

Проект по компьютерному практикуму  
по алгебре и геометрии

# ПОВЕРХНОСТИ 2 ПОРЯДКА

ПИН-14, Хан Анна



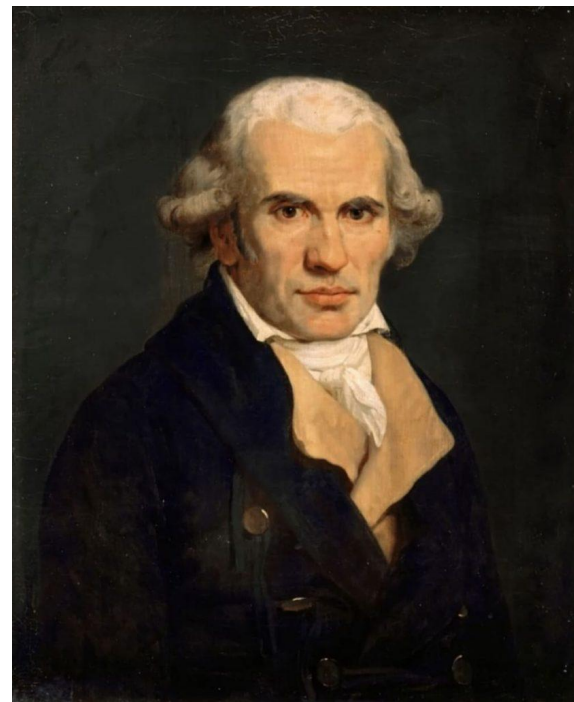
МИЭТ,  
2020

# История

Ученые, внесшие особый вклад в развитие теории поверхностей второго порядка

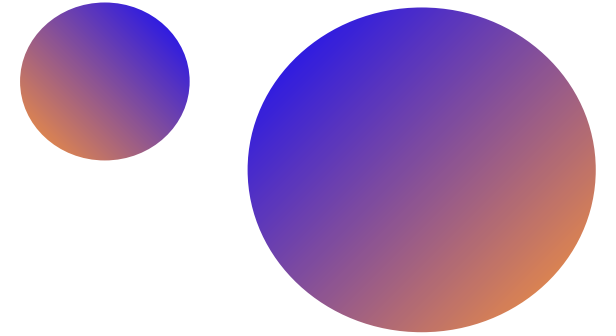


Леонард Эйлер, 1707-1783



Гаспар Монж, 1749-1818

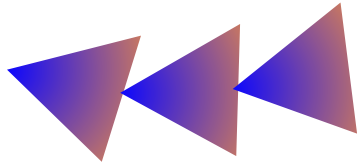
# Поверхность второго порядка



- **геометрическое место точек трёхмерного пространства**, прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида

*где  $A, B, C, D$  не равны одновременно нулю*

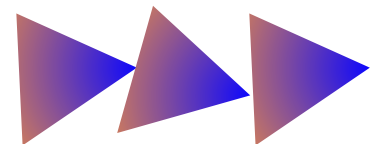




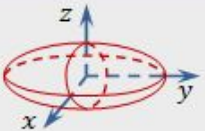
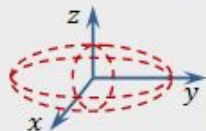
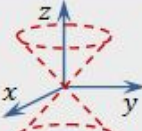
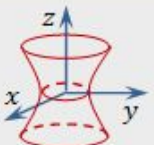
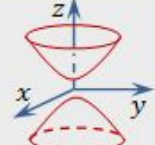
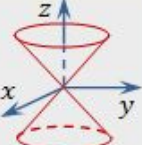
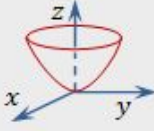
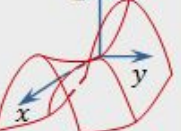
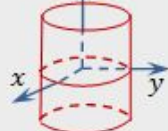
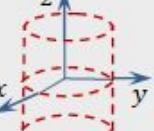
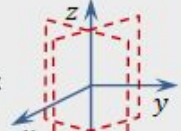
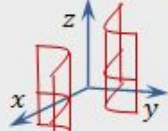
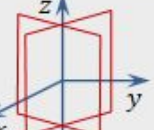
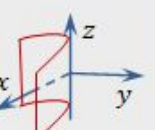
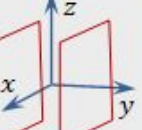
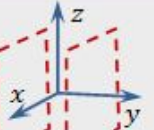
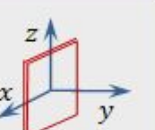
Уравнение может определять относительно OXYZ

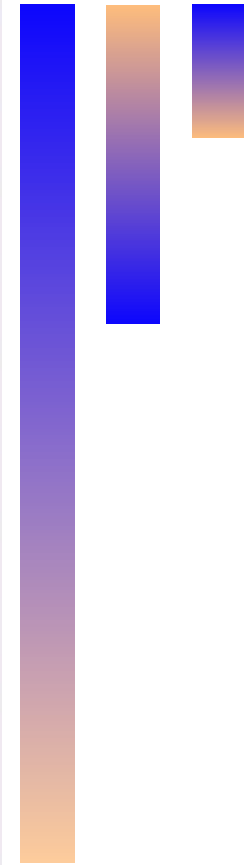
**вырожденную поверхность** (пару плоскостей, точку, пустое множество и т.д.)

Если поверхность **невырожденная**, то ее уравнение может быть приведено к **каноническому виду**



# Классификация уравнений поверхностей второго порядка

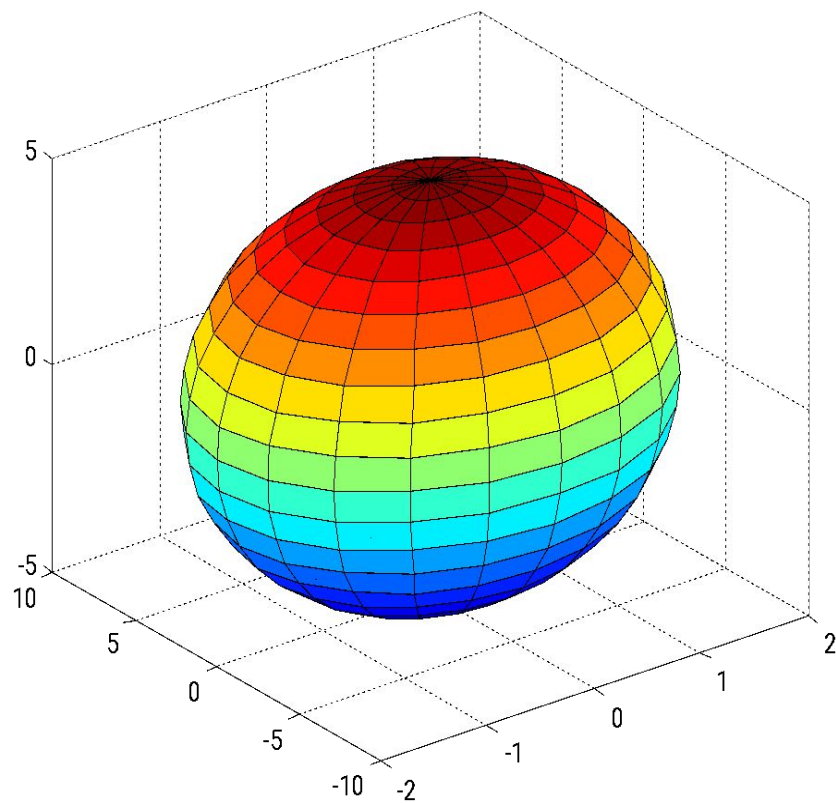
1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Уравнение эллипсоида		2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ Уравнение мнимого эллипсоида		3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ Уравнение мнимого конуса	
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Уравнение однополостного гиперболоида		5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ Уравнение двуполостного гиперболоида		6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ Уравнение конуса	
7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ Уравнение эллиптического параболоида		8. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ Уравнение гиперболического параболоида		9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Уравнение эллиптического цилиндра	
10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ Уравнение мнимого эллиптического цилиндра		11. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ Уравнение пары мнимых пересекающихся плоскостей		12. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Уравнение гиперболического цилиндра	
13. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ Уравнение пары пересекающихся плоскостей		14. $y^2 = 2px$ Уравнение параболического цилиндра		15. $y^2 - b^2 = 0$ Уравнение пары параллельных плоскостей	
16. $y^2 + b^2 = 0$ Уравнение пары мнимых параллельных плоскостей		17. $y^2 = 0$ Уравнение пары совпадающих плоскостей		<p>Для всех уравнений <math>a &gt; 0, b &gt; 0, c &gt; 0, p &gt; 0</math>                      Для уравнений 1 и 2 <math>a \geq b \geq c</math>                      Для уравнений 3,4,5,6,7,9,10 <math>a \geq b</math></p>	



# Эллипсоид

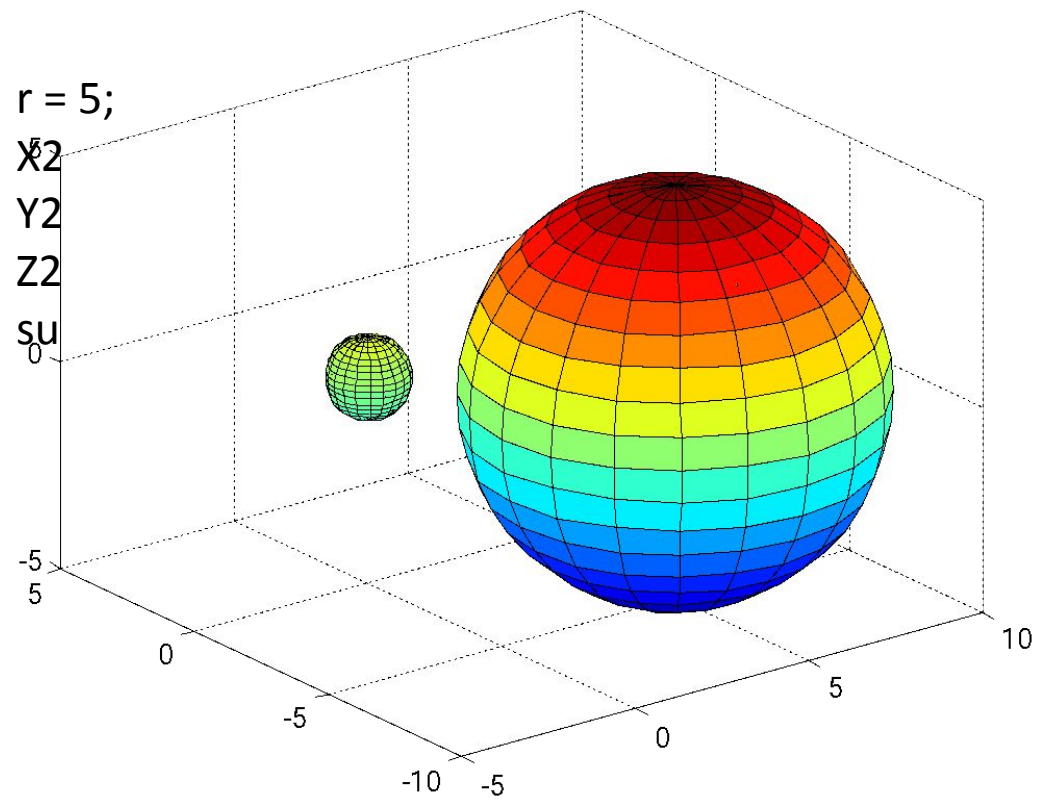
ellipsoid(0,0,0,2,8,5)

[X,Y,Z] = ellipsoid(x0,y0,z0,xr,yr,zr)



[X,Y,Z] = sphere(20);  
surf(X,Y,Z)

[X,Y,Z] = sphere(N),  
N – количество граней



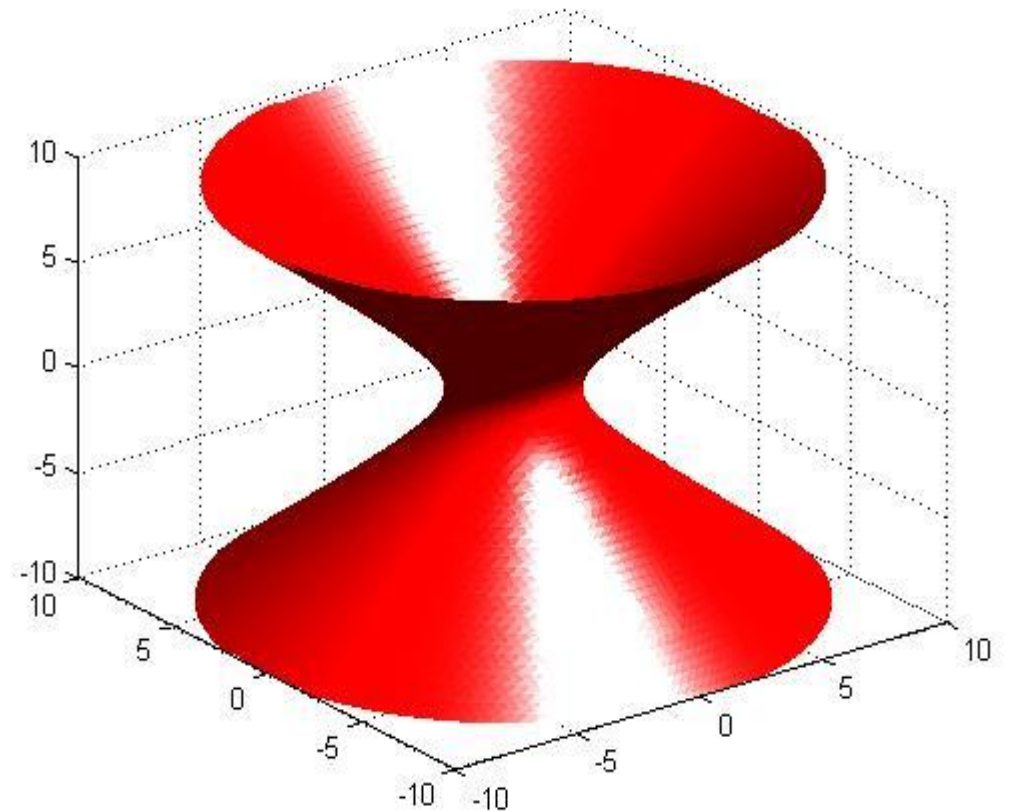
# Гиперболоид ОДНОПОЛОСТНЫЙ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Трехмерный массив - объемные данные

```
[X,Y,Z] = meshgrid(-10:0.3:10,-10:0.3:10,-10:0.3:10);  
a=1;b=1;c=1;  
V = (X.^2)./(a^2) + (Y.^2)./(b^2) - (Z.^2)/(c^2);  
p=patch(isosurface(X,Y,Z,V,5));  
set(p,'FaceColor','red','EdgeColor','none');  
view(3);  
grid on  
camlight
```

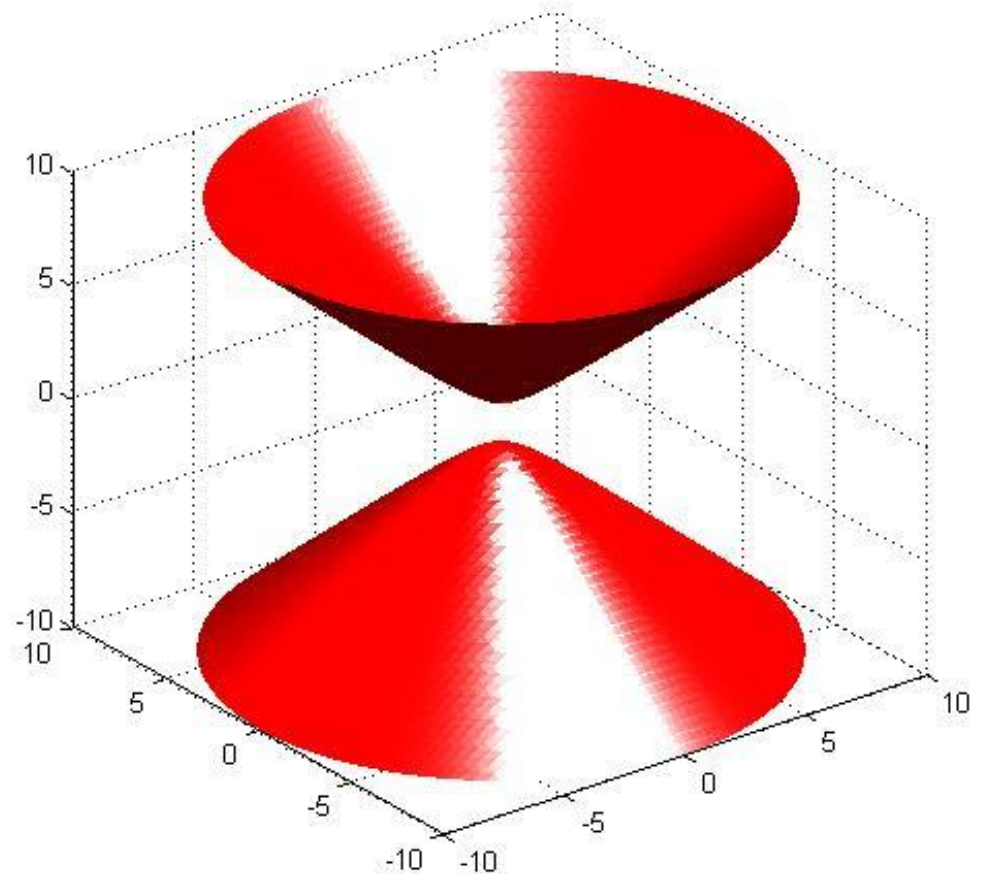
patch(X,Y,Z,C) создает полигоны в трехмерных координатах с помощью X,Y, и Z



# Гиперболоид ДВУПОЛОСТНЫЙ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

```
[X,Y,Z] = meshgrid(-10:0.3:10,-10:0.3:10,-10:0.3:10);  
a=1;b=1;c=1;  
V = (X.^2)./(a^2) + (Y.^2)./(b^2) - (Z.^2)/(c^2);  
p=patch(isosurface(X,Y,Z,-V,1));  
set(p,'FaceColor','red','EdgeColor','none');  
view(3);  
grid on  
camlight
```

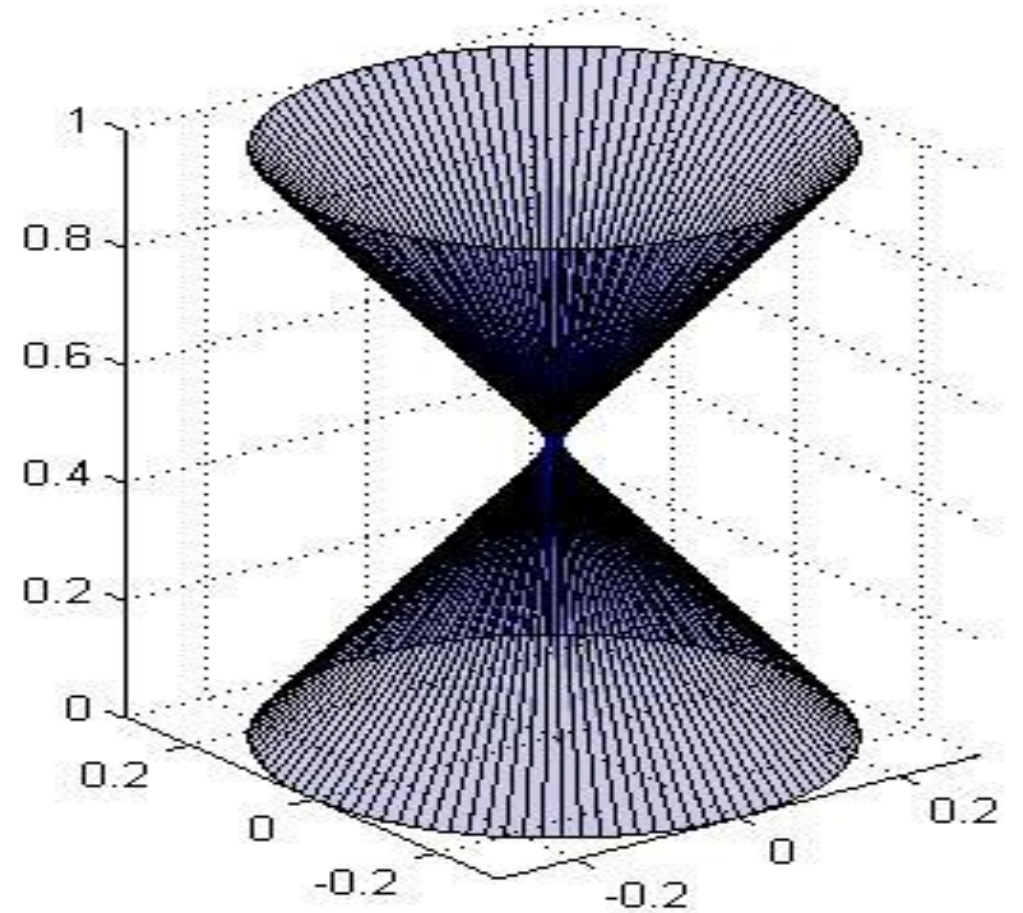




# Конус второго порядка

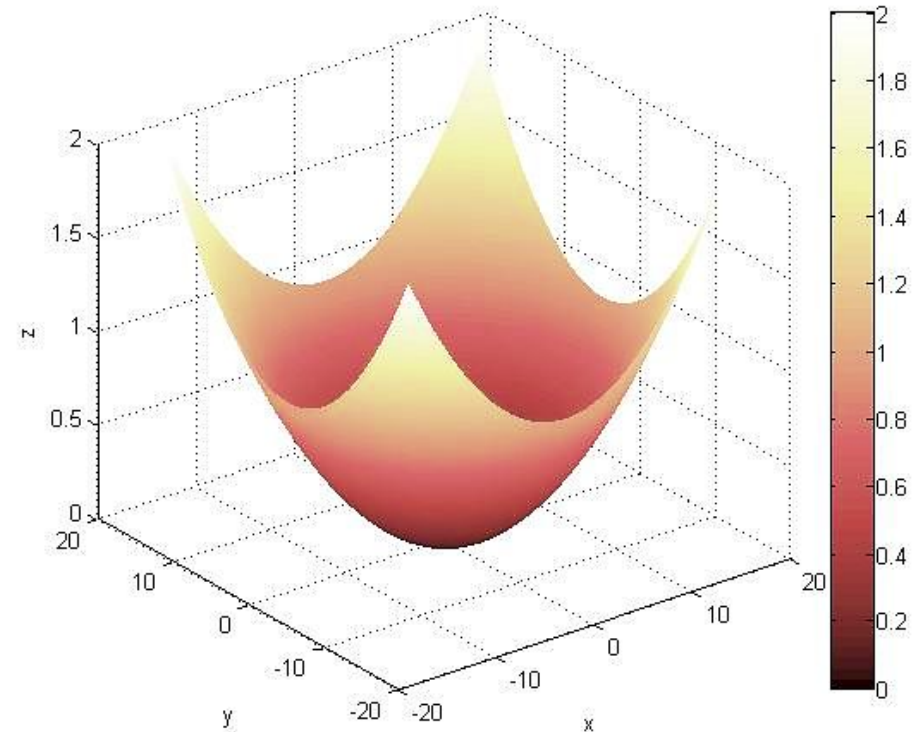
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

```
t = [-0.3;0.3];  
[X,Y,Z] = cylinder(t,100);  
s=surf(X,Y,Z);  
alpha(.2)  
axis equal
```



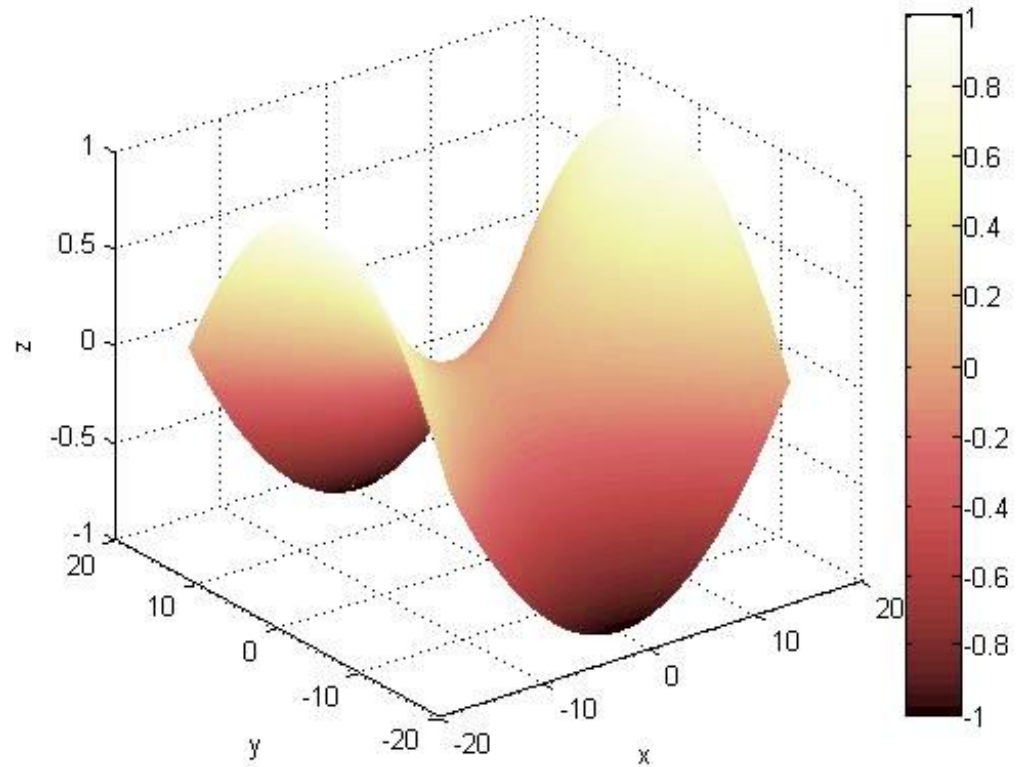
# Параболоид ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ

```
a=16;  
b=16;  
[X,Y]=meshgrid(-a:0.1:a,-b:0.1:b);  
Z=(X.^2/a^2 +Y.^2/b^2 );  
mesh(X,Y,Z);  
xlabel('x'), ylabel('y'),zlabel('z')  
colormap(pink)  
colorbar
```



# Параболоид гиперболический

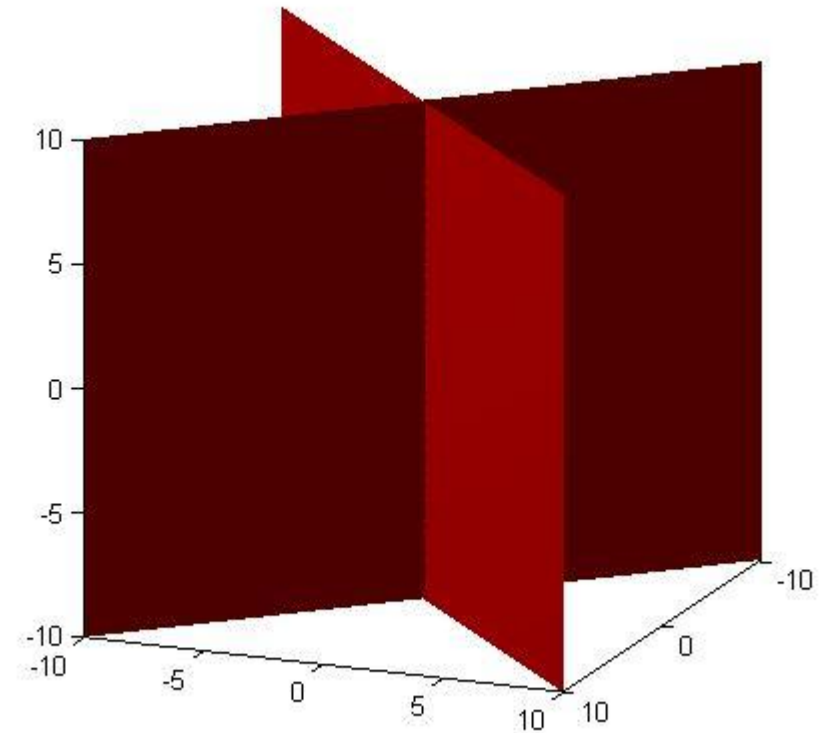
```
a=16;b=16;  
[X,Y]=meshgrid(-a:0.1:a,-b:0.1:b);  
Z=(X.^2/a^2 -Y.^2/b^2 );  
mesh(X,Y,Z)  
xlabel('x'),ylabel('y'),zlabel('z')  
colormap(pink)  
colorbar
```



# Пара пересекающихся плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

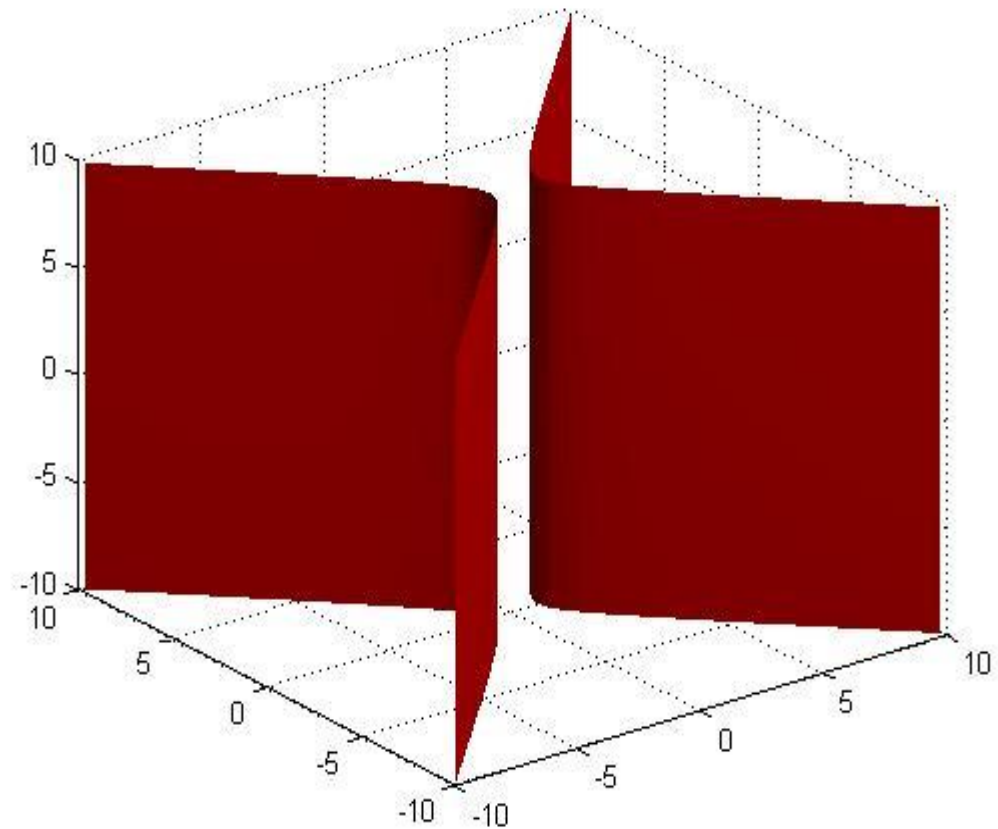
```
[X,Y,Z] = meshgrid(-10:0.3:10,-10:0.3:10,-10:0.3:10);  
a=1;b=1;  
V = (X.^2)./(a^2) - (Y.^2)./(b^2) - Z.*0;  
p=patch(isosurface(X,Y,Z,V,0));  
set(p,'FaceColor','red','EdgeColor','none');  
view(3);  
axis equal  
camlight
```



# Цилиндр гиперболический

```
[X,Y,Z] = meshgrid(-10:0.3:10,-10:0.3:10,-10:0.3:10);  
a=1;b=1;  
V = (X.^2)./(a^2) - (Y.^2)./(b^2) - 1;  
p=patch(isosurface(X,Y,Z,V,0));  
set(p,'FaceColor','red','EdgeColor','none');  
view(3);  
grid on  
camlight
```

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



# Цилиндр Эллиптический

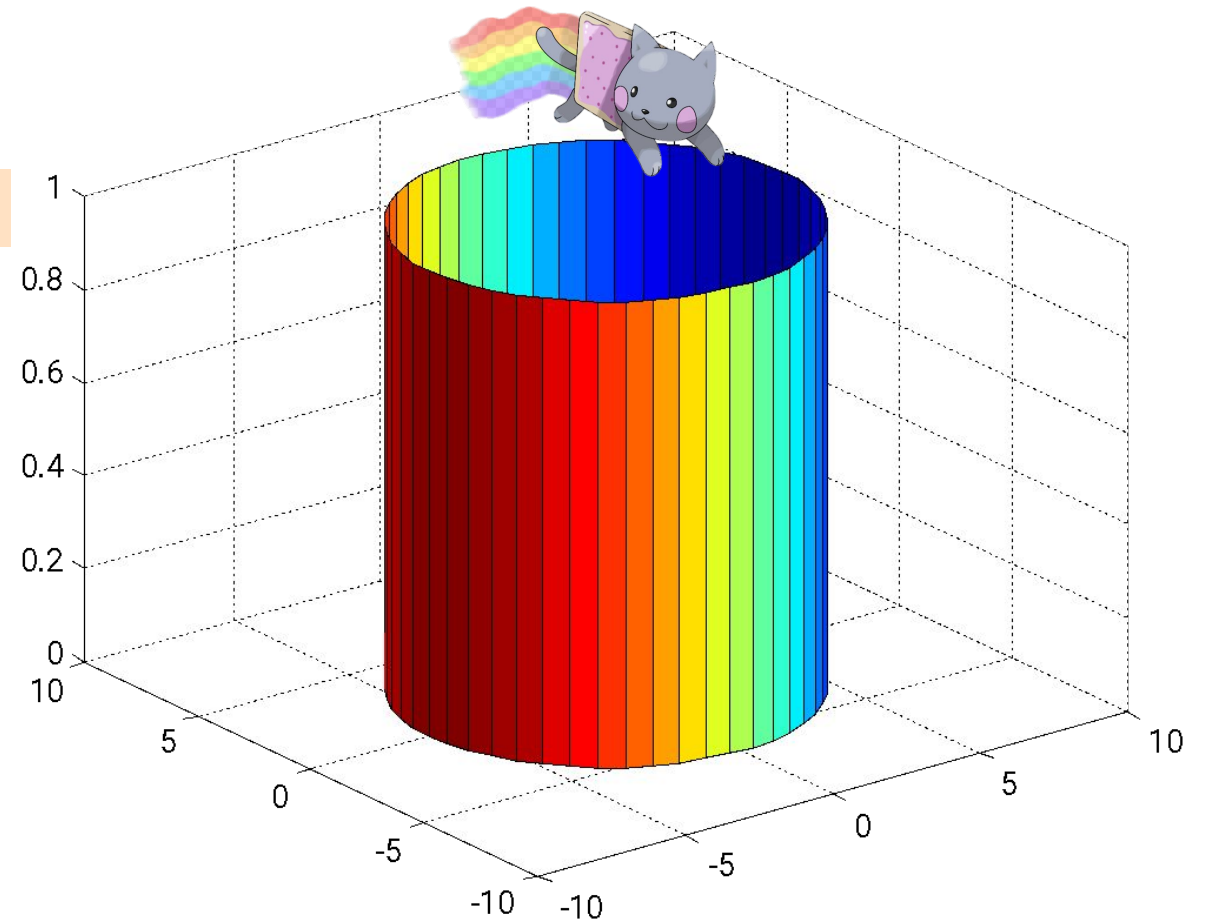
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

`[X,Y,Z] = cylinder(R,N), N – количество граней`

`[X,Y,Z] = cylinder(6,50);`

`C=X.*(Z-5);`

`surf(X,Y,Z,C)`

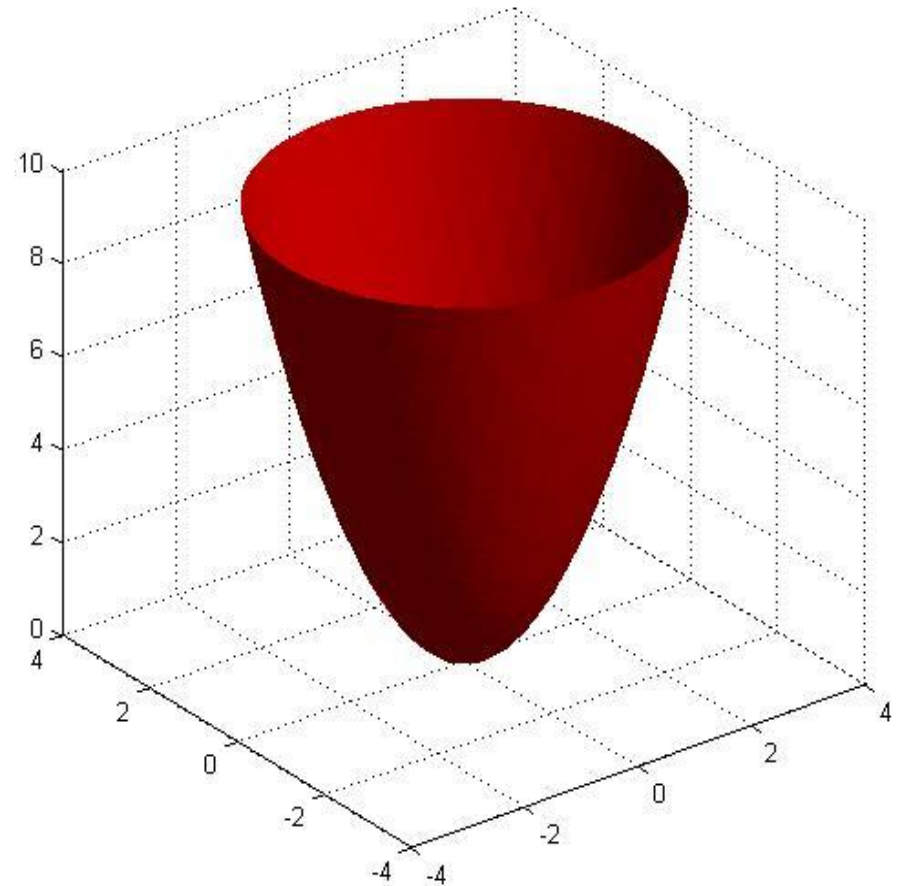


# Цилиндр гиперболический

```
[X,Y,Z] = meshgrid(-10:0.3:10,-10:0.3:10,-10:0.3:10);  
a=1;b=1;  
V = (X.^2)./(a^2) + (Y.^2)./(b^2) - Z.*1;  
p=patch(isosurface(X,Y,Z,V,0));  
set(p,'FaceColor','red','EdgeColor','none');  
view(3);  
grid on  
camlight
```



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

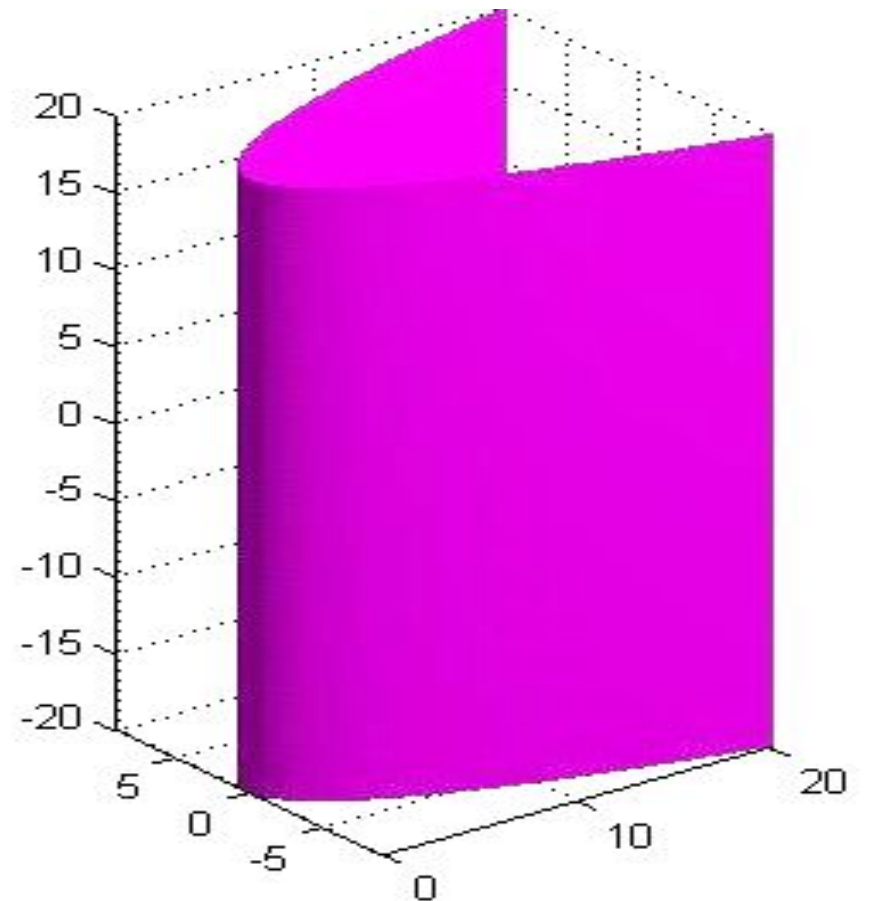


# Цилиндр параболический

```
[X,Y,Z] = meshgrid(-20:0.5:20,-20:0.5:20,-20:0.5:20);  
p=2;  
V = Y.^2-2*p*X;  
p=patch(isosurface(X,Y,Z,V,1));  
set(p,'FaceColor','m','EdgeColor','none');  
view(3);  
axis equal, grid on  
camlight
```



$$y^2 = 2px$$





# Функции для участков поверхностей и сеток

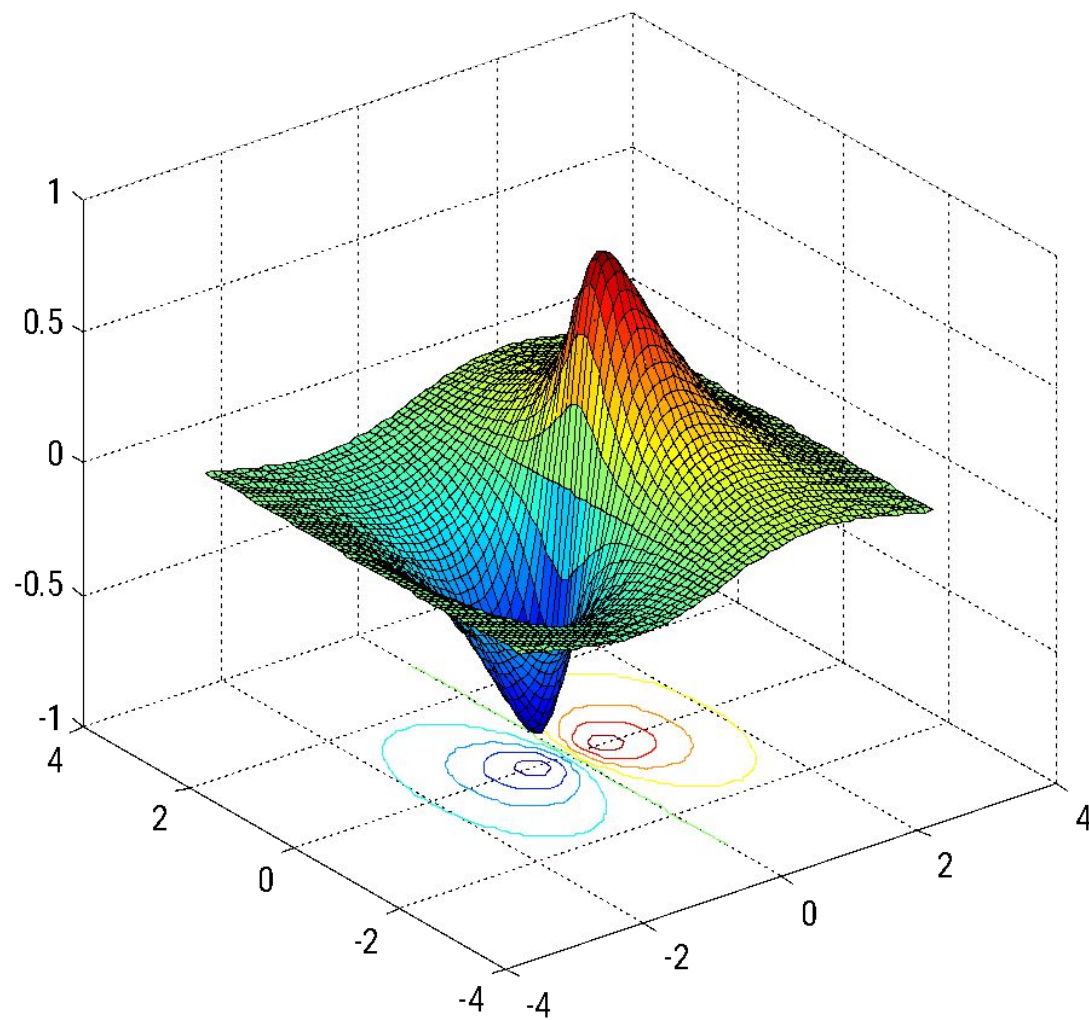
surf	Поверхностный участок
surfc	Контурный участок под поверхностным участком
surface	Примитивный поверхностный участок
surf1	Поверхностный участок с подсветкой на основе цветовой карты
surfnorm	Нормали поверхности
mesh	Участок поверхности сетки
meshc	Контурный участок под сетчатым поверхностным участком
meshz	Участок сетчатой поверхности с занавеской
hidden	Удаление скрытых линий из сетчатого графика
fsurf	Участок 3-D поверхности
fmesh	Участок 3-D сетки
fimplicit3	График 3-D неявной функции
waterfall	Участок водопада
ribbon	Участок ленты
contour3	Трёхмерный контурный график
peaks	Пример функции двух переменных
cylinder	Создать цилиндр
ellipsoid	Создать эллипсоид
sphere	Создать сферу
pcolor	Псевдоцветочный сюжет
surf2patch	Преобразование данных поверхности в данные патча



# surf() **surf()**

– дополнительное построение  
контурного графика проекции фигуры на  
опорную плоскость.

```
[X,Y]=meshgrid([-3:0.1:3]);  
Z=sin(X)./(X.^2+Y.^2+0.3);  
surf(X,Y,Z)
```



# surf1()

- имитирует оптические эффекты рассеивания,  
отражения и зеркального отражения света

```
[X,Y]=meshgrid([-3:0.1:3]);
```

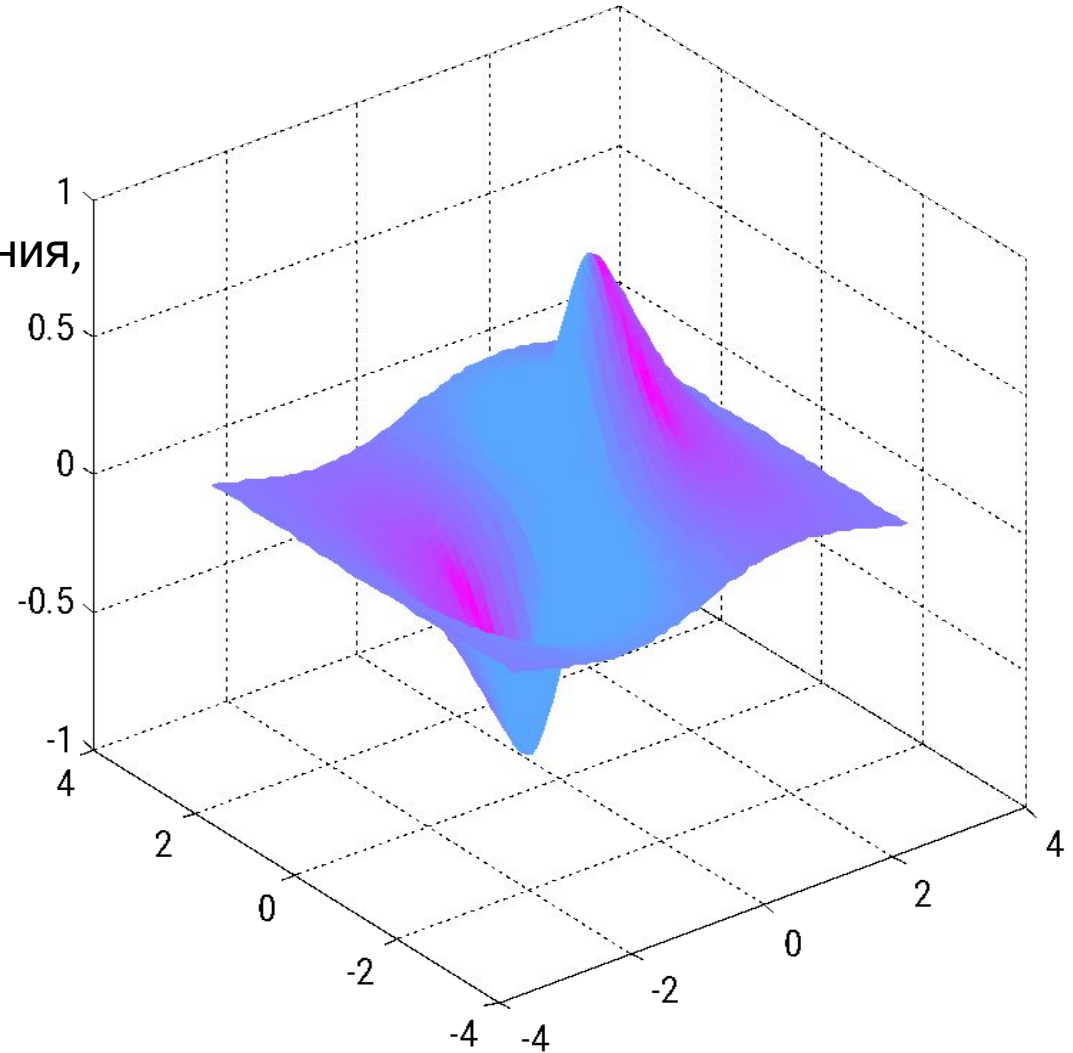
```
Z=sin(X)./(X.^2+Y.^2+0.3);
```

```
surf1(X,Y,Z)
```

```
colormap(cool)
```

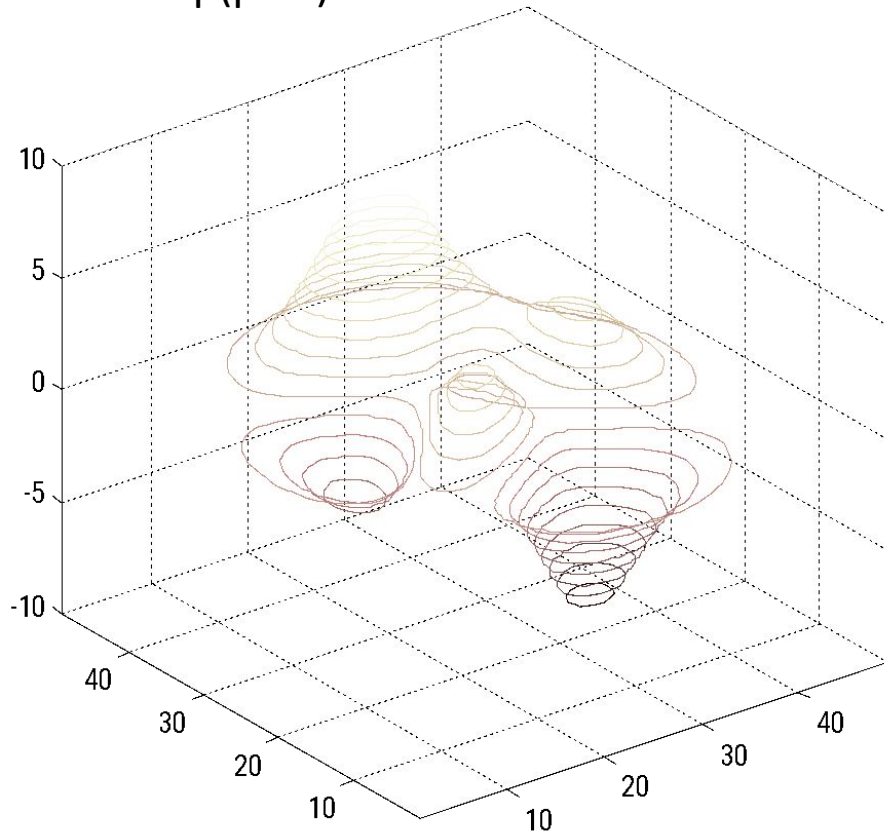
```
shading interp
```

```
colorbar
```

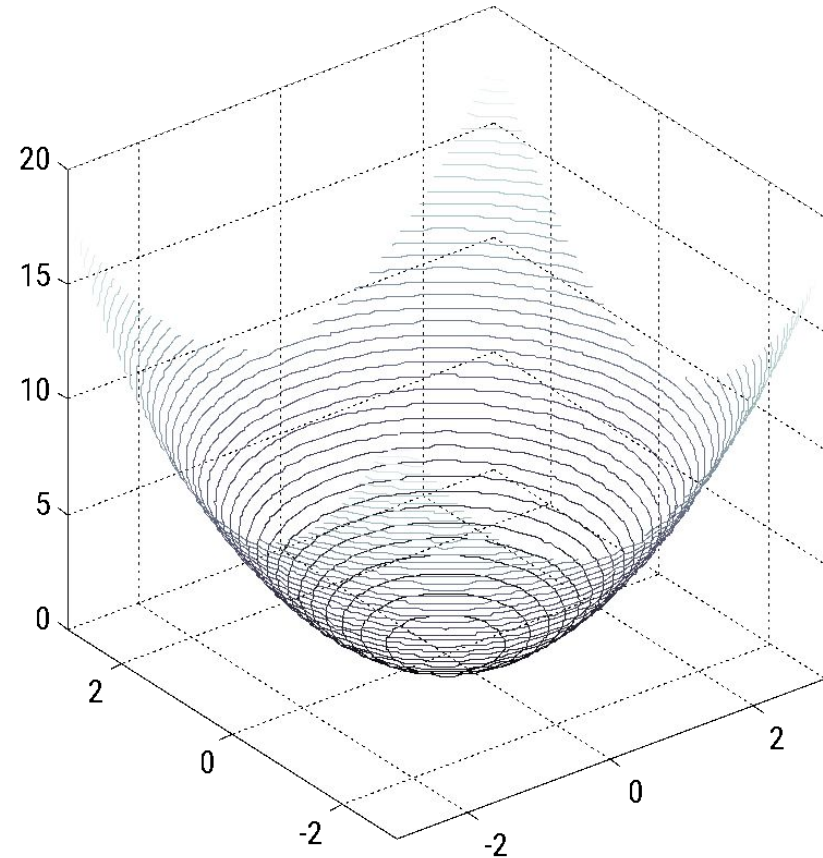


# contour3()

```
contour3(peaks,20)  
colormap(pink)
```



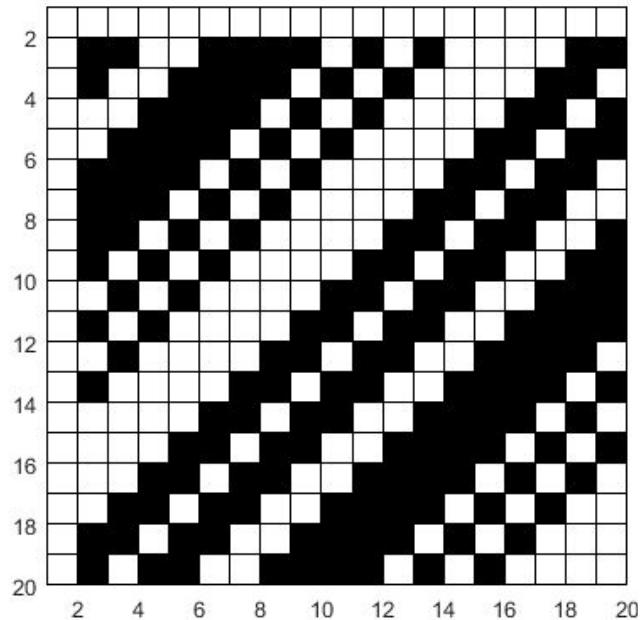
```
[x,y]=meshgrid(-3:0.1:3);  
z=x.^2+y.^2;  
contour3(x,y,z,40)  
colormap(bone)  
colorbar
```



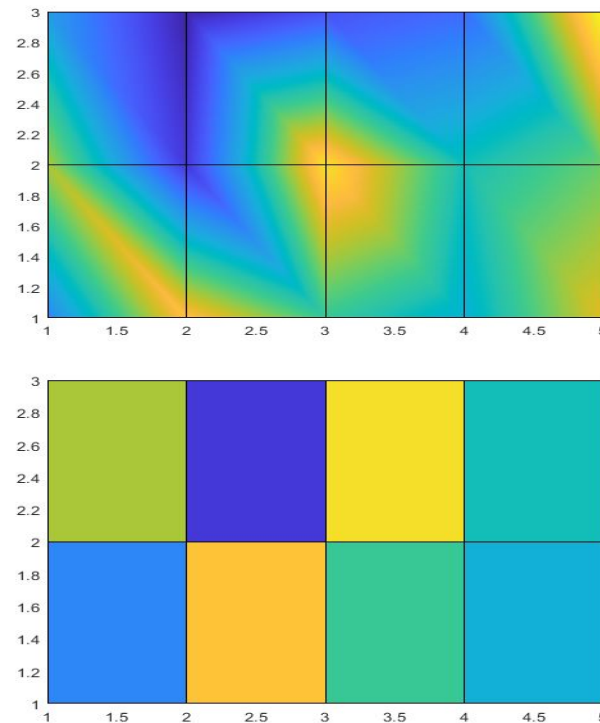
# pcolor()

- отображает матричные данные в виде массива цветных ячеек

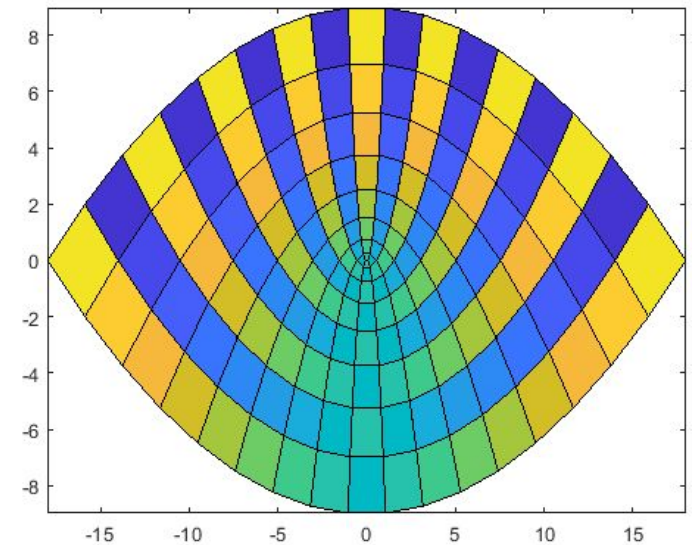
```
C = hadamard(20);  
pcolor(C)  
colormap(gray(2))  
axis ij  
axis square
```



```
C = [5 13 9 7 12; 11 2 14 8 10; 6 1 3 4 15];  
s = pcolor(C);  
s.FaceColor = 'interp';
```



```
[X,Y] = meshgrid(-3:6/17:3);  
XX = 2*X.*Y;  
YY = X.^2 - Y.^2;  
colorscale = [1:18; 18:-1:1];  
C = repmat(colorscale,9,1);  
pcolor(XX,YY,C);
```





# ПРИМЕНЕНИЕ



# АРХИТЕКТУРА



# Гиперболические конструкции



*Мост Мира, Тбилиси, 2010 год,  
Гиперболический параболоид*



*Первая гиперболическая башня,  
Нижний Новгород, 1896*





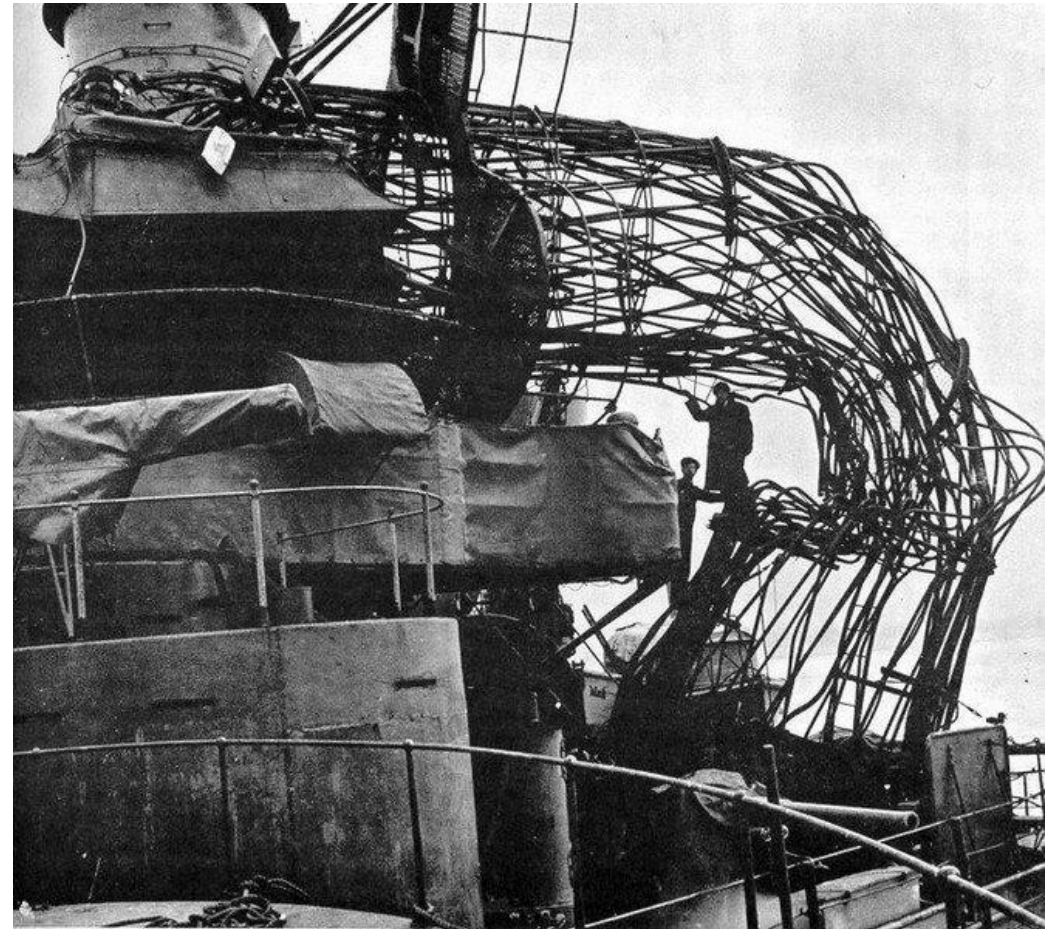
*«Яйцо», Индия, 2010 год  
Эллипсоид*




*«Хан Шатыр», Казахстан, 2010 год  
Совокупность парабол*

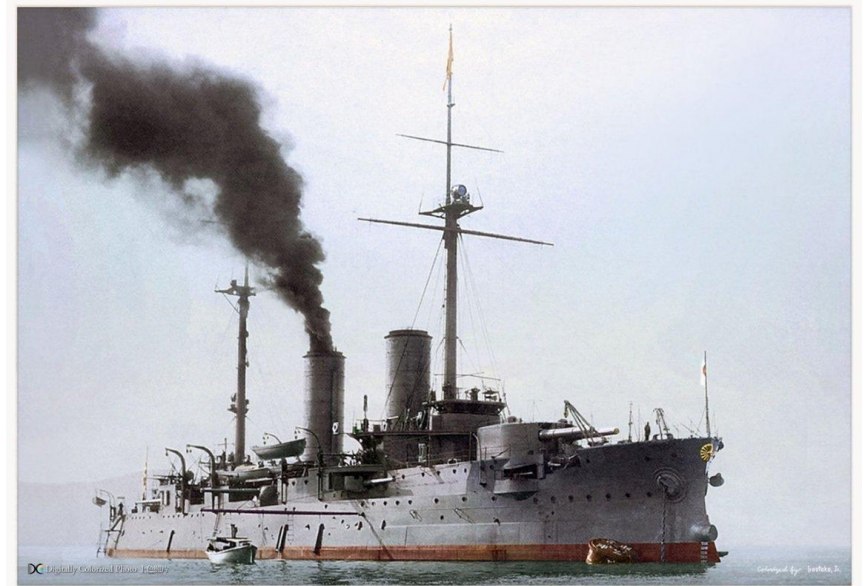
# Мачты

В начале 20-го века многие боевые корабли в США, строились с ажурными гиперболоидными мачтами.



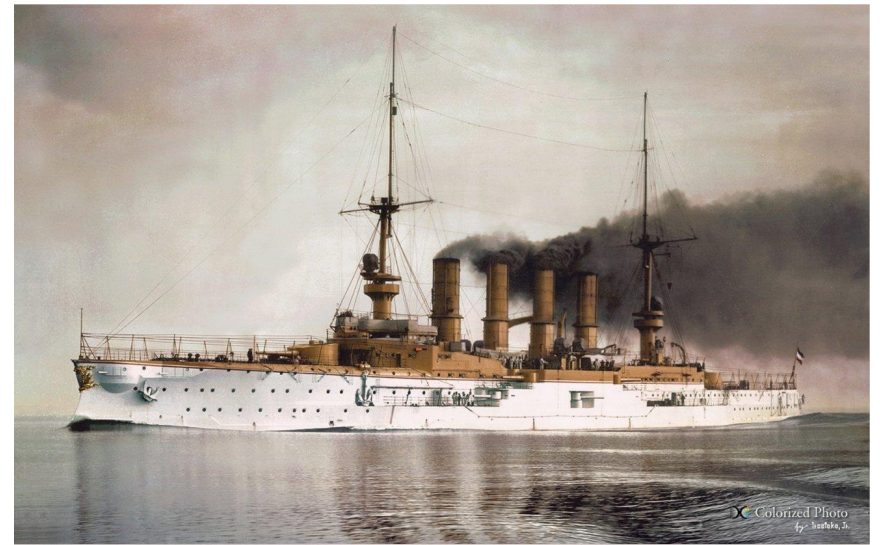


Imperial Russian battleship "Andrey Pervozvanny", 1912. 



November 2, 1907: IJN Battleship "Iwami" at Kure Naval Port.  
ex-Russian Battleship "Oryol" captured 1905.

戦艦石見 



Die Großer Kreuzer der Kaiserliche Marine S.M.S. Scharnhorst. 



# БИОЛОГИЯ

# Поверхность отклика выживаемости



Выживаемость камчатской горбуши как результат совокупного воздействия плотностной регуляции и внешних факторов среды

Текст научной статьи по специальности «Биологические науки»

Фельдман Марк Геннадьевич

Шевляков Евгений Александрович

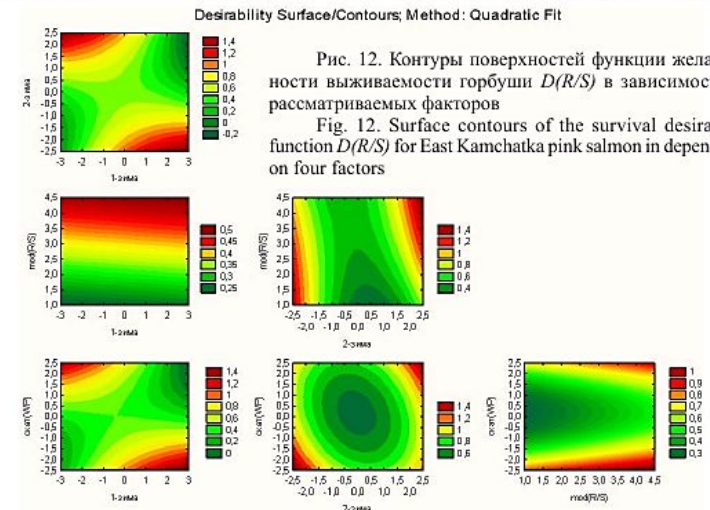
CC BY 172 31

## Из аннотации:

«...Зависимости выживаемости горбуши (R/S - количество потомков на производителя) от факторов внешней среды имеют нелинейный характер и описываются уравнением параболы. На основании таких взаимодействий строятся модели выживаемости горбуши.

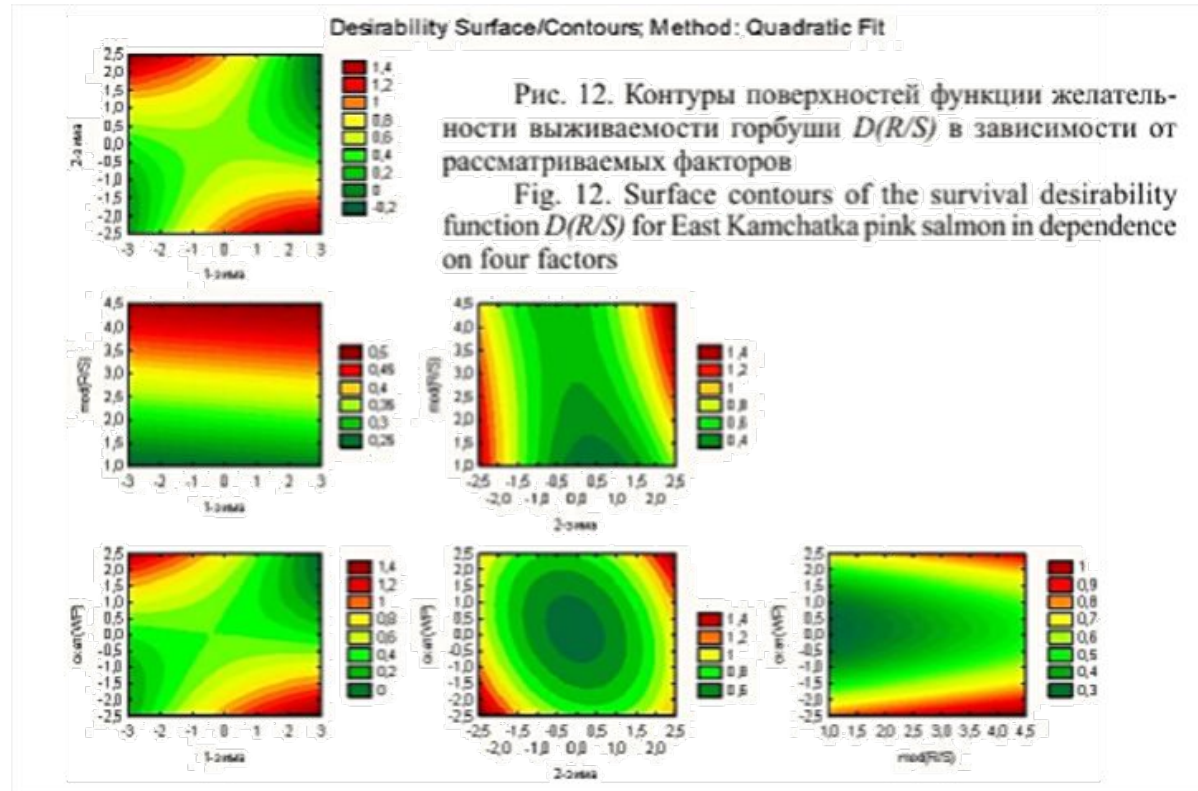
Основной метод моделирования - общая модель, где отклики выживаемости представляются как поверхности 2-го порядка. Полученные модели с высокой точностью описывают флюктуации наблюдаемых значений R/S...»

Попарное влияние факторов на выживаемость отображено в виде поверхностных контуров для средних значений отклика (рис. 12). Разным цветом на контурах выделены значения функции желательности (desirability) для выживаемости горбуши: минимальные значения желательности  $D$  обозначены оттенками зеленого цвета, средние значения  $D$  — оттенками желтого, а максимальные значения  $D$  — оттенками красного. Отклик от факторов в первую и вторую зимовку (1-зима и 2-зима) представляет собой поверхность в виде седла (гиперболический параболоид) с двумя максимумами и двумя минимумами. Такого же типа поверхности совокупного действия факторов второй зимы 2-зима и плотностной регуляции, индекса в ранний морской период жизни и в первую зиму. Совместное действие факторов индекса с индексом второй зимы 2-зима и плотностного фактора представляет собой поверхность с одним минимумом. Таким образом, можно заключить, что поверхностные контуры имеют нетривиальные, четко обусловленные зависимости выживаемости от рассматриваемых факторов (исключая совместное действие факторов 1-зима и 2-зима, где прослеживается только очень слабая линейная связь).



Отрывок из статьи

«...Отклик от факторов в первую и вторую зимовку представляет собой поверхность в виде седла (гиперболический параболоид) с двумя максимумами и двумя минимумами...»



# Причины резкого снижения численности горбуши

Итак, сделав важные выводы о том, что выживаемость горбуши коррелирует с колебаниями климатических факторов, таких как температура и циклоническая активность, можно сделать еще один важный вывод: изменения показателей выживаемости горбуши являются суммарным результатом плотностной регуляции и изменений окружающей среды. Соответственно и динамика популяционных показателей горбуши сама по себе является хорошим индикатором условий окружающей среды, ее можно использовать в прогнозировании других видов тихоокеанских лососей, жизненный цикл которых длиннее. Ранее (Фельдман, 2013; Фельдман и др., 2014) уже была показана возможность прогнозирования показателя и подходов кеты и кижуча методом распределенных лагов, где в качестве предиктора использовался показатель горбуши, модели показали высокую сходимость фактических и прогнозных значений. Прогнозирование же динамики популяционных показателей самой горбуши оставалось тогда проблемой, попытка решения которой сделана в данной работе.



A photograph of a radio observatory featuring a series of large, white, parabolic radio telescope dishes. The dishes are arranged in a line, receding into the distance. Each dish is supported by a complex metal structure and sits on a concrete base. The sky is a clear, pale blue. The word "ФИЗИКА" is overlaid in the center of the image.

**ФИЗИКА**



# Проектирование зеркальных и зеркально-оптических систем

**Теорема.** Отражающие поверхности второго порядка (параболоидальная, эллипсоидальная и гиперболоидальная) характеризуются следующими свойствами:

1) при расположении предмета в одном из фокусов сферическая aberrация исправлена ( $S_I=0$ ), при этом гомоцентричность пучка лучей не нарушается;

2) при выполнении п. 1 кома третьего порядка не зависит от положения входного зрачка ( $s_p$ );

3) при выполнении п. 1 астигматизм третьего порядка зависит от положения входного зрачка ( $s_p$ ): при расположении предмета и входного зрачка в сопряженных фокусах  $F_1$  и  $F_2$  соответственно он исправлен;

4) при выполнении п. 1 дисторсия третьего порядка зависит от положения входного зрачка: при  $s_p=0$  и  $s_p = \frac{2r_0}{2+e}$  исправлена;

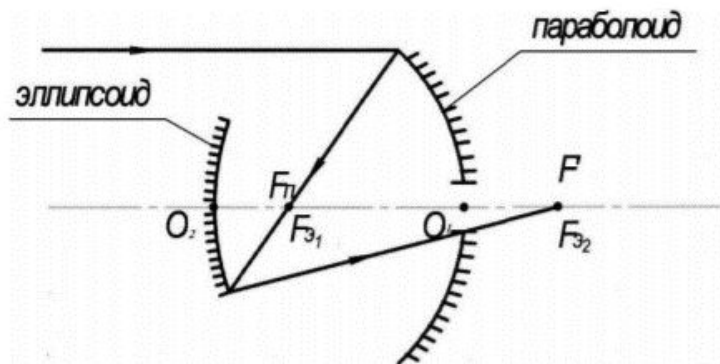
5) кривизна поверхности изображения не зависит от положения входного зрачка ( $s_p$ ) и эксцентриситета ( $e$ ), так как  $S_{IV} = \Phi = 2/r_0$ .



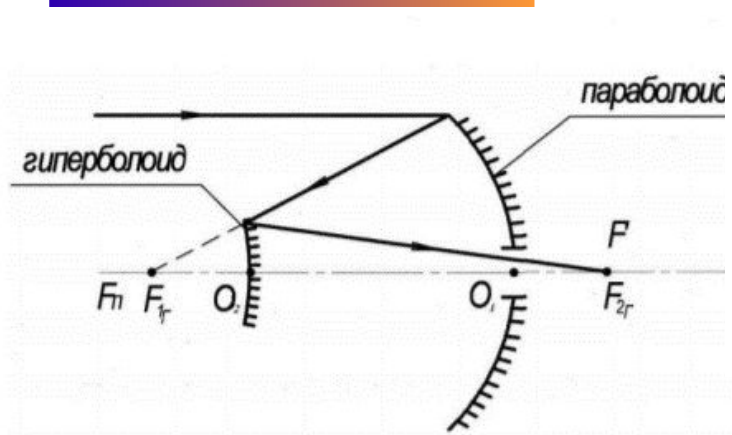
# Двухзеркальные объективы из асферических поверхностей второго порядка

Принципиальные оптические

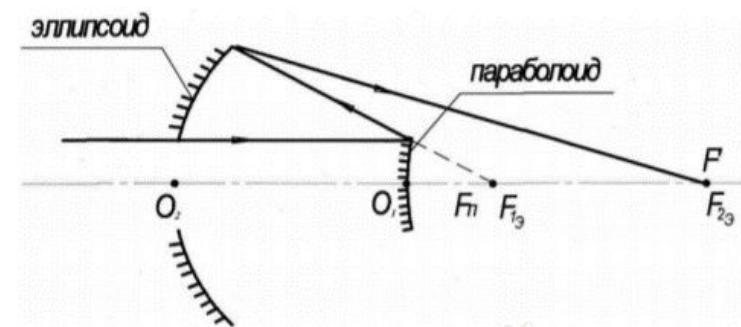
Объектив



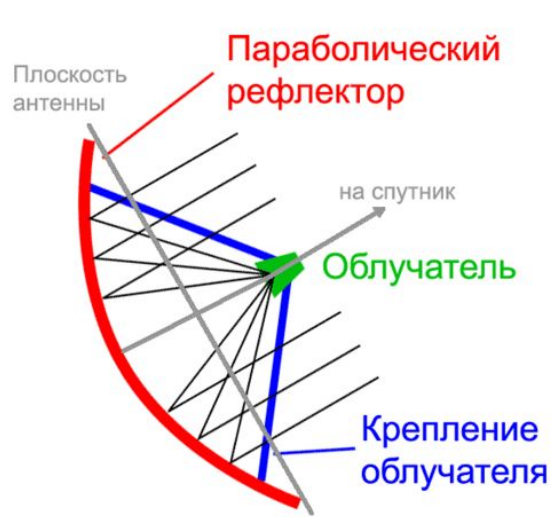
Объектив



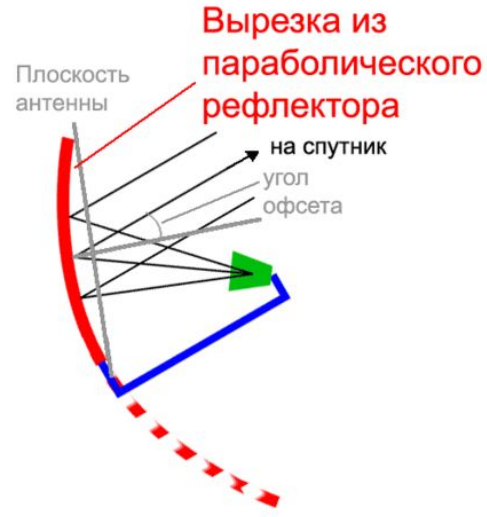
Реверсивный



# Антенны



Прямофокусная антенна



Офсетная антенна

## Двухзеркальные антенны

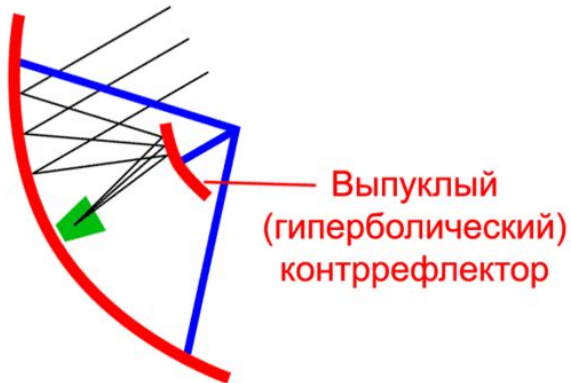


схема Кассенгрена

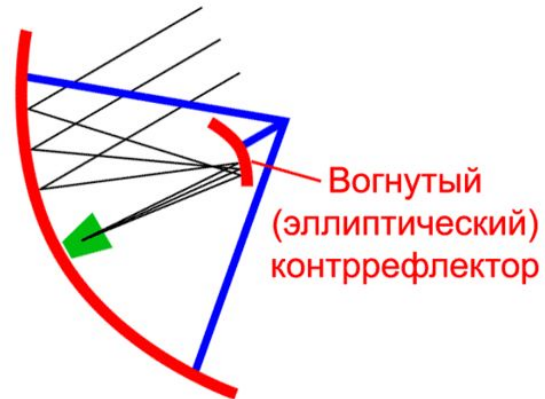


схема Грегори

Вогнутый (эллиптический) контррефлектор





# ХИМИЯ

кристаллография

# Поверхности 2 порядка как характеристика кристалла и его свойств

Таблица 3.1. Влияние симметрии кристалла на форму характеристической поверхности

Кристаллографическая категория	Значения компонент тензора	Форма поверхности
Высшая	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$	Сфера
Средняя	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$	Эллипсоид вращения
Низшая	$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$	Трехосный эллипсоид



Таблица 3.5. Симметрия теплового расширения кристаллов

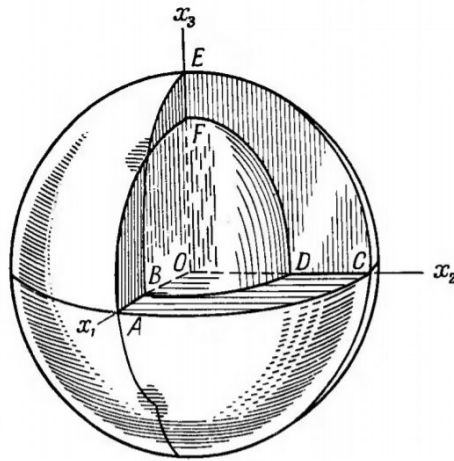
Сингония	Форма эллипсоида коэффициентов теплового расширения	Число независимых параметров	Независимые параметры
Кубическая	Сфера	1	$\alpha$
Ромбодрическая, гексагональная, тетрагональная	Эллипсоид вращения	2	$\alpha_{\parallel}$ и $\alpha_{\perp}$ (по отношению к оси $c$ )
Ромбическая	Трехосный эллипсоид	3	$\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}$ вдоль главных кристаллографических осей
Моноклинная		4	$\alpha$ вдоль оси $b$ , два значения $\alpha$ вдоль двух взаимно перпендикулярных осей эллипсоида в плоскости $(010)$ , угол между одной из этих осей и осью $a$ или $c$
Триклинная		6	три значения $\alpha$ вдоль трех главных осей, три угла между этими осями и осями координат

# Волновая поверхность двуосного кристалла

**Волновая поверхность** — поверхность скоростей распространения света в кристалле или «геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе».

Кристаллы низшей категории – **двуосные**

Их волновая поверхность состоит из частично пересекающихся сфер и эллипсоидов



Общий вид и сечение волновой поверхности двуосного кристалла [3]

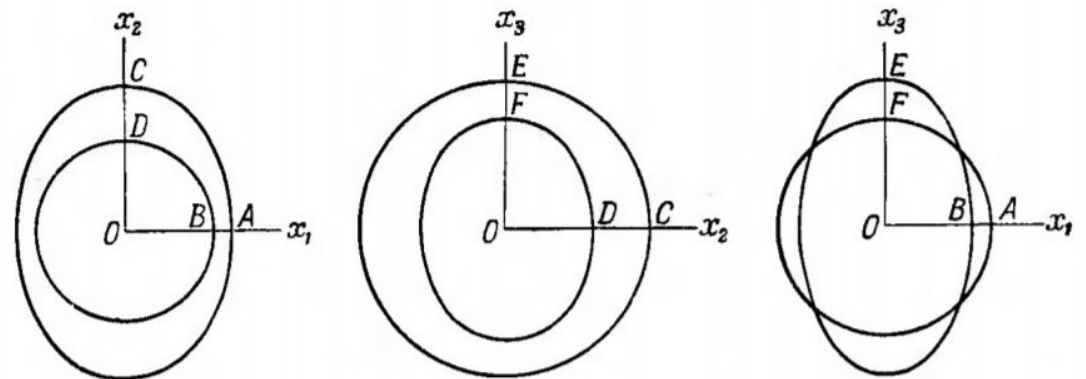


Рис. 3.4. Сечения волновой поверхности двуосных кристаллов координатными плоскостями [3]

# ВЫВОДЫ

Теория поверхностей второго порядка находит свое применение во многих областях науки и жизни.

Интерес к ней вряд ли когда-нибудь будет исчерпан.



# ИСТОЧНИКИ

- <https://yandex.ru/collections/api/links/redirect/?url=https%3A%2F%2Fcyberleninka.ru%2Farticle%2Fn%2Faberratsionnye-svoystva-otrazhayuschih-poverhnostey-vtorogo-poryadka%2Fviewer&vid=14401811598899858> - «Аберрационные свойства отражающих поверхностей второго порядка» Андреев Л.Н., Комарова Ю.А.
- <https://cyberleninka.ru/article/n/vyzhivaemost-kamchatskoy-gorbushi-kak-rezultat-sovokupnogo-vozdeystviya-plotnostnoy-regulyatsii-i-vneshnih-faktorov-sredy> - «Выживаемость камчатской горбуши как результат совокупного воздействия плотностной регуляции и внешних факторов среды», Фельдман М.Г., Шевляков Е.А.
- <https://ru.wikipedia.org>
- <https://cyberleninka.ru> – все научные статьи взяты отсюда
- <https://zen.yandex.ru/media/marin/russkie-machty-amerikanskih-linkorov-5d81fc141e8e3f00ae70f14e> - фото военных кораблей разных стран 20 века в цвете
- <https://www.mathworks.com> – теория по матлабу
- <https://e-koncept.ru/2015/65340.htm> - Шкода Ю. И. «Кривые и поверхности второго порядка в архитектуре» // Научно-методический электронный журнал «Концепт»
- «Кристаллофизика» // Семенова О.Р.
- [https://studopedia.ru/4\\_126336\\_funktsiya-otklika-faktori-parametri-i-trebovaniya-k-nim.html](https://studopedia.ru/4_126336_funktsiya-otklika-faktori-parametri-i-trebovaniya-k-nim.html) - «Функция отклика. Факторы, параметры и требования к ним»
- <https://zen.yandex.ru/media/marin/russkie-machty-amerikanskih-linkorov-5d81fc141e8e3f00ae70f14e> - Русские мачты американских линкоров



# ВОПРОСЫ

