Опр. Диаметр линии второго порядка называется главным, если он перпендикулярен сопряженным ему хордам.

Следовательно, главный диаметр является осью симметрии линии второго порядка.

Теорема. Диаметр является главным тогда и только тогда, когда он сопряжен главному, но неасимптотическому направлению.

Док-во (самостоятельно)

Теорема. Центральная линия второго порядка, отличная от окружности имеет два и только два главных диаметра. (Для окружности любой диаметр является главным).

Нецентральная линия второго порядка имеет только один главный диаметр.

Док-во: Пусть линия — центральная, отличная от окружности. Эта линия имеет два главных направления. Эти направления не являются асимптотическими (они не самосопряженные)

$J_2 \neq 0$. $\vec{p} \neq \vec{0}$. , $\vec{p}$ — асимптотическое направление.

$$a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0$$

$$a_{11}p_1^2 + a_{12}p_1p_2 + a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0$$

$$p_1(a_{11}p_1 + a_{12}p_2) + p_2(a_{12}p_1 + a_{22}p_2) = 0.$$

$$\frac{p_2}{p_1} = -\frac{a_{11}p_1 + a_{12}p_2}{a_{12}p_1 + a_{22}p_2}$$

т.е. сопряжены направления.

Главные направления:

$$a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{12}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = 0.$$

$$q_1(a_{11}p_1 + a_{12}p_2) + q_2(a_{12}p_1 + a_{22}p_2) = 0.$$

$$\frac{q_2}{q_1} = -\frac{a_{11}p_1 + a_{12}p_2}{a_{12}p_1 + a_{22}p_2}$$, числа $a_{11}p_1 + a_{12}p_2$

и $a_{12}p_1 + a_{22}p_2$ — одновременно не нули.

При $I_2 \neq 0$ они могут быть нулями когда $p_1 = p_2 = 0$, т.е $\vec{p} = \vec{0}$, этого не может быть.

Тогда $\vec{p}$ и $\vec{q}$ задают одно направление, а главных направлений два. Поэтому диаметры, сопряженные хордам этого направления, являются главными диаметрами.

2. Окружность является линией эллиптического типа, поэтому не имеет асимптотического направления, т.к. любое направление окружности является главным, то любой диаметр окружности является главным.

3. $J_2 = 0$ (линия нецентральная, $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$).

Пусть $\vec{p}$ – асимптотическое направление нецентральной линии, $\vec{q}$ – ненулевой вектор, ему перпендикулярный. $\vec{p}$ имеет координаты:

1) если $a_{22} \neq 0$ $\vec{p}\,(a_{22}, -a_{12})$

2) если $a_{22} = 0$, $\vec{p}\,(0, 1)$

Тогда $\vec{q}$ имеет координаты

1) $a_{22} \neq 0$ $\vec{q}\,(a_{12}, a_{22})$

2) $a_{22} = 0$ $\vec{q}\,(1, 0)$

В обоих случаях $\vec{p}$ и $\vec{q}$ являются взаимно-сопряженные относительно линии второго порядка

1) $a_{11} a_{22} a_{12} + a_{12} a_{22}^2 - a_{12}^3 - a_{22}^2 a_{12} = a_{12}^2 a_{12} - a_{12}^3 = 0.$

$(a_{11} a_{22} = a_{12}^2).$

2) $a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 = a_{12} = 0.$, $a_{22} = 0;$

Так как вектор $\vec{p}$ имеет асимптотическое направление, то единственым главным диаметром будет диаметр, сопряженный главному, но неасимптотическому направлению.

Главный диаметр у нецентральных линий один.

Линия, отнесенная к главному направлению

Если ортонормированный репер R выбран так, что векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ задают главные направления линии второго порядка, то говорят, что линия отнесена к главному направлению

Е

Теорема: Линия будет отнесена к главному направлению тогда и только тогда, когда $a_{12}=0$

Док-во: (прямая). $\vec{i}(1,0)$, $\vec{j}(0,1)$ – задают главные направления. Покажем, что $a_{12}=0$.

$\vec{i}\perp\vec{j}$, $\vec{i},\vec{j}$ – взаимносопряженные вектора:

$a_{11}\cdot 1\cdot 0+a_{12}\cdot 1\cdot 1+a_{12}\cdot 0\cdot 0+a_{22}1\cdot 0=0$; $\underline{a_{12}=0}$

(обратная). $a_{12}=0$. Покажем, что $\vec{i},\vec{j}$ – задают главные направления.

$\vec{i}\perp\vec{j}$. Покажем, что $\vec{i},\vec{j}$ – взаимносопряженные.

$a_{11}p_1q_1+a_{22}p_2q_2=0$; $a_{11}\cdot 1\cdot 0+a_{22}\cdot 0\cdot 1=0$

$\vec{i},\vec{j}$ – удовлетворяют этому условию.

Если $a_{12}=0$, то линия отнесена к главным направлениям