

Занятие 1. ЕГЭ 11 - I

Целые уравнения – 2. Уравнения с модулем.

Угол между прямыми в пространстве.

Основные факты о модуле:

1. $|a| = a$, если $a \geq 0$;

$|a| = -a$, если $a < 0$

2. $|a - b|$ Геометрический смысл
модуля

3. $|-a| = |a|$.

4. $|ab| = |a||b|$; $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Основные факты о модуле:

$$5. |a|^2 = a^2.$$

$$6. |a| = |b| \iff \begin{cases} a = b, \\ a = -b. \end{cases}$$

Основные факты о модуле:

$$7. |a| = b \iff \begin{cases} b \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} a = b, \\ a = -b. \end{array} \right. \end{cases}$$

$$8. |a| + |b| \geq |a + b|,$$

$$\text{причем } |a| + |b| = |a + b| \iff ab \geq 0.$$

Равносильные преобразования:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f^2(x) = g^2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array} \right], \end{cases}$$

$$|5x - 7| = 7 - 5x$$

$$|7y + 3| = -3 - 7y.$$

$$|x^3 + x - 1| = x + 1.$$

$$|f(x)| = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq 0,$$

$$|f(x)| = -f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq 0.$$

Равносильные преобразования:

$$|p(x)| = |q(x)| \Leftrightarrow p^2(x) = q^2(x) \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) = q(x), \\ p(x) = -q(x). \end{cases}$$

$$|x^2 - 3| = |x^2 - 5|$$

$$||3 - 2x| - 1| = 2|x|.$$

Равносильные преобразования:

$$|a| + |b| \geq |a + b|$$

$$|a| + |b| = |a + b| \Leftrightarrow ab \geq 0.$$

Решите уравнение $|x^2 - 9| + |x + 3| = x^2 + x - 6$.

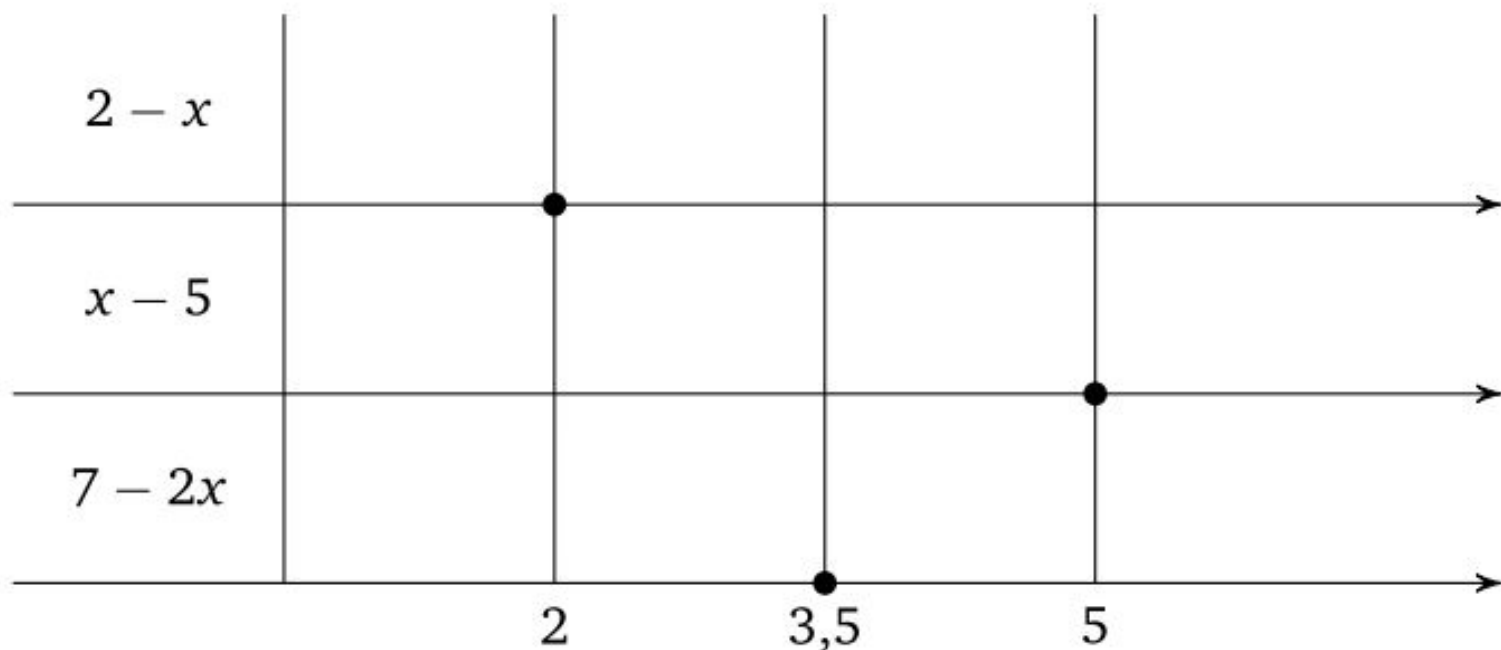
Замена переменной:

$$|a|^2 = a^2$$

$$(x - 1)^2 - 3|x - 1| - 4 = 0.$$

Метод промежутков (интервалов):

$$|2 - x| - |x - 5| = x + 1 - |7 - 2x|.$$



Геометрический смысл модуля:

$$|x - 1| + |x - 7| = 24.$$

$$|x^2 - x - 5| + |x^2 - x - 9| = 10.$$

Задачи для тренировки:

Тренировочная работа 2

Решите уравнение.

1. $|5x - 3| + |3x - 5| = 9x - 10$.

2. $|2x - 1| - |3x - 2| - |4x - 3| + 11 = 10x$.

3. $|x^2 - 6x + 1| = x^2 - 9$.

4. $|x^3 + 5x - 4| = 5x + 4$.

5. $2(x - 3)^2 - 5|x - 3| + 2 = 0$.

6. $5(2x - 1)^2 - 7|2x - 1| - 6 = 0$.

7. $||5x - 1| - 2| - 3| = 4$.

8. $|x^2 - 10| = |x^2 - 22|$.

9. $|x^2 - x - 5| + |x^2 - x - 9| = 10$.

10. $|x^2 + 3x - 4| + |x^2 + 3x - 28| = 24$.

11. $|x^2 - 16| + |x + 4| = x^2 + x - 12$.

12. $|x^2 + x - 20| + |x^2 - 11x - 28| = 2|x^2 - 5x - 24|$.

- Выполнять на
25.10 группе
2019-2020 уч. года

Тренировочная работа 2

1. 2. 2.1. 3. 4. 4.0; 2. 5. 1; 2,5; 3,5; 5. 6. -0,5; 1,5. 7. -1,6; 2. 8. -4;
4. 9. -3; -1; 2; 4. 10. $[-7; -4] \cup [1; 4]$. 11. $\{-3\} \cup [3; +\infty)$. 12. $(-\infty; -5] \cup$
 $\cup \left[\frac{11 - \sqrt{233}}{2}; 4 \right] \cup \left[\frac{11 + \sqrt{233}}{2}; +\infty \right)$.

3.1. $x \geq -2$.

3.2. $x = -\frac{4}{3}$.

3.3. $x = -\frac{13}{4}, x = \frac{9}{2}$.

3.4. $x = -4, x = 4$.

3.5. $x \leq \frac{5}{2}$.

3.6. $x = -2, x = 2$.

3.7. $x = -1, x = 11$.

3.8. $x = -3, x = -4$.

3.9. $x = -4, x = -1$.

3.10. $x = -1, x = 1$.

Дополнительные задания:

3.1. $|x + 2| = x + 2$.

3.3. $|3x + 2| = x + 11$.

3.5. $|2x - 5| = 5 - 2x$.

3.7. $(x - 5)^2 - |x - 5| = 30$.

3.9. $3|x + 2| + x^2 + 6x + 2 = 0$.

3.11. $|x - 4| = |5 - 2x|$.

3.13. $|2x - 8| - |x + 5| = 12$.

3.15. $|5x + 3| + |2x + 1| = |7x + 4|$.

3.17. $2|x - 6| - |x| + |x + 6| = 18$.

3.19. $|2x + 15| = 22 - |2x - 7|$.

3.2. $|x - 2| = 2(3 + x)$.

3.4. $|1 - x^2| = 15$.

3.6. $x^2 + |x| - 6 = 0$.

3.8. $x^2 + 6x + 8 + |x + 4| = 0$.

3.10. $|1 - 5x^2| = 4$.

3.12. $|x^2 + 13x + 35| = |35 - x^2|$.

3.14. $|x| - |x + 2| = 2$.

3.16. $|x| - 2|x - 1| + 3|x - 2| = 0$.

3.18. $||x + 1| + 2| - 1| + 1| = 2$.

3.20. $|x^2 + 2x - 1| = \frac{1 - 5x}{3}$.

Ответы для самопроверки:

3.11. $x = 1, x = 3$.

3.12. $x = -\frac{70}{13}, x = -\frac{13}{2}, x = 0$.

3.13. $x = -3, x = 25$.

3.14. $x \leq -2$.

3.15. $-\frac{4}{7} \leq x$.

3.16. $x = 2$.

3.17. $-6 \leq x \leq 0, x = 12$.

3.18. $x = -1$.

3.19. $-\frac{15}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$.

3.20. $x = -4, x = -1$.

Задания для тренировки:

2.2. Точка K лежит на ребре AD треугольной пирамиды $ABCD$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью α , проходящей через точку K параллельно рёбрам AB и CD .

б) Пусть M — точка пересечения плоскости α с ребром BC . Найдите угол между прямыми AB и CD , если K — середина ребра AD , $AB = 8$, $CD = 6$, $KM = 5$.

2.4. Точка G лежит на боковом ребре SC правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ с вершиной S .

а) Постройте точку пересечения прямой BG с плоскостью боковой грани ESF .

б) Найдите угол между прямыми BG и AD , если стороны основания пирамиды равны 6, боковые рёбра равны $3\sqrt{13}$, а $SG : GC = 1 : 2$.

14. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро вдвое больше стороны основания.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SE и вершину C , делит ребро SB в отношении $1 : 3$, считая от вершины B .

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SE и вершину C , делит ребро SF , считая от вершины S .

Угол между прямыми в пространстве

2.1. Дана треугольная пирамида $ABCD$.

а) Постройте её сечение плоскостью, проходящей через середину ребра AB параллельно рёбрам AD и BC .

б) Найдите угол между прямыми AD и BC , если $AD = 24$, $BC = 10$, а расстояние между серединами рёбер BD и AC равно 13.

2.3. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M — середина бокового ребра SC .

а) Постройте точку пересечения прямой BM с плоскостью грани ESF .

б) Найдите угол между прямыми BM и DE .

Угол между прямыми в пространстве

2.6. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C . Точка M — середина ребра AB . Известно, что $AB = 2AA_1$.

- а) Докажите, что прямые A_1C и MB_1 перпендикулярны.
- б) Найдите угол между прямыми AC_1 и MB_1 .

Задания для тренировки:

2.2. Точка K лежит на ребре AD треугольной пирамиды $ABCD$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью α , проходящей через точку K параллельно рёбрам AB и CD .

б) Пусть M — точка пересечения плоскости α с ребром BC . Найдите угол между прямыми AB и CD , если K — середина ребра AD , $AB = 8$, $CD = 6$, $KM = 5$.

2.4. Точка G лежит на боковом ребре SC правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ с вершиной S .

а) Постройте точку пересечения прямой BG с плоскостью боковой грани ESF .

б) Найдите угол между прямыми BG и AD , если стороны основания пирамиды равны 6, боковые рёбра равны $3\sqrt{13}$, а $SG : GC = 1 : 2$.

2.5. Основания призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равносторонние треугольники. Точки M и M_1 — центры оснований ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно.

а) Докажите, что угол между прямыми BM и C_1M_1 равен 60° .

б) Найдите угол между прямыми BM_1 и C_1M , если призма прямая и $AB : AA_1 = 3 : 2$.