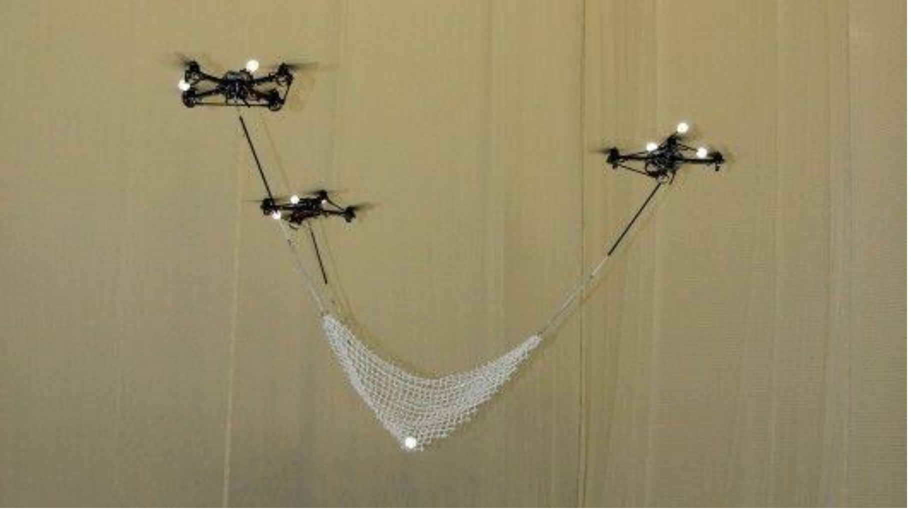


Расчет модели

Глава II.
Векторная алгебра

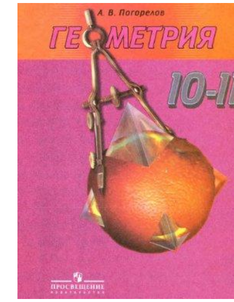
Раздел математики, в котором изучаются свойства операций над векторами, называется ***векторным исчислением***.

Векторное исчисление подразделяют на ***векторную алгебру*** и ***векторный анализ***.

В векторной алгебре изучаются линейные операции над свободными векторами (сложение векторов и умножение вектора на число) и различные произведения векторов (скалярное, псевдоскалярное, векторное, смешанное и двойное векторное).

В векторном анализе изучают векторы, являющиеся функциями одного или нескольких скалярных аргументов.

§ 6. Векторы. Линейные операции на множестве векторов



1. Основные понятия

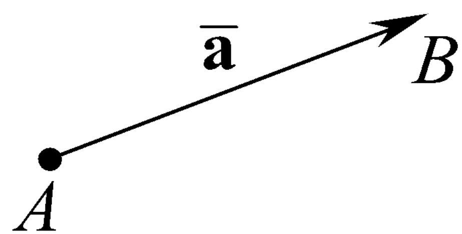
Вспоминаем школьную программу

ОПР. ***Вектором*** *называется направленный отрезок (т.е. отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая – за конец).*

Обозначают: $\overline{AB}$ (где А – начало вектора, В – его конец),

$\overline{a}, \ \overline{b}$ и т.д.

Изображают:



Расстояние от начала вектора до его конца называется ***длиной*** (или ***модулем***) вектора. Обозначают: $\left|\overline{\mathbf{AB}}\right|$ или $\left|\overline{\mathbf{a}}\right|$.

Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным***.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется ***нулевым***. Обозначают: $\overline{\mathbf{0}}$.

Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются ***коллинеарными*** (***параллельными***).

Записывают: $\bar{\mathbf{a}} \parallel \bar{\mathbf{b}}$ – если векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарные,

$\bar{\mathbf{a}} \nparallel \bar{\mathbf{b}}$ – если векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ неколлинеарные.

Коллинеарные векторы бывают:

сонаправленными $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ **пропустить 5 клеточек**

противоположно направленными $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$

пропустить 5 клеточек

Два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называются ***равными***, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину.

$$\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{b}}.$$

Все нулевые векторы считаются равными.

Векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$, лежащие на перпендикулярных прямых, называются ***перпендикулярными*** (***ортогональными***).

$$\bar{\mathbf{a}} \perp \bar{\mathbf{b}}.$$

Три вектора, лежащие в одной или в параллельных плоскостях, называются ***компланарными***.

пропустить 10 клеточек

Векторы, начала которых строго фиксированы называют ***связанными***;

Векторы, начала которых можно перемещать (параллельно переносить), называют ***свободными***.

Пример – сила тяжести. Какой вектор?

пропустить 10 клеточек

2. Линейные операции на множестве векторов

1) Умножение на число; 2) Сложение векторов

ОПР. ***Произведением вектора*** $\bar{\mathbf{a}} \neq \bar{\mathbf{0}}$ ***на число*** $\alpha \neq 0$ *называется вектор, длина которого равна* $|\alpha| \cdot |\bar{\mathbf{a}}|$,
а направление совпадает с направлением вектора $\bar{\mathbf{a}}$ *при* $\alpha > 0$ *и противоположно ему при* $\alpha < 0$.

Обозначают: $\alpha\,\bar{\mathbf{a}}$

Если $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$ *или* $\alpha = 0$, *то* $\alpha\,\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$.

Вектор $(-1)\bar{\mathbf{a}}$ называют ***противоположным вектору*** $\bar{\mathbf{a}}$

Обозначают $-\bar{\mathbf{a}}$.

пропустить 10 клеточек

ЛЕММА 1 (критерий коллинеарности векторов).

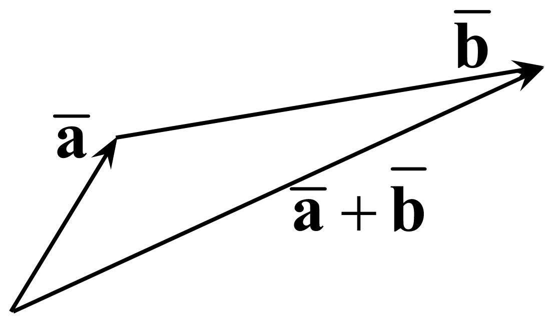
Два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда* $\boxed{\bar{\mathbf{a}} = \alpha \cdot \bar{\mathbf{b}}},$ *для некоторого числа* $\alpha \neq 0$.

ОПР. (сложение - правило треугольника).

Пусть даны два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$.

Поместим начало $\bar{\mathbf{b}}$ *в конец* $\bar{\mathbf{a}}$.

Вектор, соединяющий начало первого и конец второго построенных векторов, называется суммой векторов $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *и обозначается* $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}$.



Следствие – правило многоугольника.

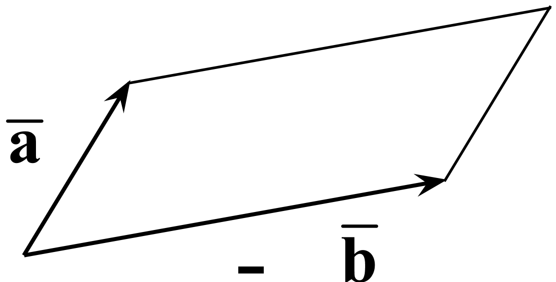
пропустить 10 клеточек

ОПР. (правило параллелограмма).

Пусть даны два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$.

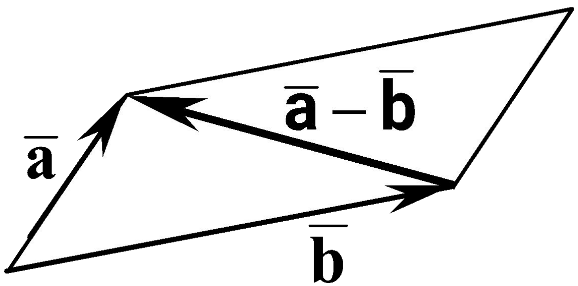
Совместим их начала, построим на этих векторах параллелограмм.

Суммой *векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *будет вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма, выходящей из точки начал векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$.



Частный случай: сумма $\bar{\mathbf{a}} + (-\,\bar{\mathbf{b}})$

Сумму $\bar{\mathbf{a}} + (-\,\bar{\mathbf{b}})$ называют ***разностью векторов*** $\bar{\mathbf{a}}$ ***и*** $\bar{\mathbf{b}}$ и обозначают $\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}$.



пропустить 20 клеточек

СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ НАД ВЕКТОРАМИ

1) $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{a}}$ (коммутативность сложения векторов);

2) $(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}) + \bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{a}} + (\bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{c}})$ (ассоциативность сложения векторов);

3) $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{a}}$;

4) $\bar{\mathbf{a}} + (-\bar{\mathbf{a}}) = \bar{\mathbf{0}}$;

5) $\alpha \cdot (\beta\bar{\mathbf{a}}) = (\alpha \cdot \beta)\bar{\mathbf{a}}$ (ассоциативность относительно умножения чисел) ;

6) $(\alpha + \beta)\bar{\mathbf{a}} = \alpha\bar{\mathbf{a}} + \beta\bar{\mathbf{a}}$ (дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения чисел);

7) $\alpha(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}) = \alpha\bar{\mathbf{a}} + \alpha\,\bar{\mathbf{b}}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов);

8) $1 \cdot \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}$.

Найдите аналогию с тем, что учили в школе

3. Проекция вектора

ОПР. *Прямую, на которой выбрано направление, называют* ***осью***.

Пусть ℓ – ось, $\overline{\mathbf{AB}}$ – некоторый вектор.

Пусть A_1 и B_1 – ортогональные проекции на ось ℓ точек A и B соответственно.

Вектор $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ назовем ***векторной проекцией вектора*** $\overline{\mathbf{AB}}$ ***на ось*** $\boldsymbol{\ell}$.

пропустить 10 клеточек или нарисовать самим 😏

ОПР. ***Проекцией*** (*ортогональной проекцией*) *вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на ось* ℓ *называется*

1) *длина его векторной проекции* $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *на ось* ℓ, *взятая со знаком плюс, если вектор* $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *и ось* ℓ *сонаправлены;*

2) Та же длина, но взятая со знаком минус, если вектор $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *и ось* ℓ *противоположно направлены*

Обозначают: $\text{Пр}_{\ell}\overline{\mathbf{AB}}$

пропустить 15 клеточек

4. Понятия линейной зависимости и независимости. Базис

ОПР. *Говорят, что векторы* $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_k$ ***линейно зависимы***, *если существуют числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, *не все равные нулю и такие, что*

$$\boxed{\alpha_1 \cdot \bar{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{\mathbf{a}}_2 + \ldots + \alpha_k \cdot \bar{\mathbf{a}}_k = \bar{\mathbf{o}}} \qquad \mathbf{(1)}$$

Если равенство (1) *возможно только при условии* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, *то векторы* $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_k$ *называют* ***линейно независимыми***.

ЛЕММА 2 (необходимое и достаточное условие линейной зависимости векторов).

Векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_k$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через оставшиеся.*

Доказательство. пропустить 20 клеточек А можно и самим

Замечание. Часто в качестве определения линейно зависимых векторов берут формулировку леммы 2.

Пусть $V^{(3)}$– множество свободных векторов пространства ($V^{(2)}$ - плоскости).

ОПР. *Совокупность любых двух линейно независимых векторов, принадлежащих одной плоскости ($V^{(2)}$), называется* ***базисом*** *на этой плоскости. Коэффициенты в разложении вектора по базису называются* ***координатами*** *этого вектора в данном базисе.*

ОПР. Аналогично для $V^{(3)}$. **СФОРМУЛИРОВАТЬ САМИМ** 😡 !

Т. ... и

а)

б)

ЛЕММ...

Векторы, не лежащие на одной или параллельных прямых, на...

неколлинеарными

Векторы, не лежащие в одной или параллельных плоскостях, называются ***некомпланарными***.

1) *Базисом множества*

😱 *забыл?*

...неколлин... **пропустить 15 клеточек**

😱

2) *Базисом в* $V^{(3)}$ *являются любые три некомпланарных вектора* 😡

ДОКАЗАТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО !

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ координат свободного век... **20 кл**

это проекции вектора на направления базисных векторов.

Системы координат.

ОПР. ***Осью*** называется прямая с выбранным на ней направлением.

ОПР. *Афинной системой координат* (*косоугольной системой координат*) называется совокупность точки, приложенного к ней афинного базиса и определяемых базисными векторами осей.

Замечание. Проекции в афинном базисе не ортогональные!

В качестве базиса $V^{(2)}$ можно взять любые два неколлинеарных (любые три некомпланарных в $V^{(3)}$) вектора. Но на практике предпочитают работать с ***декартовым прямоугольным базисом***

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$).

ОПР. *Декартовой системой координат* называется совокупность точки, приложенного к ней декартового базиса и осей *OX, OY,*

пропустить 30 клеточек

ТЕОРЕМА 4 (о базисе). *Каждый вектор множества* $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) *линейно выражается через любой его* ***базис*** *, причем единственным образом.*

😱

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

пропустить 30 клеточек

ОПР. *Совокупность любых двух линейно независимых векторов, принадлежащих одной плоскости* ($V^{(2)}$)*, называется* ***базисом*** *на этой плоскости. Коэффициенты в разложении вектора по базису называются* ***координатами*** *вектора в данном базисе.*

ТЕОРЕМА 5 (основная теор. векторной алгебры).

Пусть $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ – координаты вектора $\bar{\mathbf{a}}$ в базисе $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$

$\{\beta_1, \beta_2, \beta_n\}$ – координаты вектора $\bar{\mathbf{b}}$ в том же базисе.

Тогда

1) вектор $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}$ будет иметь в базисе $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ координаты

$$\{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3\};$$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ вектор $\lambda\bar{\mathbf{a}}$ будет иметь в базисе $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ координаты

$$\{\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3\}.$$

пропустить 30 клеточек

ТЕОРЕМА 6 (критерий коллинеарности свободных векторов в координатной форме).

Векторы $\bar{\mathbf{a}} = \{\alpha_1 ; \alpha_2 ; \alpha_3\}$ *и* $\bar{\mathbf{b}} = \{\beta_1 ; \beta_2 ; \beta_3\}$ *коллинеарны* $\Leftrightarrow$ *их координаты пропорциональны*, т.е.

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} = k.$$

Причем, если коэффициент пропорциональности $k > 0$, *то векторы* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ – *сонаправлены*; *если* $k < 0$, *то* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ – *противоположно направлены* .

пропустить 10 клеточек

Матрица перехода

Рассмотрим два базиса векторного пространства $V^{(3)}$

$$\mathbf{E} = \{\bar{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \textit{и} \quad \mathbf{F} = \{\bar{\mathbf{f}}_\mathbf{i}\} = \begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \end{pmatrix}$$

пропустить 30 клеточек

ОПР. Матрица **T** составленная из коэффициентов разложения, называется матрицей перехода от старого базиса $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ к новому базису $\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3$.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

ОПР*. Матрицей перехода **T** от базиса **E** базису **F** называется матрица, столбцами которой служат координаты векторов нового базиса в старом базисе.

пропустить 40 клеточек

ТЕОРЕМА 7 (связь координат вектора в разных базисах).

Пусть $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ *и* $\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3$ *два базиса во множестве* $V^{(3)}$. *Причем имеют место равенства*

$$\bar{\mathbf{f}}_1 = \tau_{11}\bar{\mathbf{e}}_1 + \tau_{21}\bar{\mathbf{e}}_2 + \tau_{31}\bar{\mathbf{e}}_3,$$
$$\bar{\mathbf{f}}_2 = \tau_{12}\bar{\mathbf{e}}_1 + \tau_{22}\bar{\mathbf{e}}_2 + \tau_{32}\bar{\mathbf{e}}_3,$$
$$\bar{\mathbf{f}}_3 = \tau_{13}\bar{\mathbf{e}}_1 + \tau_{23}\bar{\mathbf{e}}_2 + \tau_{33}\bar{\mathbf{e}}_3.$$

Если вектор $\bar{\mathbf{a}}$ *имеет в базисе* $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ *координаты* $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, *а в базисе* $\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3$ – *координаты* $\{\beta_1, \beta_2, \beta_n\}$, *то справедливо равенство*

$$\mathbf{A} = \mathbf{TB},$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

Доказательство. **пропустить 2 страницы**