

Формулы алгебры высказываний

Понятия логической формулы и ее ранга

- **Опр.** Высказывание с заданным значением истинности называется логической постоянной (F и T), а высказывание, значение истинности которого не задано, называется логической переменной.
- **Опр.** Всякое простое высказывание (логическая переменная или логическая постоянная), а также всякое сложное высказывание, образованное из простых с помощью логических операций, называется логической формулой.

-
- Обозначение: $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \dots$. Если в формулу Φ входят высказывания X_1, X_2, \dots, X_n , то в общем виде формулу обозначают $\Phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
 - Например:
 - 1) $\Phi_1 = A \vee \neg B \wedge (C \rightarrow A)$
 - 2) $\Phi_2 = ((A \rightarrow Y) \wedge B) \leftrightarrow (\neg X \vee Y)$

Ранг формулы

- **Опр.** Рангом формулы A называется число всех логических операций, с помощью которых эта формула образована.
- Обозначение: $r(\Phi)$
- Так, $r(\Phi_1) = 4$, $r(\Phi_2) = 5$
- (!!) Очевидно, что ранг простого высказывания равен нулю.

Правила чтения формул

- 1. Если скобки отсутствуют, то логические операции выполняются в следующей очередности: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквиваленция.
- 2. Если без скобок записаны друг за другом несколько одинаковых операций, то они выполняются последовательно слева направо.
- 3. Операция отрицания записывается без скобок и применяется ко всей формуле, записанной под символом отрицания.
- 4. При необходимости изменить естественный порядок действий часть формулы заключается в скобки.

Классификация формул. Понятие о их равносильности

- **Опр.** Формула $\Phi(X_1, \dots, X_n)$ называется выполнимой, если она принимает значение 1 хотя бы при одном наборе значений X_1, \dots, X_n .
- **Опр.** Формула $\Phi(X_1, \dots, X_n)$ называется тождественно истинной (законом логики), если она принимает значение 1 при любом наборе значений X_1, \dots, X_n .

Напр.: $X \vee X$

- **Опр.** Формула $\Phi(X_1, \dots, X_n)$ называется тождественно ложной (противоречием), если она принимает значение 0 при любом наборе значений X_1, \dots, X_n .

Напр.: $X \wedge X$

- Опр. Две формулы Φ_1 и Φ_2 называется равносильными, если они принимают одинаковые значения при каждом наборе значений X_1, X_2, \dots, X_n .

- Обозначение: $\Phi_1 \equiv \Phi_2$
-

- Решить вопрос о равносильности формул можно с помощью их истинностных таблиц.

- ПР. Докажем две равносильности, которые следует помнить.

1) $X \rightarrow Y \equiv \bar{X} \vee Y$

| X | Y | $X \rightarrow Y$ | \bar{X} | $\bar{X} \vee Y$ |
|---|---|-------------------|-----------|------------------|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

$$2) \quad X \leftrightarrow Y \equiv (X \vee \bar{Y}) \wedge (\bar{X} \vee Y)$$

| X | Y | $X \leftrightarrow Y$ | \bar{Y} | $X \vee \bar{Y}$ A | \bar{X} | $\bar{X} \vee Y$ B | $A \wedge B$ |
|---|---|-----------------------|-----------|-----------------------|-----------|-----------------------|--------------|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

(!!) Так как импликацию и эквиваленцию можно выразить через операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции, то любую формулу можно записать, используя только три логических символа.

Основные равносильности алгебры высказываний

- 1. Операции конъюнкция и дизъюнкция коммутативны:
- $A \wedge B \equiv B \wedge A$
- $A \vee B \equiv B \vee A$
- 2. Операции конъюнкция и дизъюнкция ассоциативны:
- $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
- $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$

- 3. Операции конъюнкция и дизъюнкция связаны между собой свойством дистрибутивности:

- $A \wedge (B \vee C) \equiv A \wedge B \vee A \wedge C$

- ~~$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$~~

- 4. Свойства логических констант:

- $A \wedge T \equiv A$

- $A \wedge F \equiv F$

- $A \vee T \equiv T$

- $A \vee F \equiv A$

5. Законы де Моргана:

$$\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$$

$$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$$

6. Свойства отрицания:

$$A \wedge \overline{A} \equiv F$$

$$\overline{T} \equiv F$$

$$A \vee \overline{A} \equiv T$$

$$\overline{F} \equiv T$$

$$\overline{\overline{A}} \equiv A$$

7. Законы идемпотентности (простого поглощения):

$$A \wedge A \equiv A$$

$$A \vee A \equiv A$$

8. Равносильность, отменяющая импликацию:

$$A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B$$

9. Равносильности, отменяющие эквиваленцию:

$$A \leftrightarrow B \equiv (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})$$

$$A \leftrightarrow B \equiv A \wedge B \vee \bar{A} \wedge \bar{B}$$

10. Равносильности, отменяющие исключаящую дизъюнкцию:

$$A \underline{\vee} B \equiv \bar{A} \wedge B \vee A \wedge \bar{B}$$

(!!) Все приведенные свойства можно доказать с помощью истинностных таблиц.

Они, в свою очередь, позволяют получить ряд других важных законов и тождеств уже без обращения к таблицам истинности, а с помощью так называемых равносильных преобразований.

Три основные формы мышления.

- **Понятие** – это форма мышления, в которой отражаются существенные признаки объектов, относящихся к данному понятию. Например, «Медиана треугольника – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны» (определение понятия «медиана треугольника»).
- **Суждение** – это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о существовании предметов, о связи между ними и их свойствами или отношениях между ними. Например, «В равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является биссектрисой и высотой» (теорема).
- **Умозаключение** – это форма мышления, посредством которой из одного или нескольких суждений получается новое суждение. Например, доказательство любой теоремы, например теоремы о медиане равнобедренного треугольника, представляет собой цепочку умозаключений.

Умозаключение как форма мышления

- Суждения образуются в мышлении двумя основными способами:
 1. Непосредственно (с помощью суждения выражается результат восприятия). Например, суждение «эта фигура – окружность».
 2. Опосредованно (суждение возникает в результате особой мыслительной деятельности, называемой умозаключением). Например, «множество данных точек плоскости таково, что их расстояние от одной точки одинаково; значит, эта фигура – окружность».

Законы логики, используемые в умозаключениях

1. **Закон тождества**: Каждая мысль, приводимая в данном умозаключении, при повторении должна иметь одно и то же устойчивое содержание: $A \rightarrow A$

2. **Закон противоречия**: не могут быть истинными две противоположные мысли об одном и том же предмете, взятом в одно и то же время и в

одном и том же отношении: $A \wedge \overline{A}$

3. **Закон исключенного третьего**: из 2-х противоречащих высказываний в одно и то же время и в одном и том же отношении одно непременно истинно: $A \vee \bar{A}$

4. **Закон двойного отрицания**: отрицание отрицания любого высказывания равносильно самому высказыванию: $\bar{\bar{A}} \leftrightarrow A$

5. **Закон «из ложного что угодно»**: ложное высказывание имплицирует любое высказывание: $\bar{A} \rightarrow (A \rightarrow B)$

6. **Закон «modus ponens»** (утверждающий модус, модус – философский термин, означающий свойство предмета, присущее ему не постоянно, а лишь в некоторых условиях): если истинна некоторая импликация и, кроме того, истинна посылка этой импликации, то истинно и ее следствие: $A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$

7. **Закон «modus tollens»** (отрицающий модус): если истинна некоторая импликация и, кроме того, ложно следствие этой импликации, то ложна и ее посылка: $(A \rightarrow B) \wedge \bar{B} \rightarrow \bar{A}$

8. **Закон силлогизма**: Отношение «имплицировать» между высказываниями транзитивно (силлогизм – это умозаключение, в силу которого, признав истинность посылок, нельзя не согласиться с истинностью заключения, вытекающего из посылок): $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$

9. **Закон контрапозиции** (противопоставления): «Когда два явления так относятся друг к другу, что, если есть одно, необходимо есть и другое, то если второго нет, не будет и первого» Аристотель: $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})$

Понятие о теоремах. Прямая, обратная и противоположная теоремы. Необходимые и достаточные условия

- **Теорема** – это некоторая импликация высказываний, т.е. $T \equiv A \rightarrow B$

При этом высказывание A называется условием теоремы, а B – ее заключением.

Если в теореме A и B простые высказывания, то теорема называется простой, в противном случае - сложной.

Пусть $T \equiv A \rightarrow B$ (1) – некоторая теорема (прямая), тогда:

1) теорема $T_{об.} \equiv B \rightarrow A$ (2) называется обратной теоремой;

2) теорема $T_{пр.} \equiv \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ (3) называется противоположной теоремой;

3) теорема $T_{пр.об.} \equiv \bar{B} \rightarrow \bar{A}$ (4) называется теоремой, противоположной к обратной.

Напр.:

1) Пусть T – «Если четырехугольник является прямоугольником, то его диагонали равны», тогда

$T_{об}$ - «Если в четырехугольнике диагонали равны, то четырехугольник является прямоугольником»

$T_{пр.}$ - «Если четырехугольник не является прямоугольником, то его диагонали не равны»

$T_{пр.об.}$ – «Если в четырехугольнике диагонали не равны, то четырехугольник не является прямоугольником»

В рассмотренном примере теоремы (1) и (4) являются одновременно истинными, а теоремы (2) и (3) одновременно ложными. Контрпримером к теореме (2) является равнобокая трапеция.

Методы доказательств теорем

- I. Схемы прямого доказательства

1. Правило заключения: Если истинны формулы (утверждения) A и $A \rightarrow B$, то будет истинна формула B .

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$

2. Правило введения конъюнкции: Если истинны формулы (утверждения) A и B , то истинна и их конъюнкция.

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

3. Правило удаления конъюнкции: Если истинна конъюнкция 2-х формул (утверждений), то каждая из них истинна.

$$\frac{A \wedge B}{A}$$

$$\frac{A \wedge B}{B}$$

4. Правило контрапозиции: Если утверждение A имплицирует утверждение B, то отрицание B имплицирует отрицание A.

$$\frac{A \rightarrow B}{\overline{B} \rightarrow \overline{A}}$$

5. Закон силлогизма: Если из формулы A следует формула B , а из формулы B следует формула C , то из A следует C .

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \\ \hline A \rightarrow C \end{array}$$

6. Правило доказательства разбора случаев:

$$\begin{array}{l} A \rightarrow C \\ B \rightarrow C \\ \hline A \vee B \rightarrow C \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A \rightarrow C \\ A \rightarrow D \\ \hline A \rightarrow C \wedge D \end{array}$$

Доказательство теорем методом от противного

Чтобы доказать теорему $T \equiv A \rightarrow B$ методом от противного предполагают, что T – ложное высказывание, т.е. \bar{T} – истинное высказывание. Из этого предположения извлекают логические следствия, среди которых есть следствие S , которое:

- либо тождественно ложно,
- либо противоречит условию теоремы,
- либо противоречит аксиоме данной теории или теореме, истинность которой уже установлена,
- либо противоречит какому-либо другому следствию этой теоремы.

Если такое следствие найдено, то делают вывод, что \bar{T} , в действительности, ложное высказывание, т.е. теорема T истинна.

Упростите формулу с помощью равносильных преобразований:

$$1) \bar{P} \rightarrow (\bar{P} \vee \bar{Q})$$

$$2) X \rightarrow Y \vee X \vee Y$$

$$1) \bar{P} \rightarrow (\bar{P} \vee \bar{Q})$$

$$/\bar{P} \rightarrow (\bar{P} \vee \bar{Q}) \equiv \bar{\bar{P}} \vee (\bar{P} \vee \bar{Q}) \equiv (P \vee \bar{P}) \vee Q \equiv T \vee Q \equiv T /$$

$$2) \overline{\bar{X} \rightarrow \bar{Y} \vee X \vee \bar{Y}}$$

$$/\overline{\bar{X} \rightarrow \bar{Y} \vee X \vee \bar{Y}} \equiv (\bar{X} \wedge Y) \vee X \vee \bar{Y} \equiv (\bar{X} \vee X) \wedge (Y \vee X) \vee \bar{Y} \equiv T \wedge (Y \vee X) \vee \bar{Y} \equiv (Y \vee X) \vee \bar{Y} \equiv (Y \vee \bar{Y}) \vee X \equiv T \vee X \equiv T /$$

Домашнее задание

Упростите формулу с помощью равносильных преобразований:

$$3) (P \wedge Q \wedge S) \vee (\bar{P} \wedge S) \vee (\bar{Q} \wedge S)$$

$$4) \overline{X \vee \bar{Y}} \rightarrow \overline{\bar{X} \vee Y}$$

Решение:

$$3) (P \wedge Q \wedge S) \vee (\bar{P} \wedge S) \vee (\bar{Q} \wedge S)$$

$$\begin{aligned} / (P \wedge Q \wedge S) \vee (\bar{P} \wedge S) \vee (\bar{Q} \wedge S) &\equiv (P \wedge Q \wedge S) \vee (\bar{P} \vee \bar{Q}) \wedge S \equiv (P \wedge Q \wedge S) \vee \overline{P \wedge Q} \wedge S \equiv \\ S \wedge (P \wedge Q \vee \overline{P \wedge Q}) &\equiv S \wedge T \equiv S / \end{aligned}$$

$$4) \overline{X \vee \bar{Y}} \rightarrow \overline{\bar{X} \vee Y}$$

$$\begin{aligned} / \overline{X \vee \bar{Y}} \rightarrow \overline{\bar{X} \vee Y} &\equiv \overline{\overline{X \vee \bar{Y}}} \vee \overline{\bar{X} \vee Y} \equiv (X \vee \bar{Y}) \wedge (\bar{\bar{X}} \vee \bar{Y}) \equiv (X \vee \bar{Y}) \wedge (X \vee Y) \equiv X \leftrightarrow Y / \end{aligned}$$