Раздел 2. Производная и дифференциал функции
Тема 2.1. Производная функции

План

1. **Производная функции.**
2. **Задачи для самостоятельного решения.**

Производной функции f(x) в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

$f'(x)$; f' ; y'

- **Геометрический смысл производной –** угловой коэффициент касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0.

- ***Физический смысл производной*** – мгновенная скорость изменения некоторого процесса в определённый момент времени.

- Важное значение производной состоит в том, что с её помощью можно оценить изменения любых процессов и явлений природы.
- Процедуру нахождения производной функции называют ***дифференцированием***.

Пример 1.1.

- Пусть численность популяции бактерий описывается функцией $P(t) = 3000 + 100t^2$, где t – время, измеряемое в часах. Определить скорость роста популяции и её значение через 5 часов.

Скорость роста популяции бактерий представляет производную от функции Р (т):

$$P'(t) = \frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3000 + 100(t+\Delta t)^2 - 3000 - 100t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3000 + 100t^2 + 200t\Delta t + 100\Delta t^2 - 3000 - 100t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} (200t + 100\Delta t) = 200t \frac{\text{особей}}{\text{час}}.$$

$$P'(5) = 1000 \text{ особей.}$$

Ответ: Скорость роста популяции бактерий

$$200t\,\frac{\text{особей}}{\text{час}},$$

её значение через 5 часов 1000 особей.

Задачи для самостоятельного решения

1. $y' = \left(\frac{\ln x + x}{x}\right)'$
2. $y' = \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)'$
3. $y' = \left(ln\left(2 - \frac{x}{3}\right)\right)'$
4. $y' = (x^4 - log_4 x)'$
5. $y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{x^4} - \sqrt{x} + 2\right)'$
6. $y' = \left((-x^4 + 5)^6\right)'$
7. $y' = \left(\sqrt[5]{(x^3 - 5x)^2}\right)'$