II. Линейная независимость

1. Определения и примеры

1. Определения и примеры

Лемма 1.1:

Пусть S – подмножество векторного пространства V, тогда $\forall\, \boldsymbol{v} \in V$,

$$span\ S = span(\ S \cup \{\boldsymbol{v}\})\ \text{тогда и только тогда, когда}\ \boldsymbol{v} \in span\ S$$

Доказательство $\Rightarrow$ (необходимость) :

$\boldsymbol{v} \in span(\ S \cup \{\boldsymbol{v}\}\ )$, тогда из того, что $span\ S = span(\ S \cup \{\boldsymbol{v}\}\ )$ $\rightarrow$
$\boldsymbol{v} \in span\ S$

Доказателство $\Leftarrow$ (достаточность) :

$$span\left(S \cup \{\mathbf{v}\}\right) = \left\{ a_0\mathbf{v} + \sum_k a_k \mathbf{s}_k \;\middle|\; \mathbf{s}_k \in S \right\}$$

$$\boldsymbol{v} \in span\ S \rightarrow \qquad \mathbf{v} = \sum_k v_k \mathbf{s}_k$$

$$\rightarrow \qquad span\left(S \cup \{\mathbf{v}\}\right) = \left\{ \sum_k \left(a_k + a_0 v_k\right) \mathbf{s}_k \;\middle|\; \mathbf{s}_k \in S \right\} = span\ S$$

QED

Пример 1.2:

Пусть $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Тогда $span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ так как $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \in span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

Определение 1.3: Линейная независимость

Подмножество векторного пространства линейно независимо, если ни один из его элементов не является линейной комбинацией других.

В противном случае, множество называется линейно зависимым.

Лемма 1.4: Практический тест для определения ЛН.

$$S = \{ \mathbf{s}_k \in V \mid k = 1, \ldots, n \}$$ есть ЛН т.и т.т.к.

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{s}_k = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad c_k = 0 \ \forall\, k$$

Доказательство $\Rightarrow$:

Если S есть ЛЗ система, то можно записать $\mathbf{s}_j = \sum_{k \neq j} c_k \mathbf{s}_k \quad \forall\, j.$

Тогда, $\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{s}_k = \mathbf{0}$ выполняется только при $c_k = 0 \ \forall\, k$

Доказательство $\Leftarrow$ (от противного) :

Если S не является ЛН, то $\exists\, j$ так что $\mathbf{s}_j = \sum_{k \neq j} c_k \mathbf{s}_k$

т.е. $\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{s}_k = \mathbf{0}$ выполняется для $c_j = -1 \neq 0.$

Рассуждая обратно, заканчиваем доказательство. QED

Пример 1.5: Строки

$\{\ (40 \quad 15), (-50 \quad 25)\ \}$ являются ЛН.

Доказательство:

Пусть $a\begin{pmatrix}40 & 15\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-50 & 25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$

$$\rightarrow \quad \begin{matrix} 40a - 50b = 0 \\ 15a + 25b = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 4a - 5b = 0 \\ 3a + 5b = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 7a + 0 = 0 \\ 3a + 5b = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \end{matrix}$$

$\{\ (40 \quad 15), (20 \quad 7.5)\ \}$ есть ЛЗ система.

Доказательство:

Пусть $a\begin{pmatrix}40 & 15\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}20 & 7.5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$

$$\rightarrow \quad \begin{matrix} 40a + 20b = 0 \\ 15a + 7.5b = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 2a + b = 0 \\ 2a + b = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad b = -2a$$

Лемма 1.6: Пустое подмножество является ЛН.

Лемма 1.7: Любое подмножество S содержащее $\mathbf{0}$, является ЛЗ.

Доказательство:

$$0\mathbf{v}_1 + \ldots + 0\mathbf{v}_n + a\mathbf{0} = \mathbf{0} \qquad \forall\, a \in \mathrm{F}$$

Теорема 1.8:

Любое конечное подмножество S векторного пространства V содержат ЛН подмножество U с той же линейной оболочкой, что и S.

Доказательство:

- Если S ЛН, то берем $U = S$ и все доказано.
- Если S ЛЗ, то $\exists\, \boldsymbol{s}_k$ так что $\boldsymbol{s}_k = \Sigma_{j\neq k}\, c_j\, \boldsymbol{s}_j$.

Из леммы 1.1, span S_1 = span S, где $S_1 = S \setminus \{\boldsymbol{s}_k\}$.

Если S_1 ЛН, то все доказано.

- В противном случае, повторяем процедуру изъятия элементов, пока не достигнем ЛН. QED.

Лемма 1.9:

Всякое подмножество ЛН множества является также ЛН.

Всякое надмножество ЛЗ множества также является ЛЗ.

Доказательство: Очевидно.

	$S_1 \subset S$	$S_2 \supset S$
S ЛН	S_1 ЛН	--
S ЛЗ	--	S_2 ЛЗ

Лемма 1.10:

Пусть S есть ЛН подмножество векторного пространства V, тогда
$\forall\ \boldsymbol{v} \in V\ \&\ \boldsymbol{v} \notin S,\qquad S \cup \{\boldsymbol{v}\}$ есть ЛЗ т.и т.т.к. $\boldsymbol{v} \in span\ S.$

Доказательство $\Leftarrow$:

По определению, $\boldsymbol{v} \in span\ S\ \&\ \boldsymbol{v} \notin S \ \Rightarrow\ S \cup \{\boldsymbol{v}\}$ есть ЛЗ

Доказательство $\Rightarrow$:

S есть ЛН $\Rightarrow$ ни один $\boldsymbol{s}_k$ не является линейной комбинацией других $\boldsymbol{s}_j$ – х.

$S \cup \{\boldsymbol{v}\}$ есть ЛЗ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{v}$ обязан быть линейной комбинацией $\boldsymbol{s}_j$-х. QED

Следствие 1.11:

Подмножество $S = \{\boldsymbol{s}_k \mid k = 1,\ldots,n\}$ ЛЗ т.и т.т.к $\mathbf{s}_j = \sum_{k=1}^{j-1} c_k \mathbf{s}_k$ для некоторого $j \le n$

Доказательство: По построению.

Лемма 1.12: Пусть S – ЛН подмножество векторного пространства V, тогда $\forall\ \boldsymbol{v} \in V\ \&\ \boldsymbol{v} \notin S,$

$S \cup \{\boldsymbol{v}\}$ ЛН т.и т.т.к. $\boldsymbol{v} \notin span\ S.$