

Опр. Диаметр линии второго порядка называется главным, если он перпендикулярен сопряженным ему хордам.

Следовательно, главный диаметр является осью симметрии линии второго порядка.

Теорема. Диаметр является главным тогда и только тогда, когда он сопряжен главному, но не является к нему направленным.

Док-во (самостоятельно)

Теорема. Центральная линия второго порядка, отличная от окружности имеет два и только два главных диаметра. (Для окружности любой диаметр является главным).

Нецентральная линия второго порядка имеет только один главный диаметр.

Док-во: Пусть линия — центральная, отличная от окружности. Эта линия имеет два главных направления. Эти направления не являются асимптотическими (они не самопересекаются)

$L_2 \neq 0$. $\vec{p} \neq \vec{0}$, \vec{p} — асимптотическое направление.

$$a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0$$

$$a_{11}p_1^2 + a_{12}p_1p_2 + a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0$$

$$p_1(a_{11}p_1 + a_{12}p_2) + p_2(a_{12}p_1 + a_{22}p_2) = 0.$$

$$\frac{p_2}{p_1} = - \frac{a_{11}p_1 + a_{12}p_2}{a_{12}p_1 + a_{22}p_2}$$

т.е. сопряжены направления.

Задача направления:

$$a_{11}q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{12}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = 0.$$

$$q_1(a_{11}p_1 + a_{12}p_2) + q_2(a_{12}p_1 + a_{22}p_2) = 0.$$

$$\frac{q_2}{q_1} = - \frac{a_{11}p_1 + a_{12}p_2}{a_{12}p_1 + a_{22}p_2}, \text{ где } a_{11}p_1 + a_{12}p_2$$

и $a_{12}p_1 + a_{22}p_2$ — одновременно не нули.

Если $q_2 \neq 0$ они могут быть нулями когда $p_1 = p_2 = 0$, т.е. $\vec{p} = \vec{0}$, этого не может быть.

Векторы \vec{p} и \vec{q} задают одно направление, а главные направления два. Поэтому диаметры, соответствующие хордам этого направления, являются главными диаметрами.

2. Окружность является линией эллиптического типа, поэтому не имеет асимптотического направления, т.к. любое направление окружности является главным, то любой диаметр окружности является главным.

3. $\gamma_2 = 0$ (линия нецентральной, $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$).
Пусть \vec{p} — асимптотическое направление нецентральной линии, \vec{q} — ненулевой вектор, ему перпендикулярный. \vec{p} имеет координаты:

1) если $a_{22} \neq 0$ $\vec{p} (a_{22}, -a_{12})$

2) если $a_{22} = 0$, $\vec{p} (0, 1)$

Тогда \vec{q} имеет координаты

1) $a_{22} \neq 0$ $\vec{q} (a_{12}, a_{22})$

2) $a_{22} = 0$ $\vec{q} (1, 0)$

В обоих случаях \vec{p} и \vec{q} являются взаимно-сопряженными относительно линии второго порядка

1) $a_{11} a_{22} a_{12} + a_{12} a_{22}^2 - a_{12}^3 - a_{22}^2 a_{12} = a_{12}^2 a_{12} - a_{12}^3 = 0$
($a_{11} a_{22} = a_{12}^2$).

2) $a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 = a_{12} = 0$, $a_{22} = 0$;

Так как вектор \vec{r} имеет асимптотическое направление, то единственным главным диаметром будет диаметр, сопряженный главному, но неасимптотическому направлению.

Главный диаметр у нецентральных линий один.

Линия, отнесенная к главному направлению

Если ортонормированный репер R выбран так, что векторы \vec{i} и \vec{j} задают главные направления

Линии второго порядка, то говорят, что линия отнесена к главному направлению

⊥

Теорема:

Линия будет отнесена к главному направлению тогда и только тогда, когда $a_{12} = 0$

Доказ-во:

(прямая). $\vec{i}(1, 0)$, $\vec{j}(0, 1)$ — задают главные направления. Покажем, что $a_{12} = 0$.

$\vec{i} \perp \vec{j}$, \vec{i}, \vec{j} — взаимно перпендикулярные векторы:

$$a_{11} \cdot 1 \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 \cdot 0 + a_{22} \cdot 1 \cdot 0 = 0; \quad \underline{a_{12} = 0}$$

(обратная). $a_{12} = 0$. Покажем, что \vec{i}, \vec{j} — задают главные направления.

$\vec{i} \perp \vec{j}$. Покажем, что \vec{i}, \vec{j} — взаимно перпендикулярные.

$$a_{11} r_1 q_1 + a_{22} r_2 q_2 = 0; \quad a_{11} \cdot 1 \cdot 0 + a_{22} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

\vec{i}, \vec{j} — удовлетворяют этому условию.

Если $a_{12} = 0$, то линия отнесена к главным направлениям.