Формулы алгебры высказываний

Понятия логической формулы и ее ранга

- **Опр.** Высказывание с заданным значением истинности называется логической постоянной (F и T), а высказывание, значение истинности которого не задано, называется логической переменной.
- **Опр.** Всякое простое высказывание (логическая переменная или логическая постоянная), а также всякое сложное высказывание, образованное из простых с помощью логических операций, называется логической формулой.

- Обозначение: Ф, Ф1, Ф2, … Если в формулу Ф входят высказывания X1, X2,…, Xп, то в общем виде формулу обозначают Ф(X1, X2,…, Xn).
- Например:
- 1) $Ф1 = A \lor \neg B \land (C \to A)$
- 2) $Ф2 = ((A \to У) \land B) \leftrightarrow (\neg X \lor У)$

Ранг формулы

- **Опр.** Рангом формулы А называется число всех логических операций, с помощью которых эта формула образована.
- Обозначение: r (Ф)
- Так, r (Ф1) = 4, r (Ф2) = 5
- (!!) Очевидно, что ранг простого высказывания равен нулю.

Правила чтения формул

- 1. Если скобки отсутствуют, то логические операции выполняются в следующей очередности: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквиваленция.
- 2. Если без скобок записаны друг за другом несколько одинаковых операций, то они выполняются последовательно слева направо.
- 3. Операция отрицания записывается без скобок и применяется ко всей формуле, записанной под символом отрицания.
- 4. При необходимости изменить естественный порядок действий часть формулы заключается в скобки.

Классификация формул. Понятие о их равносильности

- **Опр.** Формула Ф(X1,…, Xn) называется выполнимой, если она прини-мает значение 1 хотя бы при одном наборе значений X1,…, Xn.
- **Опр.** Формула Ф(X1,…, Xn) называется тождественно истинной (за-коном логики), если она принимает значение 1 при любом наборе значений X1,…, Xn.

Напр.: X ∨ X

- **Опр.** Формула Ф(X1,…, Xn) называется тождественно ложной (про-тиворечием), если она принимает значение 0 при любом наборе значений X1, …, Xn.

Напр.: X ∧ X

- Опр. Две формулы Ф1 и Ф2 называется равносильными, если они принимают одинаковые значения при каждом наборе значений X1, X2, …, Xn.
- Обозначение: Ф1 ≡ Ф2

- Решить вопрос о равносильности формул можно с помощью их истинностных таблиц.
- ПР. Докажем две равносильности, которые следует помнить.

1) $X \to У \equiv \overline{X} \vee У$

X	У	X→У	$\overline{X}$	$\overline{X} \vee У$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

2) $X \leftrightarrow У \equiv (X \vee \overline{У}) \wedge (\overline{X} \vee У)$

X	У	$X \leftrightarrow У$	$\overline{У}$	$X \vee \overline{У}$ A	$\overline{X}$	$\overline{X} \vee У$ B	$A \wedge B$
1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1

(!!) *Так как импликацию и эквиваленцию можно выразить через операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции, то любую формулу можно записать, используя только три логических символа.*

Основные равносильности алгебры высказываний

- 1. Операции конъюнкция и дизъюнкция коммутативны:
- $A \wedge B \equiv B \wedge A$
- $A \vee B \equiv B \vee A$
- 2. Операции конъюнкция и дизъюнкция ассоциативны:
- $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
- $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$

- 3. Операции конъюнкция и дизъюнкция связаны между собой свойством дистрибутивности:
- $A \wedge (B \vee C) \equiv A \wedge B \vee A \wedge C$
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- 4. Свойства логических констант:
- $A \wedge T \equiv A$
- $A \wedge F \equiv F$
- $A \vee T \equiv T$
- $A \vee F \equiv A$

5. Законы де Моргана:

$$\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$$

$$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$$

6. Свойства отрицания:

$$A \wedge \overline{A} \equiv F \qquad A \vee \overline{A} \equiv T$$

$$\overline{T} \equiv F \qquad \overline{F} \equiv T$$

$$\overline{\overline{A}} \equiv A$$

7. Законы идемпотентности (простого поглощения):

$$A \wedge A \equiv A \qquad A \vee A \equiv A$$

8. Равносильность, отменяющая импликацию:

$$A \to B \equiv \overline{A} \vee B$$

9. Равносильности, отменяющие эквиваленцию:

$$A \leftrightarrow B \equiv (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$$

$$A \leftrightarrow B \equiv A \wedge B \vee \overline{A} \wedge \overline{B}$$

10. Равносильности, отменяющие исключающую дизъюнкцию:

$$A \underline{\vee} B \equiv \overline{A} \wedge B \vee A \wedge \overline{B}$$

(!!) *Все приведенные свойства можно доказать с помощью истинностных таблиц.*

Они, в свою очередь, позволяют получить ряд других важных законов и тождеств уже без обращения к таблицам истинности, а с помощью так называемых равносильных преобразований.

Три основные формы мышления.

- **Понятие** – это форма мышления, в которой отражаются существенные признаки объектов, относящихся к данному понятию. Например, «Медиана треугольника – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны» (определение понятия «медиана треугольника»).
- **Суждение** – это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о существовании предметов, о связи между ними и их свойствами или отношениях между ними. Например, «В равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является биссектрисой и высотой» (теорема).
- **Умозаключение** – это форма мышления, посредством которой из одного или нескольких суждений получается новое суждение. Например, доказательство любой теоремы, например теоремы о медиане равнобедренного треугольника, представляет собой цепочку умозаключений.

Умозаключение как форма мышления

- Суждения образуются в мышлении двумя основными способами:

1. Непосредственно (с помощью суждения выражается результат восприятия). Например, суждение «эта фигура – окружность».

2. Опосредованно (суждение возникает в результате особой мыслительной деятельности, называемой умозаключением). Например, «множество данных точек плоскости таково, что их расстояние от одной точки одинаково; значит, эта фигура – окружность».

Законы логики, используемые в умозаключениях

1. **Закон тождества**: Каждая мысль, приводимая в данном умозаключении, при повторении должна иметь одно и то же устойчивое содержание: $A \to A$

2. **Закон противоречия**: не могут быть истинными две противоположные мысли об одном и том же предмете, взятом в одно и то же время и в одном и том же отношении: $\overline{A \wedge \overline{A}}$

3. **<u>Закон исключенного третьего</u>**: из 2-х противоречащих высказываний в одно и то же время и в одном и том же отношении одно непременно истинно: $A \vee \overline{A}$

4. **<u>Закон двойного отрицания</u>**: отрицание отрицания любого высказывания равносильно самому высказыванию: $\overline{\overline{A}} \leftrightarrow A$

5. **<u>Закон «из ложного что угодно»</u>**: ложное высказывание имплицирует любое высказывание: $\overline{A} \rightarrow (A \rightarrow B)$

6. **<u>Закон «modus ponens»</u> (утверждающий модус**, модус – философский термин, означающий свойство предмета, присущее ему не постоянно, а лишь в некоторых условиях): если истинна некоторая импликация и, кроме того, истинна посылка этой импликации, то истинно и ее следствие: $A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$

7. **Закон «modus tollens» (отрицающий модус)**: если истинна некоторая импликация и, кроме того, ложно следствие этой импликации, то ложна и ее посылка: $(A \to B) \land \overline{B} \to \overline{A}$

8. **Закон силлогизма**: Отношение «имплицировать» между высказываниями транзитивно (силлогизм – это умозаключение, в силу которого, признав истинность посылок, нельзя не согласиться с истинностью заключения, вытекающего из посылок): $(A \to B) \land (B \to C) \quad (A \to C)$

9. **Закон контрапозиции** (противопоставления): «Когда два явления так относятся друг к другу, что, если есть одно, необходимо есть и другое, то если второго нет, не будет и первого» Аристотель: $(A \to B) \leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{A})$

Понятие о теоремах. Прямая, обратная и противоположная теоремы. Необходимые и достаточные условия

- **Теорема** – это некоторая импликация высказываний, т.е. $T \equiv A \to B$

При этом высказывание А называется условием теоремы, а В – ее заключением.

Если в теореме А и В простые высказывания, то теорема называется простой, в противном случае - сложной.

Пусть $T \equiv A \rightarrow B$ (1) – некоторая теорема (прямая), тогда:

1) теорема $T_{об.} \equiv B \rightarrow A$ (2) называется обратной теоремой;

2) теорема $T_{пр.} \equiv \overline{A} \rightarrow \overline{B}$ (3) называется противоположной теоремой;

3) теорема $T_{пр.об.} \equiv \overline{B} \rightarrow \overline{A}$ (4) называется теоремой, противоположной к обратной.

Напр.:

1) Пусть Т – «Если четырехугольник является прямоугольником, то его диагонали равны», тогда

$T_{об}$ - «Если в четырехугольнике диагонали равны, то четырехугольник является прямоугольником»

$T_{пр.}$ - «Если четырехугольник не является прямоугольником, то его диагонали не равны»

$T_{пр.об.}$ – «Если в четырехугольнике диагонали не равны, то четырехугольник не является прямоугольником»

В рассмотренном примере теоремы (1) и (4) являются одновременно истинными, а теоремы (2) и (3) одновременно ложными. Контрпримером к теореме (2) является равнобочная трапеция.

Методы доказательств теорем

- I. Схемы прямого доказательства

1. Правило заключения: Если истинны формулы (утверждения) A и A → B, то будет истинна формула B.

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B \\ A\end{array}}{B}$$

2. Правило введения конъюнкции: Если истинны формулы (утверждения) A и B, то истинна и их конъюнкция.

$$\frac{\begin{array}{c}A \\ B\end{array}}{A \wedge B}$$

3. Правило удаления конъюнкции: Если истинна конъюнкция 2-х формул (утверждений), то каждая из них истинна.

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

4. Правило контрапозиции: Если утверждение A имплицирует утверждение B, то отрицание B имплицирует отрицание A.

$$\frac{A \to B}{\overline{B} \to \overline{A}}$$

5. Закон силлогизма: Если из формулы A следует формула B , а из формулы B следует формула C, то из A следует B.

$$\frac{\begin{array}{l} A \to B \\ B \to C \end{array}}{A \to C}$$

6. Правило доказательства разбора случаев:

$$\frac{\begin{array}{l} A \to C \\ B \to C \end{array}}{A \vee B \to C} \qquad \frac{\begin{array}{l} A \to C \\ A \to D \end{array}}{A \to C \wedge D}$$

Доказательство теорем методом от противного

Чтобы доказать теорему $T \equiv A \rightarrow B$ методом от противного предполагают, что T – ложное высказывание, т.е. $\overline{T}$ – истинное высказывание. Из этого предположения извлекают логические следствия, среди которых есть следствие S, которое:

- либо тождественно ложно,
- либо противоречит условию теоремы,
- либо противоречит аксиоме данной теории или теореме, истинность которой уже установлена,
- либо противоречит какому-либо другому следствию этой теоремы.

Если такое следствие найдено, то делают вывод, что $\overline{T}$, в действительности, ложное высказывание, т.е. теорема T истинна.

Упростите формулу с помощью равносильных преобразований:

1) $\overline{P} \to (\overline{P} \vee \overline{Q})$

2) $X \to Y \vee X \vee Y$

1) $\overline{P} \to (\overline{P} \lor \overline{Q})$

/ $\overline{P} \to (\overline{P} \lor \overline{Q}) \equiv \overline{\overline{P}} \lor (\overline{P} \lor \overline{Q}) \equiv (P \lor \overline{P}) \lor Q \equiv T \lor Q \equiv T$ /

2) $\overline{\overline{X} \to \overline{Y}} \lor X \lor \overline{Y}$

/ $\overline{\overline{X} \to \overline{Y}} \lor X \lor \overline{Y} \equiv (\overline{X} \land Y) \lor X \lor \overline{Y} \equiv (\overline{X} \lor X) \land (Y \lor X) \lor \overline{Y} \equiv T \land (Y \lor X) \lor \overline{Y} \equiv (Y \lor X) \lor \overline{Y} \equiv$
$(Y \lor \overline{Y}) \lor X \equiv T \lor X \equiv T$ /

Домашнее задание

Упростите формулу с помощью равносильных преобразований:

$$3)\quad (P \wedge Q \wedge S) \vee (\overline{P} \wedge S) \vee (\overline{Q} \wedge S)$$

$$4)\quad \overline{X \vee \overline{Y} \to \overline{\overline{X} \vee Y}}$$

Решение:

3) $(P \wedge Q \wedge S) \vee (\overline{P} \wedge S) \vee (\overline{Q} \wedge S)$

/ $(P \wedge Q \wedge S) \vee (\overline{P} \wedge S) \vee (\overline{Q} \wedge S) \equiv (P \wedge Q \wedge S) \vee (\overline{P} \vee \overline{Q}) \wedge S \equiv (P \wedge Q \wedge S) \vee \overline{P \wedge Q} \wedge S \equiv$

$S \wedge (P \wedge Q \vee \overline{P \wedge Q}) \equiv S \wedge T \equiv S$ /

4) $\overline{X \vee \overline{Y} \rightarrow \overline{\overline{X} \vee Y}}$

/ $\overline{X \vee \overline{Y} \rightarrow \overline{\overline{X} \vee Y}} \equiv \overline{\overline{X \vee \overline{Y}} \vee \overline{\overline{X} \vee Y}} \equiv \left(X \vee \overline{Y}\right) \wedge (\overline{X} \vee Y) \equiv X \leftrightarrow Y$ /