



# Основы анализа данных.

## Метод наименьших квадратов

### Лекция 6

---

КМАИ

**Суть метода наименьших  
квадратов**

**Метод наименьших квадратов  
для линейной функции**

**Метод наименьших квадратов  
для квадратичной функции**

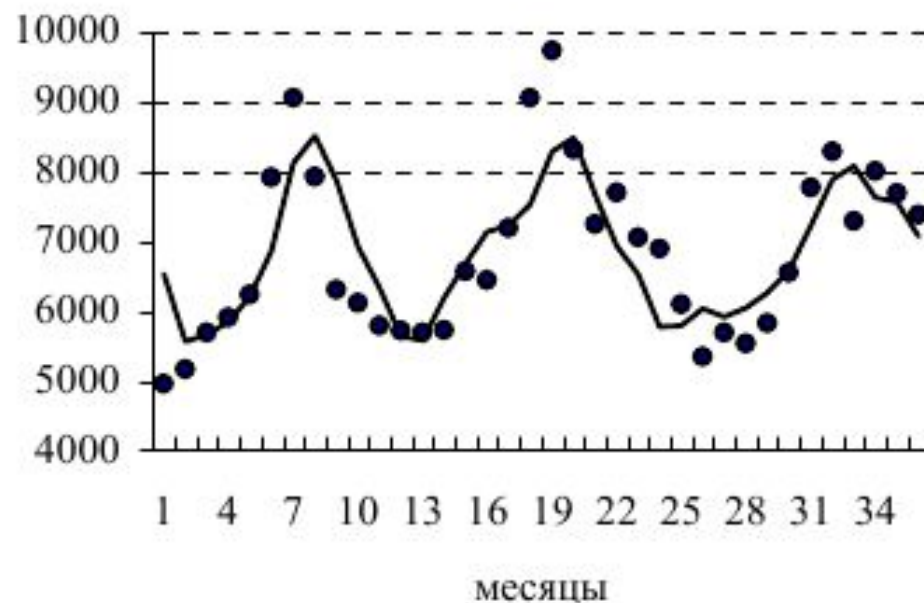
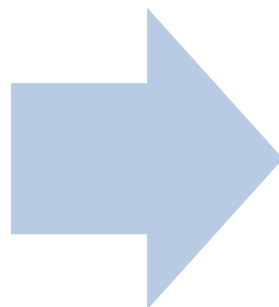
**Матричный вид метода  
наименьших квадратов**

**Фильтр Калмана**



Наблюдаемая  
закономерность  
 $y_1, \dots, y_M$

$x_1, \dots, x_M$



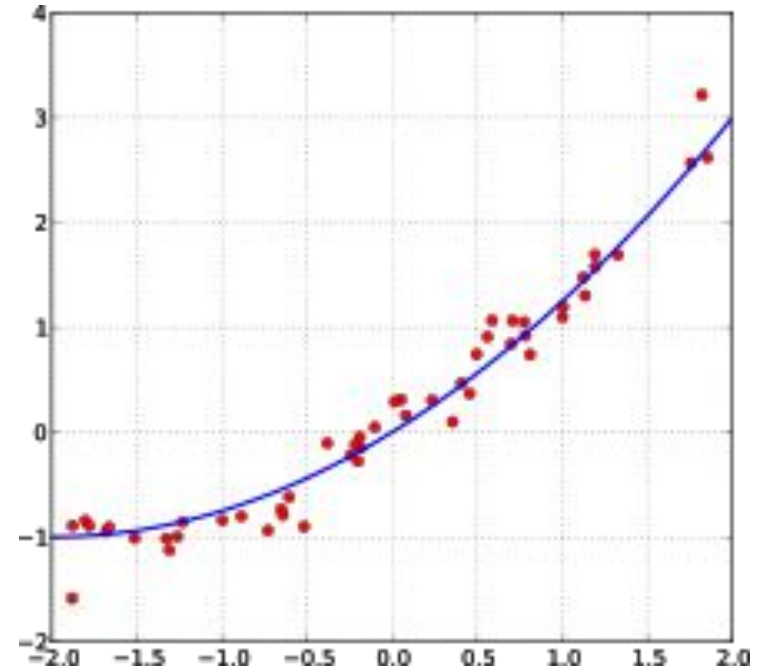
$$y_i = f_i(x, a) + \varepsilon_i \quad \text{- Предполагаемая зависимость}$$



**Метод наименьших квадратов** — математический метод, основанный на минимизации суммы квадратов отклонений некоторых функций от искомым переменных, применяемый для нахождения параметров функции аппроксимации.

$$y_i = f_i(x) + \varepsilon_i$$

$$\sum (y_i - f_i(x))^2 \rightarrow \min$$



Функция  
неправдоподобия



**Функция правдоподобия** – функция максимальное значение которой соответствует наилучшему значению параметров интерполяции.

$$\hat{a}_{\text{МП}} = \arg \max L(x_1, \dots, x_n | a)$$

**Условие максимального правдоподобия**


$$\frac{dl(x, a)}{da} = 0, \quad l(x, a) = \ln(L(x_1, \dots, x_n | a))$$


***Теорема:** Не существует другого метода обработки результатов эксперимента, который дал бы лучшее приближение к истине, чем метод максимального правдоподобия.*



$$L = \sum (y_i - f_i(x, a))^2 \rightarrow \min$$

$$y_i = f_i(x, a) + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$$


$$\frac{dL}{da} = \frac{y - f(x, a)}{\sigma^2} = 0$$


$$y - f(x, a) = 0$$



**Суть метода наименьших  
квадратов**

**Метод наименьших квадратов  
для линейной функции**

**Метод наименьших квадратов  
для квадратичной функции**

**Матричный вид метода  
наименьших квадратов**

**Фильтр Калмана**

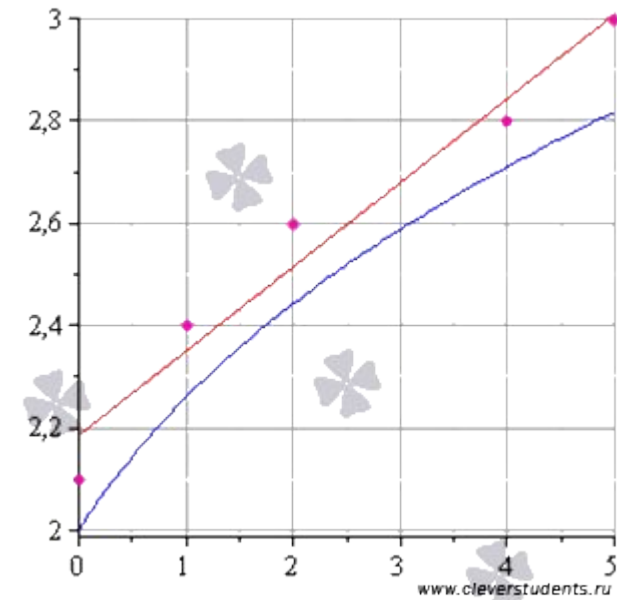


Составляется и решается система из двух уравнений с двумя неизвестными.

$$y_i = f_i(x) + \varepsilon_i \longrightarrow y_i = ax_i + b + \varepsilon_i$$

Функция неправоподобия:

$$L(a, b) = \sum (y_i - (ax_i + b))^2 \rightarrow \min$$





Производная по параметрам:

$$\frac{dL(a, b)}{da} = 0 \quad \rightarrow \quad -2 \sum_{i=1}^M (y_i - (ax_i + b))x_i = 0$$
$$\frac{dL(a, b)}{db} = 0 \quad \rightarrow \quad -2 \sum_{i=1}^M (y_i - (ax_i + b)) = 0$$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^M x_i y_i - \sum_{i=1}^M x_i \sum_{i=1}^M y_i}{n \sum_{i=1}^M x_i^2 - (\sum_{i=1}^M x_i)^2}$$

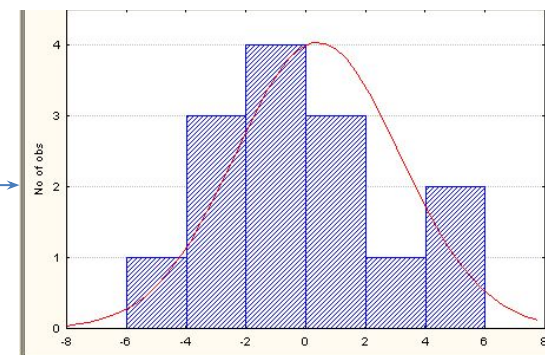
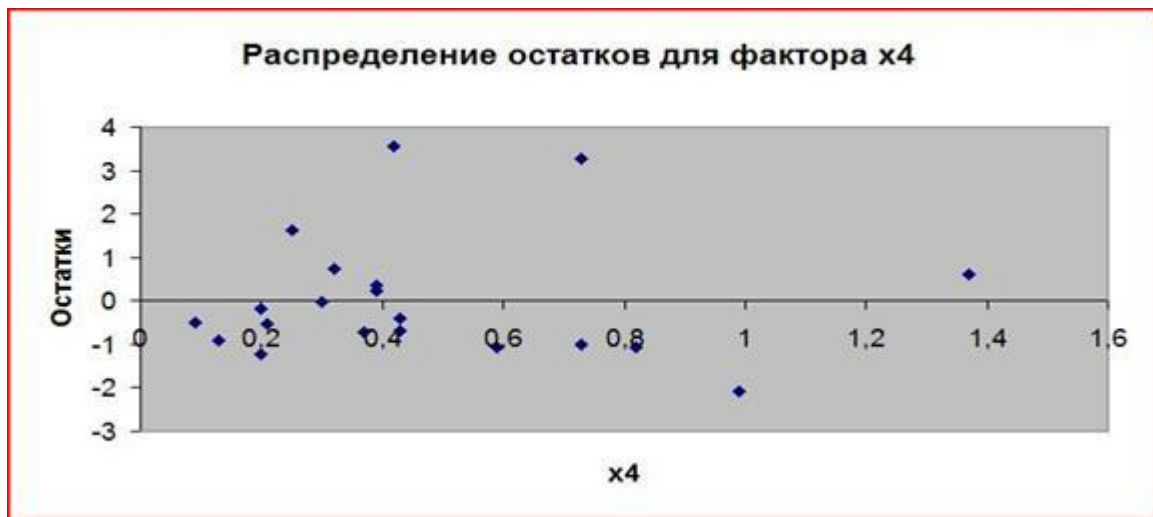
$$b = \frac{\sum_{i=1}^M y_i - a \sum_{i=1}^M x_i}{n}$$



## Погрешность МНК:

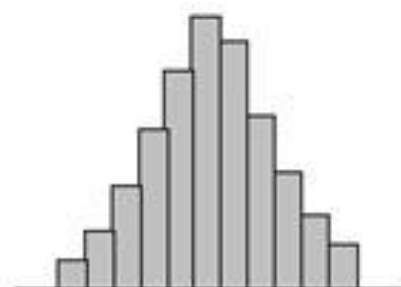
$$r = \sum (y_i - f_i(x_i)) = \sum (y_i - (ax_i + b))$$

$$r^2 = \sum (y_i - f_i(x_i))^2 = \sum (y_i - (ax_i + b))^2 \rightarrow \min$$

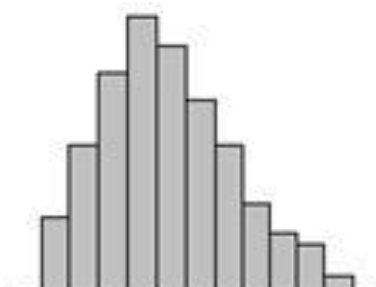


## Проверка распределения остатков:

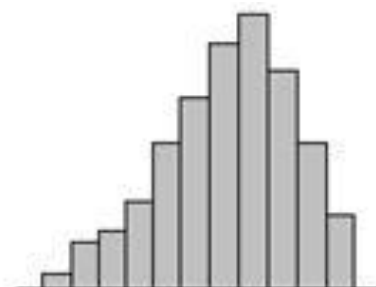
### 1. Визуально.



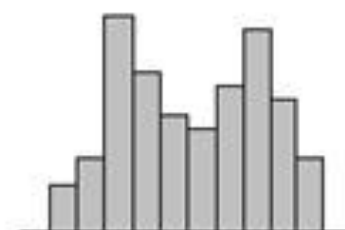
а). Нормальный тип



б). Положительно скошеное распределение



в). Отрицательно скошеное распределение



г). Двухгорбый тип

### 2. Сравнивая с табличным значением статистики хи-квадрат.



**Суть метода наименьших  
квадратов**

**Метод наименьших квадратов  
для линейной функции**

**Метод наименьших квадратов  
для квадратичной функции**

**Матричный вид метода  
наименьших квадратов**

**Фильтр Калмана**



Квадратичная аппроксимационная функция.

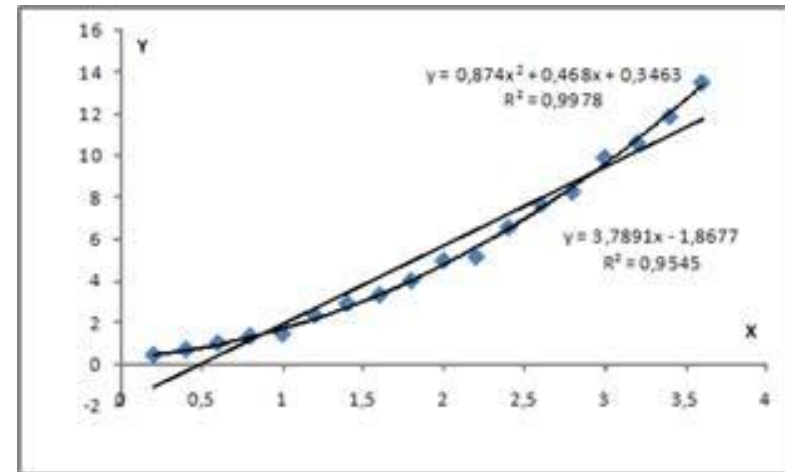
$$y_i = f_i(x) + \varepsilon_i$$

$$y_i = a_1 x_i^2 + a_2 x_i + a_3 + \varepsilon_i$$

Функция неправдоподобия:

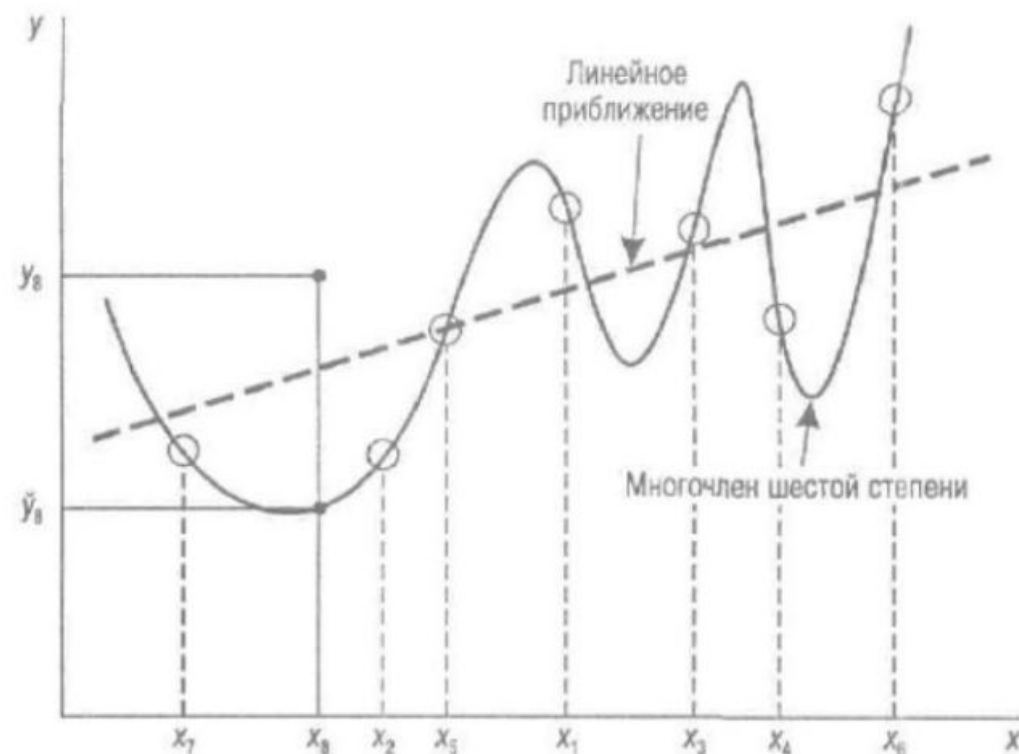
$$L(a, b) =$$

$$= \sum (y_i - (a_1 x_i^2 + a_2 x_i + a_3))^2$$



# Проблема выбора степени полинома

1. Условие минимизации суммы квадратов отклонений в точке.
2. В других точках может наблюдаться эффект переобучения.
3. Вычислительная сложность.



## Решение:

Увеличение количества измерений



**Суть метода наименьших  
квадратов**

**Метод наименьших квадратов  
для линейной функции**

**Метод наименьших квадратов  
для квадратичной функции**


**Матричный вид метода  
наименьших квадратов**

**Фильтр Калмана**



$$y_i = a_1 x_i^2 + a_2 x_i + a_3 + \varepsilon_i$$

← Квадратичная  
аппроксимационная  
функция.


$$y_1 = a_1 x_1^2 + a_2 x_1 + a_3 + \varepsilon_i$$

$$y_2 = a_1 x_2^2 + a_2 x_2 + a_3 + \varepsilon_i$$

...

$$y_M = a_1 x_M^2 + a_2 x_M + a_3 + \varepsilon_i$$


$$Y = AX + U$$





$$Y = AX + U$$

$$U = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_M \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}^T$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_M^2 & x_M & 1 \end{bmatrix}^T$$



$$Y = AX + U$$

$$\downarrow U \rightarrow \min$$

$$(Y - AX)^T (Y - AX) \rightarrow \min$$

$$\downarrow$$

$$(X^T X)A = X^T Y \longrightarrow A = (X^T X)^{-1} X^T Y$$



$$(X^T X)A = X^T Y$$

Статистически  
независимые  
наблюдения.

Ковариация оценок наблюдений:

$$V(A) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

Ковариация ошибок наблюдений:

$$V(U) = \sigma^2 (U^T U)^{-1} = \sigma^2 I \longrightarrow W = V(U)^{-1}$$

$$A = (X^T W X)^{-1} X^T W Y$$



**Суть метода наименьших  
квадратов**

**Метод наименьших квадратов  
для линейной функции**

**Метод наименьших квадратов  
для квадратичной функции**

**Матричный вид метода  
наименьших квадратов**

**Фильтр Калмана**



**Фильтр Калмана** — эффективный рекурсивный фильтр, оценивающий вектор состояния динамической системы, используя ряд неполных и зашумленных измерений.

Предположения фильтра Калмана:

- гауссовы априорные и апостериорные плотности вероятности вектора состояния на любой момент времени (в том числе начальный)
- гауссовы формирующие шумы
- гауссовы шумы наблюдений
- белые шумы наблюдений
- линейность модели наблюдений
- линейность модели формирующего процесса



1. Определение МНК и функция правдоподобия.
2. МНК линейной функции
3. МНК квадратичной функции
4. Матричный вид МНК

