

Лекция 2. Основные операции над множествами

1. Операции над множествами. Круги Эйлера

Объединение (сумма) двух множеств $A \cup B$ – это множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств:

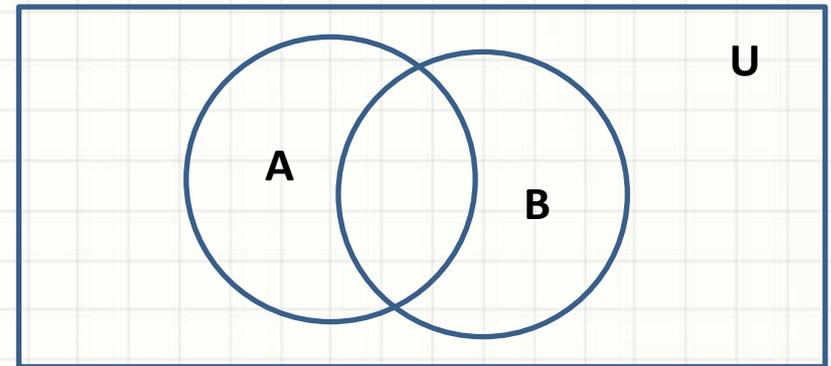
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ или } x \in B$$

$$x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A, x \notin B$$

Свойства:

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$$



1. Операции над множествами. Круги Эйлера

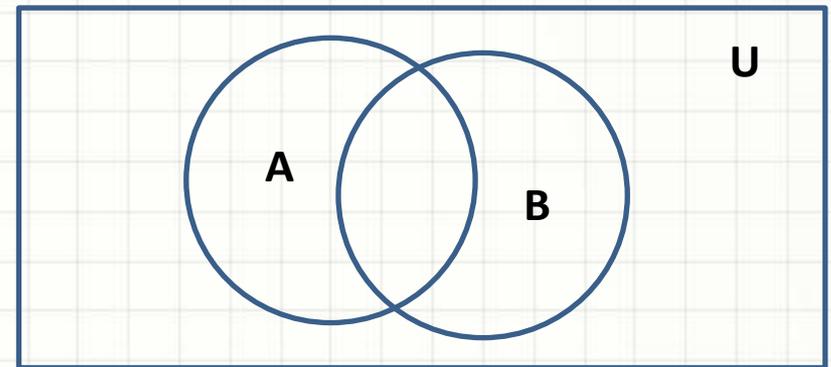
Пересечение (сумма) двух множеств $A \cap B$ (AB) – это множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат обоим множествам:

$$AB = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

$$x \in AB \Rightarrow x \in A \text{ и } x \in B$$

$$x \notin AB \Rightarrow x \notin A \text{ или } x \notin B.$$

Два множества называются **непересекающимися**, если $AB = \emptyset$.



1. Операции над множествами. Круги Эйлера

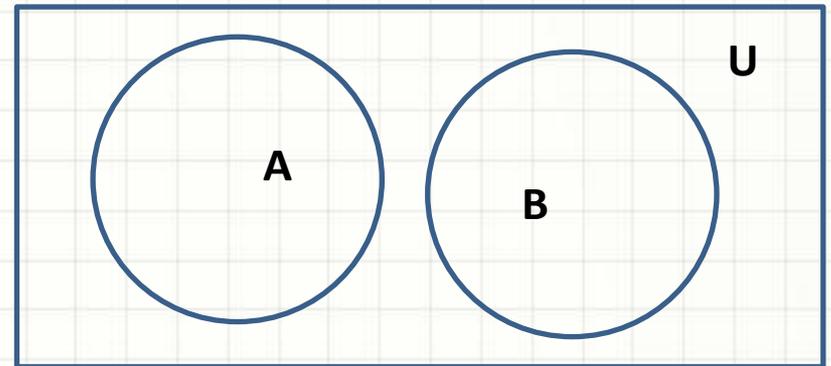
Пересечение (сумма) двух множеств $A \cap B$ (AB) – это множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат обоим множествам:

$$AB = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

$$x \in AB \Rightarrow x \in A \text{ и } x \in B$$

$$x \notin AB \Rightarrow x \notin A \text{ или } x \notin B.$$

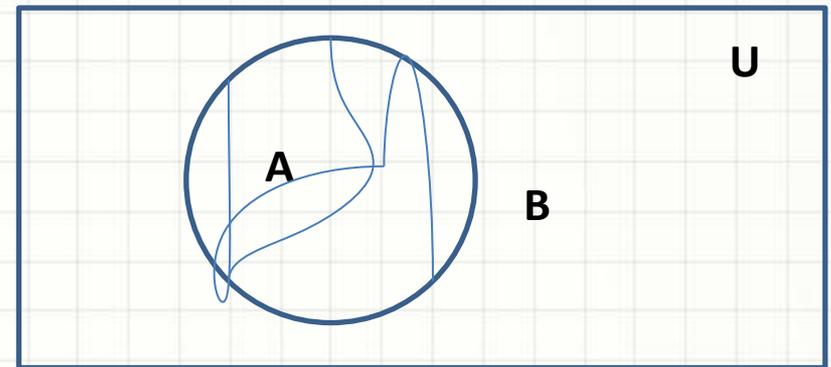
Два множества называются **непересекающимися**, если $AB = \emptyset$.



1. Операции над множествами. Круги Эйлера

Пусть $\varepsilon = \{E_i\}$, $E_i \subseteq A$ – семейство множеств E_i , каждое из которых включено в множество A . Если всякий элемент множества A входит хотя бы в одно множество семейства E_i ($A = \bigcup_i E_i$), то это семейство называется покрытием множества A .

Покрытие ε называется разбиением множества A , если всякий элемент множества A принадлежит ровно одному множеству семейства ε : $A = \bigcup_i E_i$ и $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$.



1. Операции над множествами. Круги Эйлера

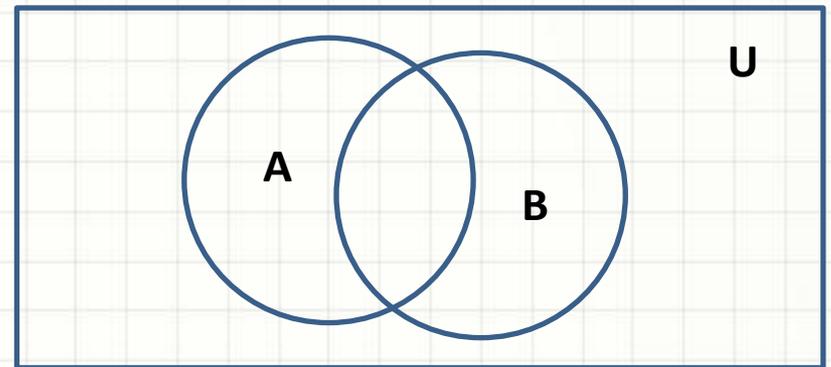
Разность двух множеств $A \setminus B$ – это множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

$$x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A \text{ и } x \notin B$$

$$x \notin A \setminus B \Rightarrow x \notin A \text{ или } x \in B.$$

Свойства: $A \setminus B \neq B \setminus A$



1. Операции над множествами. Круги Эйлера

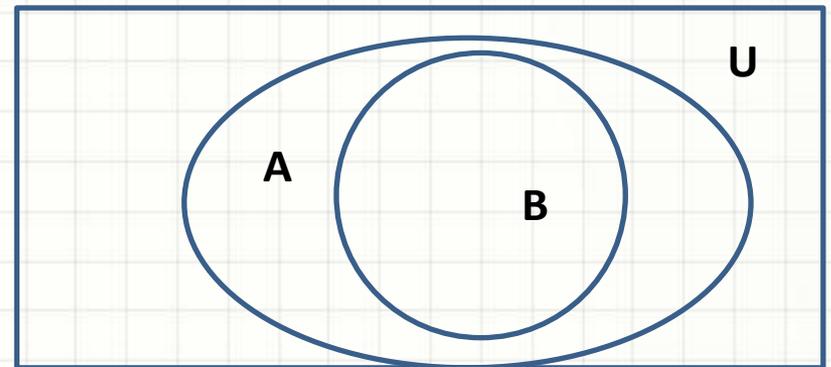
Разность двух множеств $A \setminus B$ – это множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

$$x \notin A \setminus B \Rightarrow x \notin A \text{ или } x \in B.$$

Свойства:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow AB = A.$$



1. Операции над множествами. Круги Эйлера

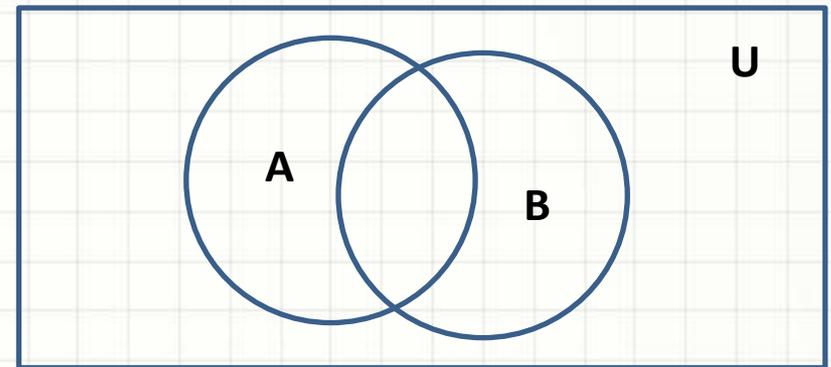
Симметрическая разность двух множеств $A \Delta B$ – это множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат ровно одному из данных множеств:

$$A \Delta B = \{x \mid (x \in A, x \notin B) \text{ или } (x \notin A, x \in B)\}$$

$$x \in A \Delta B \Rightarrow (x \in A, x \notin B) \text{ или } (x \notin A, x \in B)$$

$$x \notin A \Delta B \Rightarrow (x \in A, x \in B) \text{ или } (x \notin A, x \notin B)$$

$$\text{Свойства: } A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus AB$$



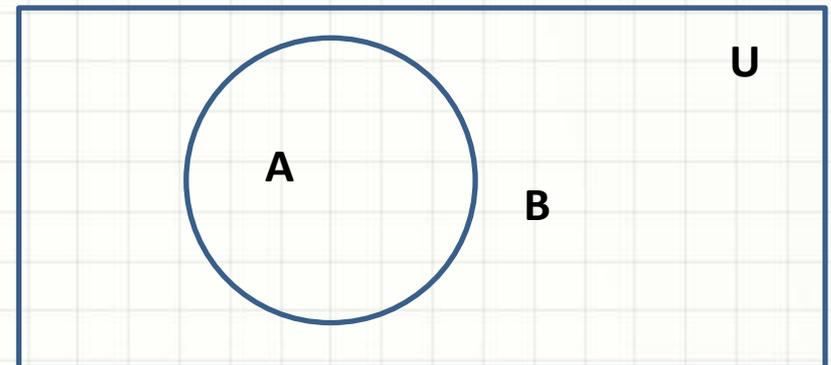
1. Операции над множествами. Круги Эйлера

Дополнение \bar{A} множества A до универсума – это множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые не принадлежат множеству A :

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

$$x \in \bar{A} \Rightarrow x \notin A$$

$$\bar{A} = U \setminus A$$



1. Операции над множествами. Круги Эйлера

Утверждение. $A \setminus B = A\bar{B}$

Доказательство: условие равенства двух множеств $X=Y \Leftrightarrow X \subseteq Y, Y \subseteq X$.

Пусть $x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A, x \notin B \Rightarrow x \in A, x \in \bar{B} \Rightarrow x \in A\bar{B} \Rightarrow A \setminus B \subseteq A\bar{B}$.

Пусть $x \in A\bar{B} \Rightarrow x \in A, x \in \bar{B} \Rightarrow x \in A, x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus B \Rightarrow A\bar{B} \subseteq A \setminus B$.

$A \setminus B \subseteq A\bar{B}, A\bar{B} \subseteq A \setminus B \Rightarrow A \setminus B = A\bar{B}$.

2. Свойства операций над множествами

1. Идемпотентность

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

2. Коммутативность

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

3. Ассоциативность

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

4. Дистрибутивность

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

2. Свойства операций над множествами

5. Законы поглощения

$$(A \cup B) \cap A = A$$

$$(A \cap B) \cup A = A$$

6. Свойства нуля

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\overline{\emptyset} = U$$

7. Свойства единицы

$$A \cup U = U$$

$$A \cap U = A$$

$$\overline{U} = \emptyset$$

2. Свойства операций над множествами

8. Инволютивность

$$\bar{\bar{A}} = A$$

9. Законы де Моргана

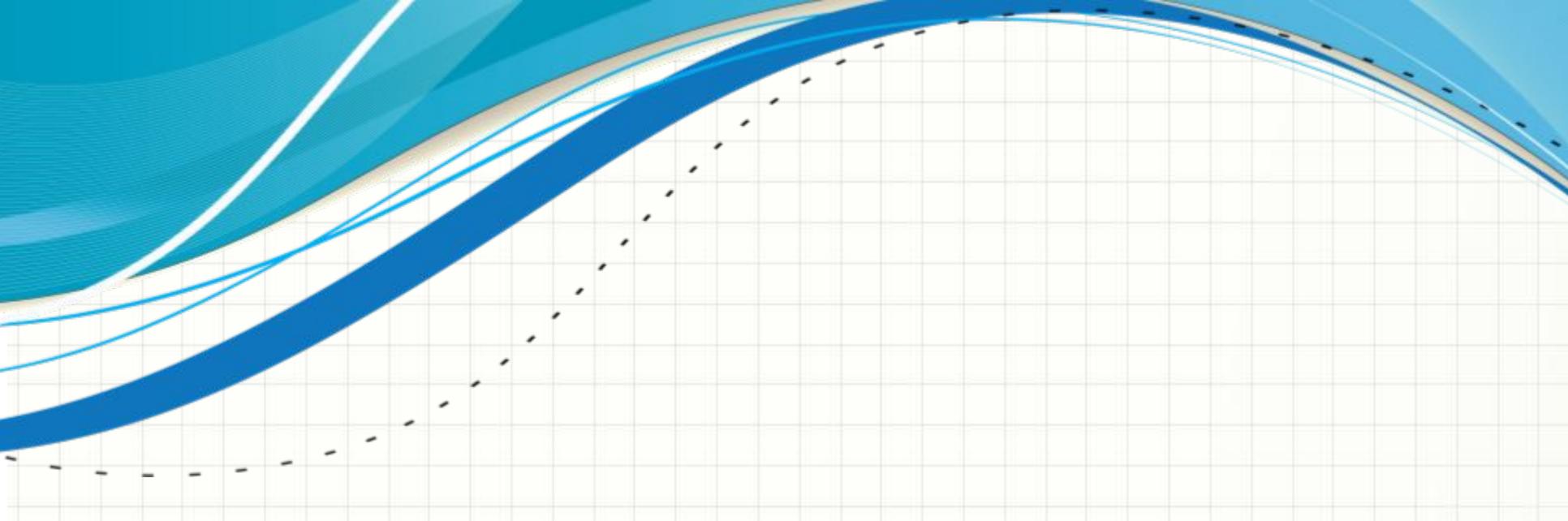
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

10. Свойства дополнения

$$A \cup \bar{A} = U$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$



Вопросы?