Лекция 2. Основные операции над множествами

1. Операции над множествами. Круги Эйлера

Объединение (сумма) двух множеств $A \cup B$ – это множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств:

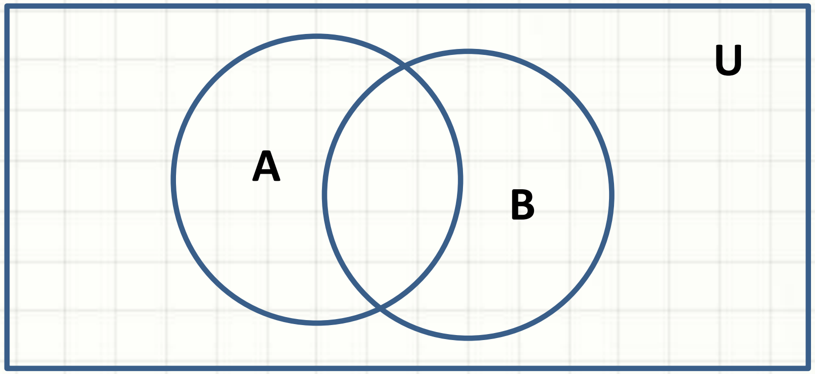
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$

$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ или } x \in B$

$x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A, x \notin B$

Свойства:

$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$



1. Операции над множествами. Круги Эйлера

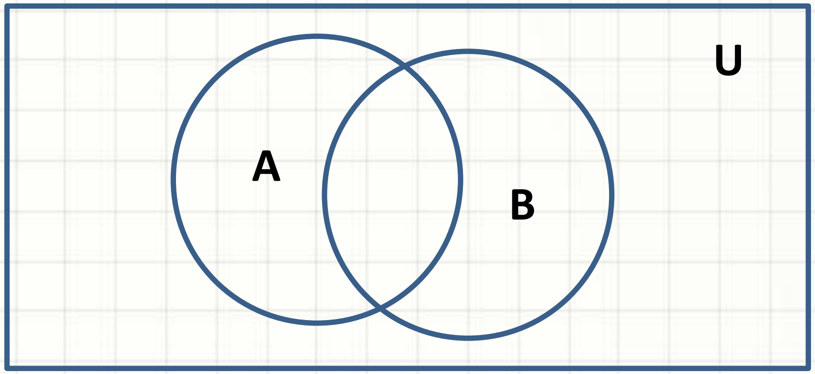
Пересечение (сумма) двух множеств $A \cap B$ (AB) – это множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат обоим множествам:

$AB = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$

$x \in AB \Rightarrow x \in A \text{ и } x \in B$

$x \notin AB \Rightarrow x \notin A \text{ или } x \notin B.$

Два множества называются непересекающимися, если $AB = \varnothing$.



1. Операции над множествами. Круги Эйлера

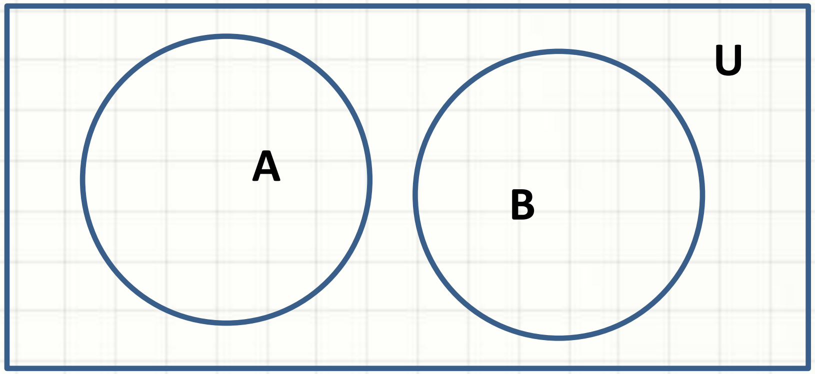
Пересечение (сумма) двух множеств $A \cap B$ (AB) – это множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат обоим множествам:

$AB = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$

$x \in AB \Rightarrow x \in A$ и $x \in B$

$x \notin AB \Rightarrow x \notin A$ или $x \notin B$.

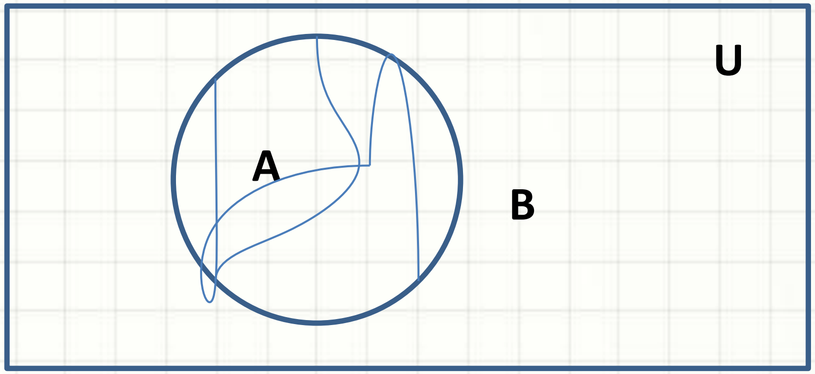
Два множества называются непересекающимися, если $AB = \varnothing$.



1. Операции над множествами. Круги Эйлера

- Пусть ε={E_i}, $E_i \subseteq A$ – семейство множеств E_i, каждое из которых включено в множество A. Если всякий элемент множества A входит хотя бы в одно множество семейства E_i ($A = \bigcup_i E_i$), то это семейство называется покрытием множества A.

Покрытие ε называется разбиением множества A, если всякий элемент множества A принадлежит ровно одному множеству семейства ε: $A = \bigcup_i E_i$ и $E_i \cap E_i = \emptyset$ при $i \neq j$.



1. Операции над множествами. Круги Эйлера

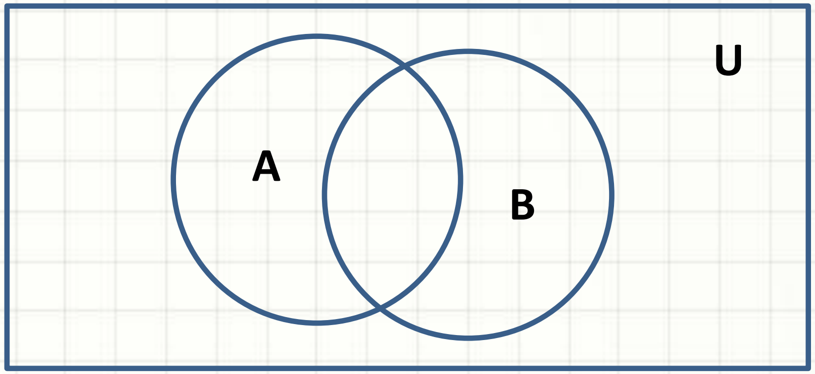
Разность двух множеств A\B – это множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат
множеству A и не принадлежат множеству B:

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$

$x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A \text{ и } x \notin B$

$x \notin A \setminus B \Rightarrow x \notin A \text{ или } x \notin B.$

Свойства: $A \setminus B \neq B \setminus A$



1. Операции над множествами. Круги Эйлера

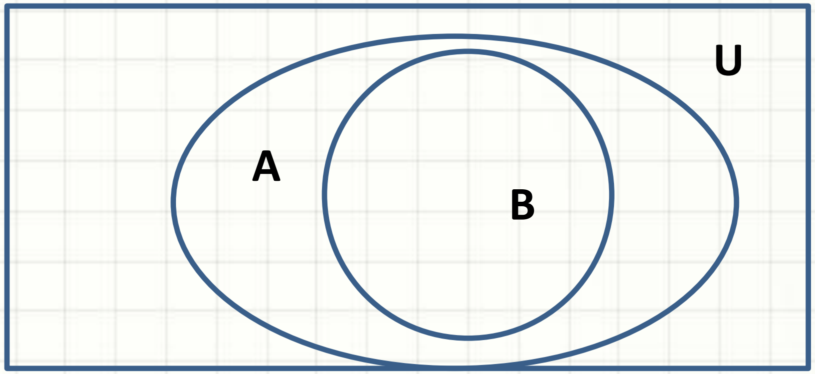
Разность двух множеств A\B – это множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат
множеству A и не принадлежат множеству B:

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$

$x \notin A \setminus B \Rightarrow x \notin A$ или $x \notin B$.

Свойства:

$A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow AB = A.$



1. Операции над множествами. Круги Эйлера

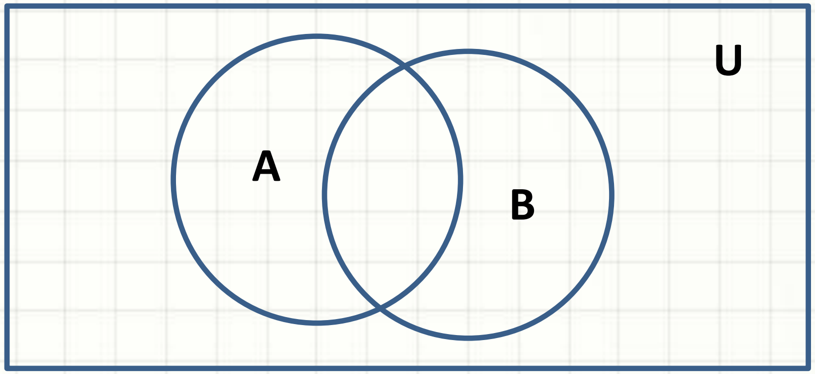
Симметрическая разность двух множеств $A\Delta B$ – это множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат ровно одному из данных множеств:

$A\Delta B=\{x \mid (x\in A,\ x\notin B)$ или $(x\notin A,\ x\in B)\}$

$x\in A\Delta B \Rightarrow (x\in A,\ x\notin B)$ или $(x\notin A,\ x\in B)\}$

$x\notin A\Delta B \Rightarrow (x\in A,\ x\in B)$ или $(x\notin A,\ x\notin B)\}$

Свойства: $A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=(A\cup B)\backslash AB$



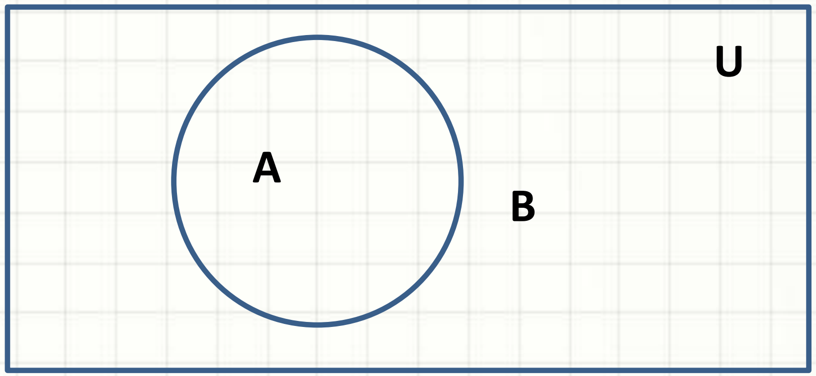
1. Операции над множествами. Круги Эйлера

Дополнение $\bar{A}$ множества A до универсума – это множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые не принадлежат множеству A:

$\bar{A}=\{x \mid x \notin A\}$

$x \in \bar{A} \Rightarrow x \notin A$

$\bar{A} = U \setminus A$



1. Операции над множествами. Круги Эйлера

- **Утверждение.** $A \backslash B = A\bar{B}$

Доказательство: условие равенства двух множеств $X=Y \Leftrightarrow X \subseteq Y,\ Y \subseteq X$.

Пусть $x \in A \backslash B \Rightarrow x \in A,\ x \notin B \Rightarrow x \in A,\ x \in \bar{B} \Rightarrow x \in A\bar{B} \Rightarrow A \backslash B \subseteq A\bar{B}$.

Пусть $x \in A\bar{B} \Rightarrow x \in A,\ x \in \bar{B} \Rightarrow x \in A,\ x \notin B \Rightarrow x \in A \backslash B \Rightarrow A\bar{B} \subseteq A \backslash B$.

$A \backslash B \subseteq A\bar{B},\ A\bar{B} \subseteq A \backslash B \Rightarrow A \backslash B = A\bar{B}$.

2. Свойства операций над множествами

1. Идемпотентность

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

2. Коммутативность

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

3. Ассоциативность

$$A \cup (B \cup \mathrm{C}) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap \mathrm{C}) = (A \cap B) \cap C$$

4. Дистрибутивность

$$A \cup (B \cap \mathrm{C}) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup \mathrm{C}) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

2. Свойства операций над множествами

5. Законы поглощения

$$(A \cup B) \cap A = A$$

$$(A \cap B) \cup A = A$$

6. Свойства нуля

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\overline{\emptyset} = U$$

7. Свойства единицы

$$A \cup U = U$$

$$A \cap U = A$$

$$\overline{U} = \emptyset$$

2. Свойства операций над множествами

8. Инволютивность

$$\bar{\bar{A}} = A$$

9. Законы де Моргана

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

10. Свойства дополнения

$$A \cup \bar{A} = U$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

Вопросы?