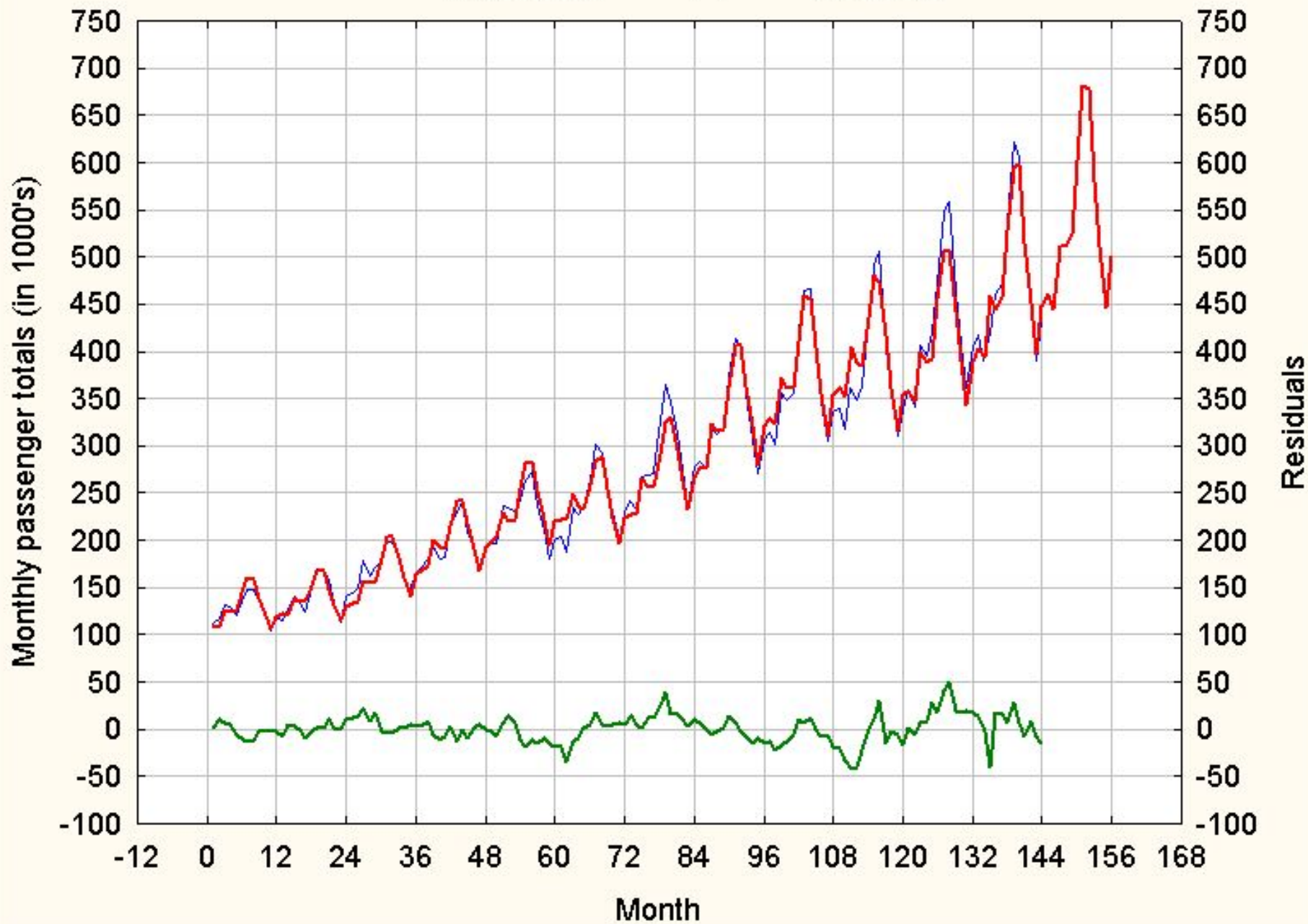
Шаг 6 : Цикл по времени $n = n + 1$. Идти к **Шагу 1**.

Ln(TS) TV Resids

$$\text{Ln(TS)} = 4.7966 + 0.007 \cdot \text{Month}; \text{Alpha} = 0.1; \text{Gamma} = 0.15; \text{Delta} = 0.2$$



— Time series — TV — Residuals



Мультипликативный сезонный цикл Винтерса

1. Прогноз рынка на один шаг времени :

$$\tilde{x}(n) = \tilde{a}(n)c(n - T + 1); \tilde{a}(n) = a_1(n - 1) + a_2(n - 1)$$

$a_1(n - 1)$ - среднее значение огибающей в момент времени $(n - 1)$;

$a_2(n - 1)$ - темп изменения рынка в момент времени $(n - 1)$;

$c(n - T)$ - значение рыночного цикла в момент времени $(n - T)$;

2. Алгоритм Винтерса адаптации параметров сезонного цикла :

$$a_1(n) = (\alpha_1 x(n) / c(n - T)) + (1 - \alpha_1) \tilde{a}(n)$$

$$a_2(n) = \alpha_2 (a_1(n) - a_1(n - 1)) + (1 - \alpha_2) a_2(n - 1)$$

$$c(n) = (\alpha_3 x(n) / a_1(n)) + (1 - \alpha_3) c(n - T)$$

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < 1$$

3. Алгоритм Винтерса в терминах ошибки прогноза рынка на один шаг времени :