ГИДРОМЕХАНИКА

Лекция 6
Плоское потенциальное движение

Сложение потенциальных потоков

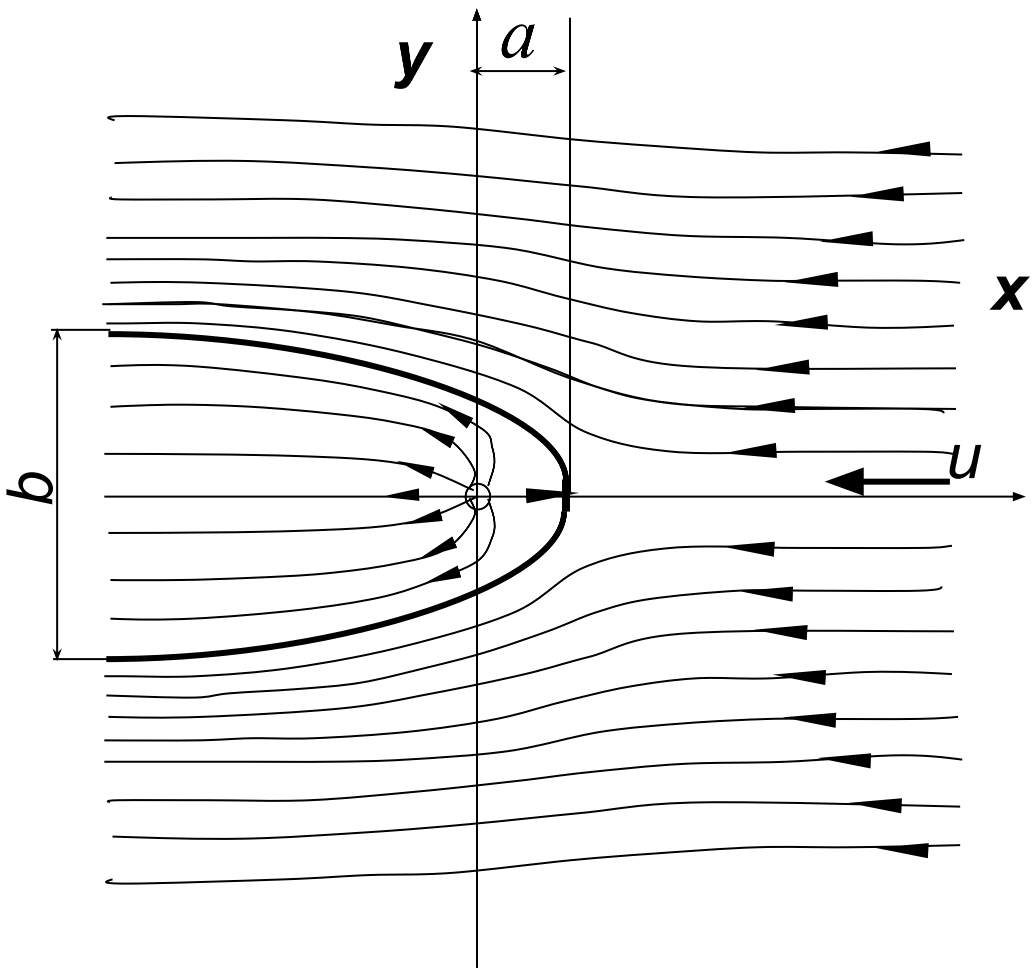
Если поток является результатом сложения двух потенциальных течений, то он также будет потенциальным.

Потенциал скоростей сложного движения получается методом наложения по принципу независимости действия сил, т. е. потенциал скорости равен *алгебраической сумме* потенциалов скоростей слагаемых потоков.

Сложение потенциальных потоков

Сложение параллельного течения и источника

Исследуем тип течения, образующегося при сложении параллельного течения со скоростью *u* и течения из источника.



Точку, где помещается источник, примем за начало координат.

Распределение скоростей вокруг источника задается формулой

$$c = \frac{Q}{2\pi r}$$

Сложение потенциальных потоков

Легко показать, что на оси ***x*** течения должна существовать такая точка, в которой скорости течений взаимно уничтожаются; в этой точке, таким образом, жидкость должна находиться в покое.

Такие точки течения, в которых скорость жидкости равна нулю, встречаются и при других типах течения. Эти точки обычно называются ***критическими***, ***напорными***.

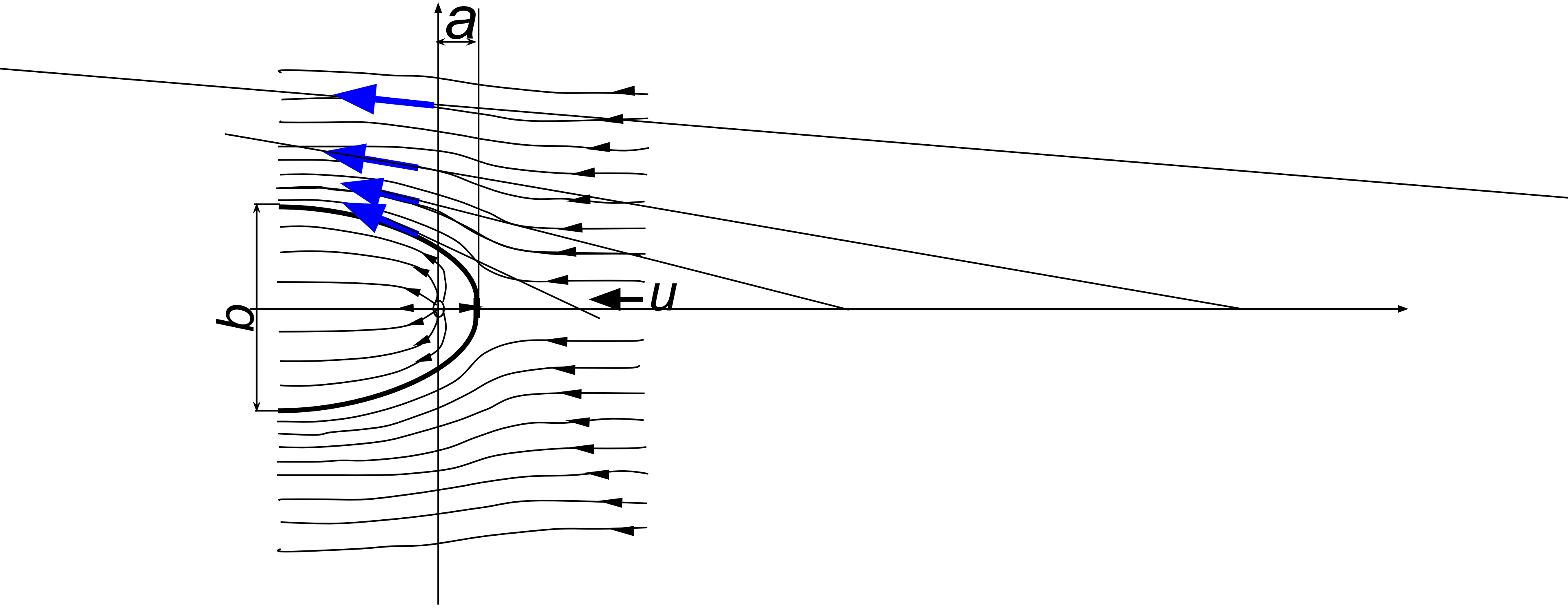
Расстояние a этой точки от источника определяется равенством

$$u = c = \frac{Q}{2\pi a} \qquad a = \frac{Q}{2\pi u}$$

Сложение потенциальных потоков

Направление результирующих скоростей в точках, лежащих на оси ***y*** определится формулой

$$\mathrm{tg}\,\frac{c}{u} = \frac{Q}{2\pi y u}$$


a
b
u

Сложение потенциальных потоков

Видно, что угол наклона этих скоростей к оси ***x***, постоянно убывает с возрастанием ***y***, стремясь к нулю. Все течение от источника отклоняется влево, а в бесконечности течение переходит в чисто параллельное. Вся вытекающая из источника жидкость остается внутри разомкнутой сзади кривой.

При отсутствии трения ничто не препятствует замене этой кривой твердой стенкой, т. е. приходим к течению, имеющему место при *обтекании спереди закругленного* бесконечно длинного тела

Сложение потенциальных потоков

Уравнение Бернулли полностью остается в силе и после наложения двух течений. В бесконечности все линии тока становятся параллельными, а потому и давления должны быть одинаковыми в плоскостях, перпендикулярных направлению течения.

Но это возможно лишь при равенстве скоростей, т. е. когда лента шириной ***b**,* в которую переходит течение от источника в бесконечности (что совпадает с шириной обтекаемого тела в бесконечности), также приобретает скорость ***u**.*

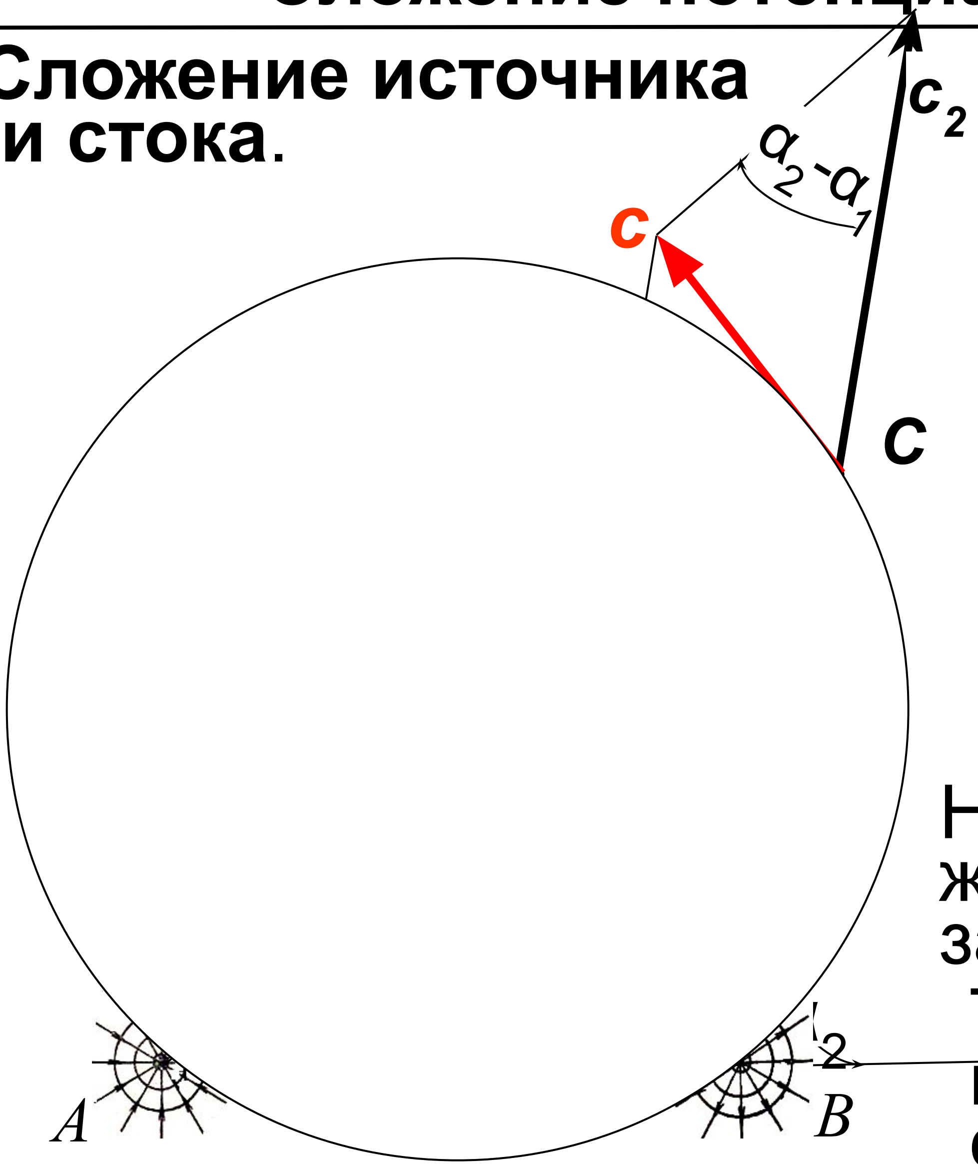
Отсюда эта ширина ***b*** определяется уравнением:

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{Q}; \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{Q}/\boldsymbol{u}.$$

К этой величине асимптотически приближается ширина бесконечно длинного обтекаемого тела.

Сложение потенциальных потоков

Сложение источника и стока.



Пусть в точке *A* помещается сток, а в точке B – источник, оба с одинаковой интенсивностью Q.

$$c_1 = \frac{Q}{2\pi s_1} \qquad c_2 = \frac{Q}{2\pi s_2}$$

На схеме показано сложение этих скоростей по закону параллелограмма

Таким образом направление течения в точке ***С*** совпадает с направлением *результирующей скорости*

Сложение потенциальных потоков

$$c^2 = c_1^2 + c_2^2 - 2c_1 c_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) =$$

$$= (\frac{Q}{2\pi})^2 (\frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{s_2^2} - \frac{2}{s_1 s_2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1);$$

$$\frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{s_2^2} - \frac{2}{s_1 s_2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) =$$

$$= \frac{1}{s_1^2 s_2^2} (s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)) = l^2$$

$$c^2 = (\frac{Q}{2\pi})^2 \frac{l^2}{s_1^2 s_2^2}$$

Сложение потенциальных потоков

$$c = \frac{Q}{2\pi} \frac{l}{s_1 s_2}$$

Скорость ***c*** направлена по касательной к окружности, проходящей через точки *ABC*. Окружность представляет собой *линию тока*. Линия, огибающая все векторы скорости является не чем иным, как *траекторией* частицы.

Линии тока результирующего течения (источник+сток) представляют собой пучок окружностей, проходящих через точки A и B.

Сложение потенциальных потоков

Диполь

Если предположить, что **источник** и *сток* помещаются в одной точке, то с первого взгляда трудно представить себе каким образом может вообще оказать какое-нибудь воздействие подобная система, поскольку течение источника будет тотчас же уничтожаться стоком, сводя к нулю их воздействие на окружающую среду.

Сложение потенциальных потоков

Однако, можно рассматривать расстояние между источником и стоком l как бесконечно малую величину, стремящуюся к пределу.

Результирующая скорость в точке С

$$\boxed{c = \frac{Q}{2\pi}\frac{l}{s_1 s_2}}$$

при l равном нулю, тоже обратится в ноль. Но есть возможность, уменьшая l, увеличивать **Q** для соблюдения равенства

$$\lim_{Q\to\infty, l\to 0} Q\cdot l = Q_0\cdot l_0$$

Сложение потенциальных потоков

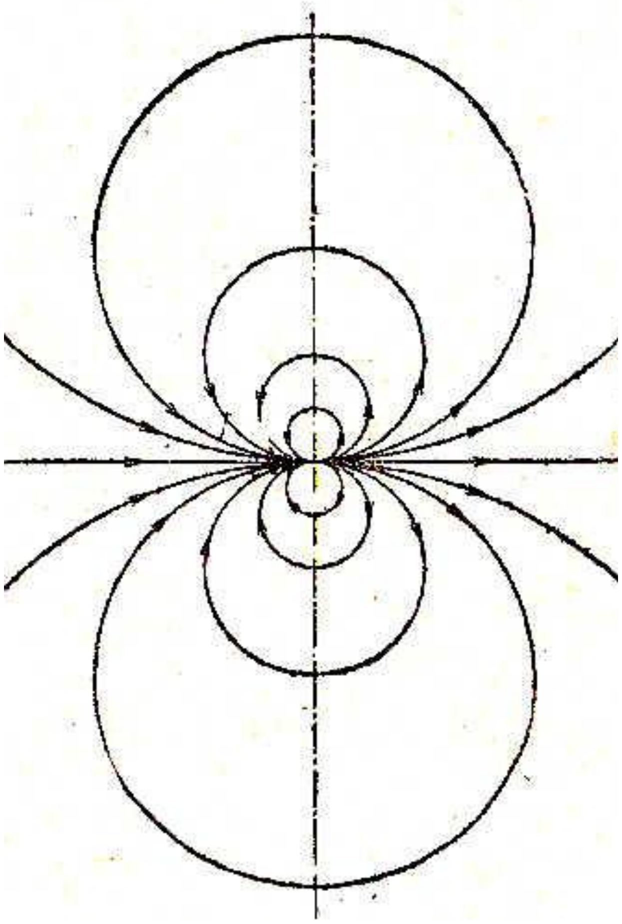
Эта пара «источник-сток» называется **диполем.** Произведение $\boldsymbol{Q \cdot l = M}$ – момент диполя, а ось $\boldsymbol{x}$ – ось диполя.

Момент диполя - величина постоянная, линии тока - семейство окружностей, так как $s_1 = s_2 = r$. Тогда скорость в точке на расстоянии $\boldsymbol{r}$ от центра диполя определяется формулой

$$c = \frac{Q}{2\pi} \frac{l}{r^2}$$

Эта формула верна, и в случае конечных расстояний между источником и стоком, но лишь для точек, находящихся на большом расстоянии от них.

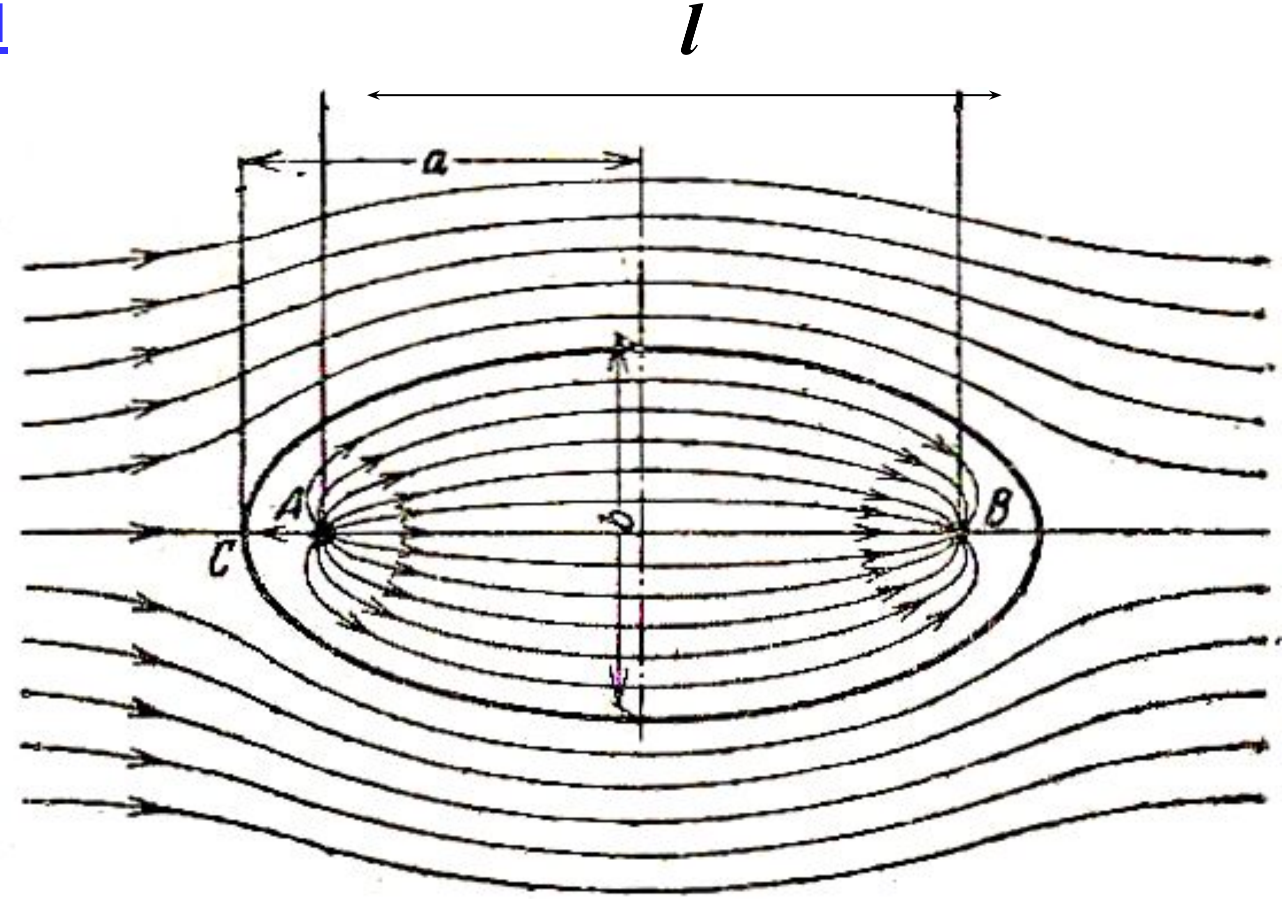
Сложение потенциальных потоков



Влияние диполя убывает с расстоянием быстрее, чем одиночного источника или одиночного вихря

Сложение потенциальных потоков

Сложение параллельного течения с источником и стоком



Результат сложения источника и стока равной интенсивности с параллельным течением со скоростью ***u***

Сложение потенциальных потоков

Влево от точки А скорость ***c*** пары источника и стока направлена противоположно скорости ***u*** . Так как она изменяется непрерывно, то в некоторой точке ***С*** скорости взаимно уничтожаются.

Расстояние до этой критической точки от начала координат подсчитывается из уравнения

$$u = c = \frac{Ql}{2\pi(a - \frac{l}{2})(a + \frac{l}{2})}$$

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{Ql}{2\pi u} + \frac{l^2}{4}}}$$

Сложение потенциальных потоков

Вторая критическая точка имеет абсциссу «-*a*».

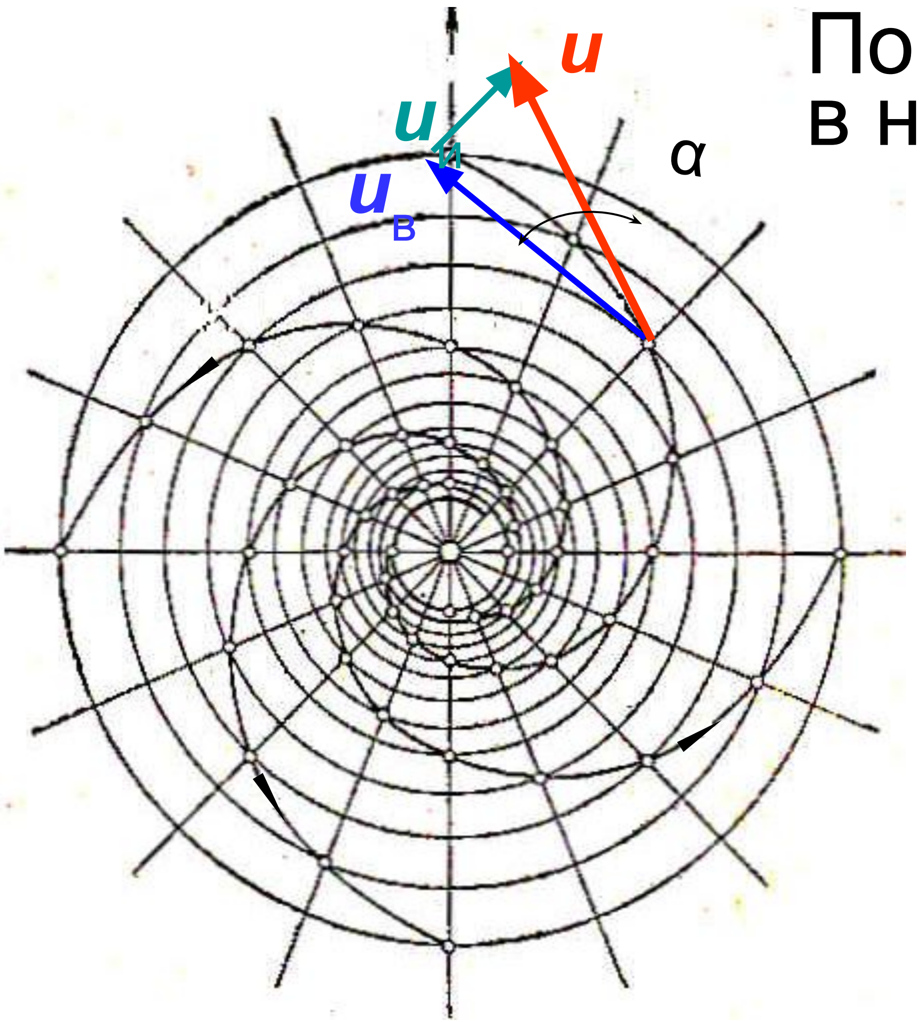
В этих границах будет теперь заключено все течение от источника и стока. Течение будет ограничено также и по оси ***y***; оказываясь замкнутым внутри эллипсообразной кривой. Если заменить эту кривую твердой стенкой и отвлечься от процессов внутри нее, то получен случай **обтекания эллипсоидального тела**

Максимальную ширину тела можно подсчитать из условия, что между ***y***=0 и ***y***=*b*/2 секундная расход протекающей жидкости должен рав-няться ***Q***/2.

Сложение потенциальных потоков

Сложение источника и вихря

Это суммарное течение называют **вихреисточником**, если $Q > 0$,и **вихрестоком**, если $Q < 0$.



Поместим источник и вихрь в начало координат:

Тогда скорости в точке

$$u_и = \frac{u_{и_0} \cdot r_0}{r}$$

$$u_в = \frac{u_{в_0} \cdot r_0}{r}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{u_в}{u_и} = \frac{u_{в0}}{u_{и0}} = C$$

Сложение потенциальных потоков

Угол α величина постоянная и, как можно видеть, точка, для которой определялась результирующая скорость, лежит на линии тока, так как скорость направлена по касательной к ней.

Тогда

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{u_{\text{в}0}}{u_{\text{и}0}} = \frac{dr}{r d\varphi} \qquad d\varphi \frac{u_{\text{в}0}}{u_{\text{и}0}} = \frac{dr}{r}$$

Откуда после интегрирования и определения постоянной интегрирования получаем

$$\boxed{\ln\frac{r}{r_0} = \varphi\frac{u_{\text{в}0}}{u_{\text{и}0}}}$$

Изопотенциальными линиями служат логарифмические спирали

Сложение потенциальных потоков

В пространстве между двумя параллельными стенками корпуса центробежного насоса или компрессора жидкость, выходящая из рабочего колеса, движется аналогичным образом.

Расположив вдоль линии тока твердую стенку, получим устройство для отвода жидкости от рабочего колеса - спиральный отвод,

Подобное течение имеет место и в спиральной подводящей камере гидротурбины.
На рисунке применительно к колесу турбины или центробежного насоса исключена центральная часть