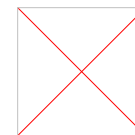


# Исследование функций и построение графиков

Задание:

№№ 6.465, 6.476, 6.488, 6.497



# Исследование функции и построение графиков

При построении графика функции целесообразно пользоваться следующей схемой:

1. Найти область определения функции и провести исследование на концах области определения;
2. Исследовать функцию на четность, нечетность и периодичность;
3. Найти точки пересечения графика с осями координат;
4. Найти асимптоты;
5. Найти интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции;
6. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

6.465 (ураванение)

①  $D(x): x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$   $y = \frac{x^4}{x^3-1}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x = \pm\infty$

$\frac{x^4}{x^3-1} \rightarrow \frac{4x^3}{3x^2} \rightarrow \frac{12x^2}{6x} = 2x$  (no up. bound)

$\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{x^4}{(x-1)(x^2+x+1)} = \pm\infty$ .  $x=1$  - r. parp. 2. step

②  $y(-x) = \frac{x^4}{-x^3-1} = -\frac{x^4}{x^3+1} \neq y(x), -y(x)$

③  $y(0) = 0$

④ Верт. ас:  $x=1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} y(x) = \pm\infty$

Накл. ас:  $y = kx + b$ ,  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3-1} = 1$   
 $b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^4}{x^3-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^4 + x}{x^3-1} = 0$

$y = x$  - накл. ас

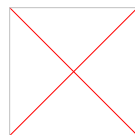
⑤  $y' = \frac{4x^3(x^3-1) - 3x^2 \cdot x^4}{(x^3-1)^2} = \frac{x^6 - 4x^3}{(x^3-1)^2} = \frac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2} = 0$   $x=0$   
 $x = \sqrt[3]{4}$

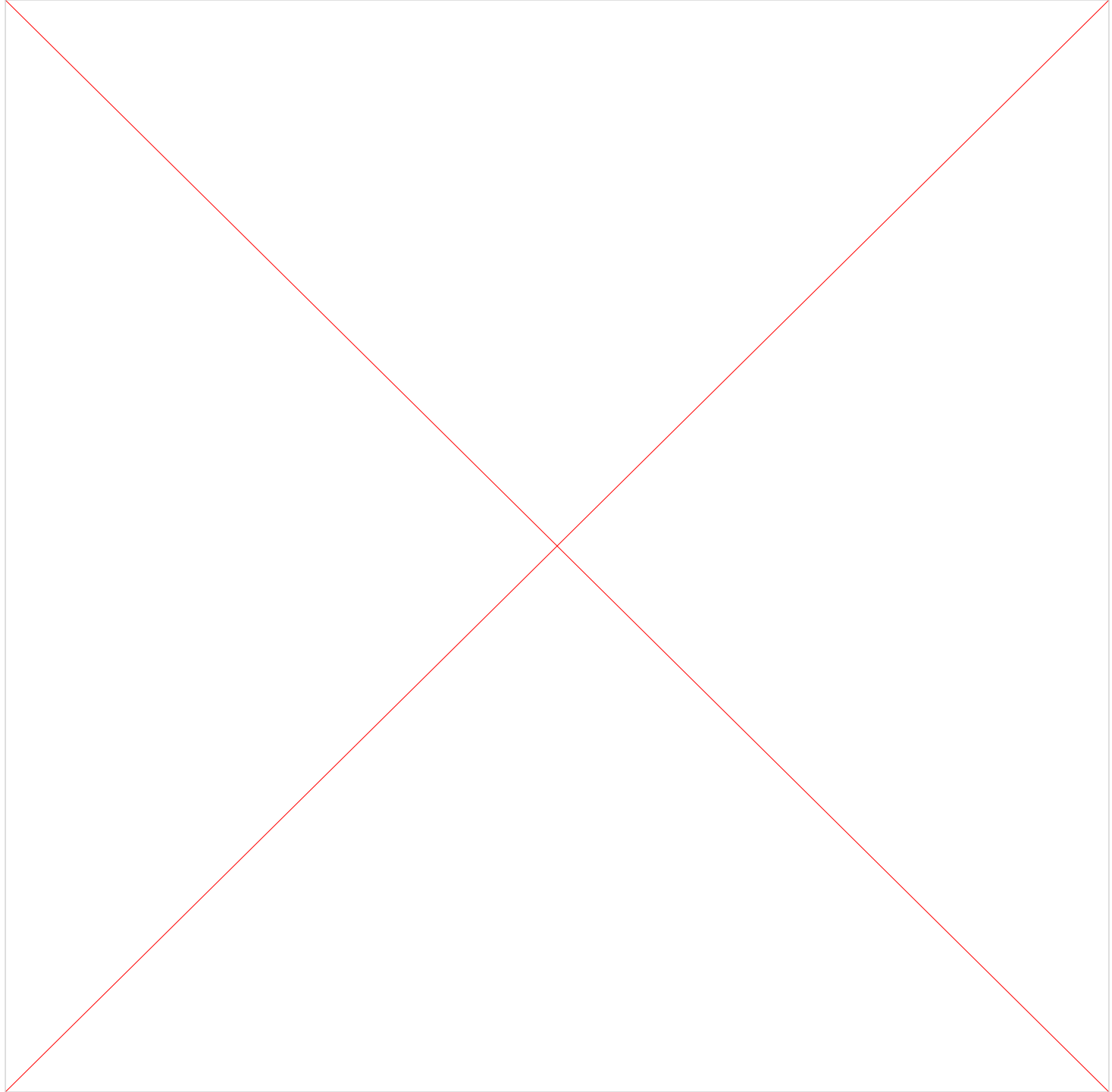
$x=0$  - max  $y(0) = 0$ .  $4^{\sqrt[3]{4}}$   
 $x = \sqrt[3]{4}$  - min  $y(\sqrt[3]{4}) = \frac{4^{\sqrt[3]{4}}}{4-1} = \frac{4}{3} \sqrt[3]{4}$

⑥  $y'' = \frac{(6x^5 - 12x^2)(x^3-1)^2 - 2(x^3-1) \cdot 3x^2(x^6 - 4x^3)}{(x^3-1)^4} =$   
 $= \frac{(x^3-1)x^2[(6x^3-12)(x^3-1) - 6x^6 + 24x^3]}{(x^3-1)^4} = \frac{x^2(6x^6 - 6x^3 - 12x^3 + 12 - 6x^6 + 24x^3)}{(x^3-1)^3} =$

$= \frac{x^2(6x^3+12)}{(x^3-1)^2} = \frac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3} = 0$  upr  $x=0$ ,  $x = -\sqrt[3]{2}$ .

$x = -\sqrt[3]{2}$  - r. nepenitn  
 $y(-\sqrt[3]{2}) = -\frac{2}{3} \sqrt[3]{2}$





6.476

$$y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$$

①  $D(x) = (-\infty; +\infty)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1 - (x-1)}{\sqrt[3]{(x+1)^2 + \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{(x-1)^2}} = 0.$$

②  $y(-x) = \sqrt[3]{-x+1} - \sqrt[3]{-x-1} = -\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1} = y(x) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  ф-я четная  $\Rightarrow$  график симметричен относительно Oy.

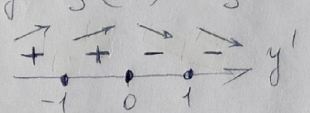
③  $y(0) = 2$

④ Верт. асимптот нет  
 Наклонные:  $y = kx + b$ ,  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}{x} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{(x-1)^2})} = 0.$

$b = \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0 \Rightarrow y = 0$  - горизонт. асимптота

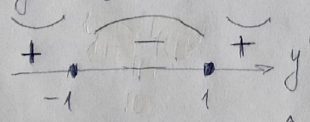
⑤  $y' = \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3} - \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = 0$  при  $x=0$ .

$x=0$  - г. макс,  $y(0) = 2$ .

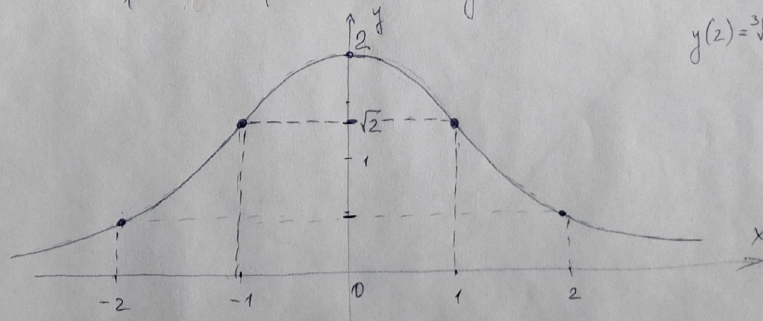


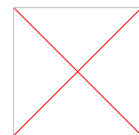
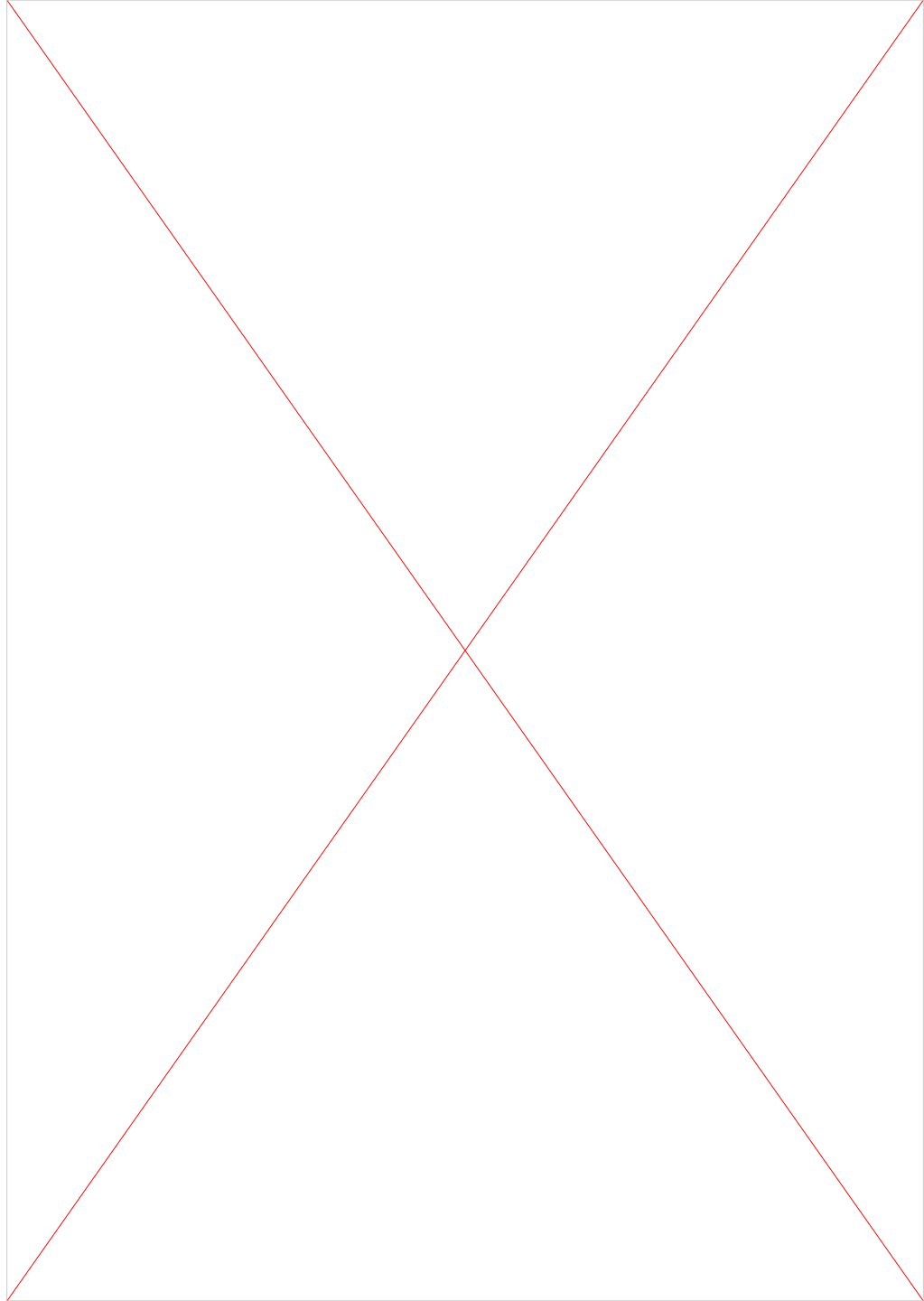
⑥  $y'' = \frac{1}{3}(-\frac{2}{3})((x+1)^{-5/3} - (x-1)^{-5/3}) = -\frac{2}{9} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^5} - \sqrt[3]{(x+1)^5}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^5}} = 0$

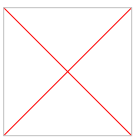
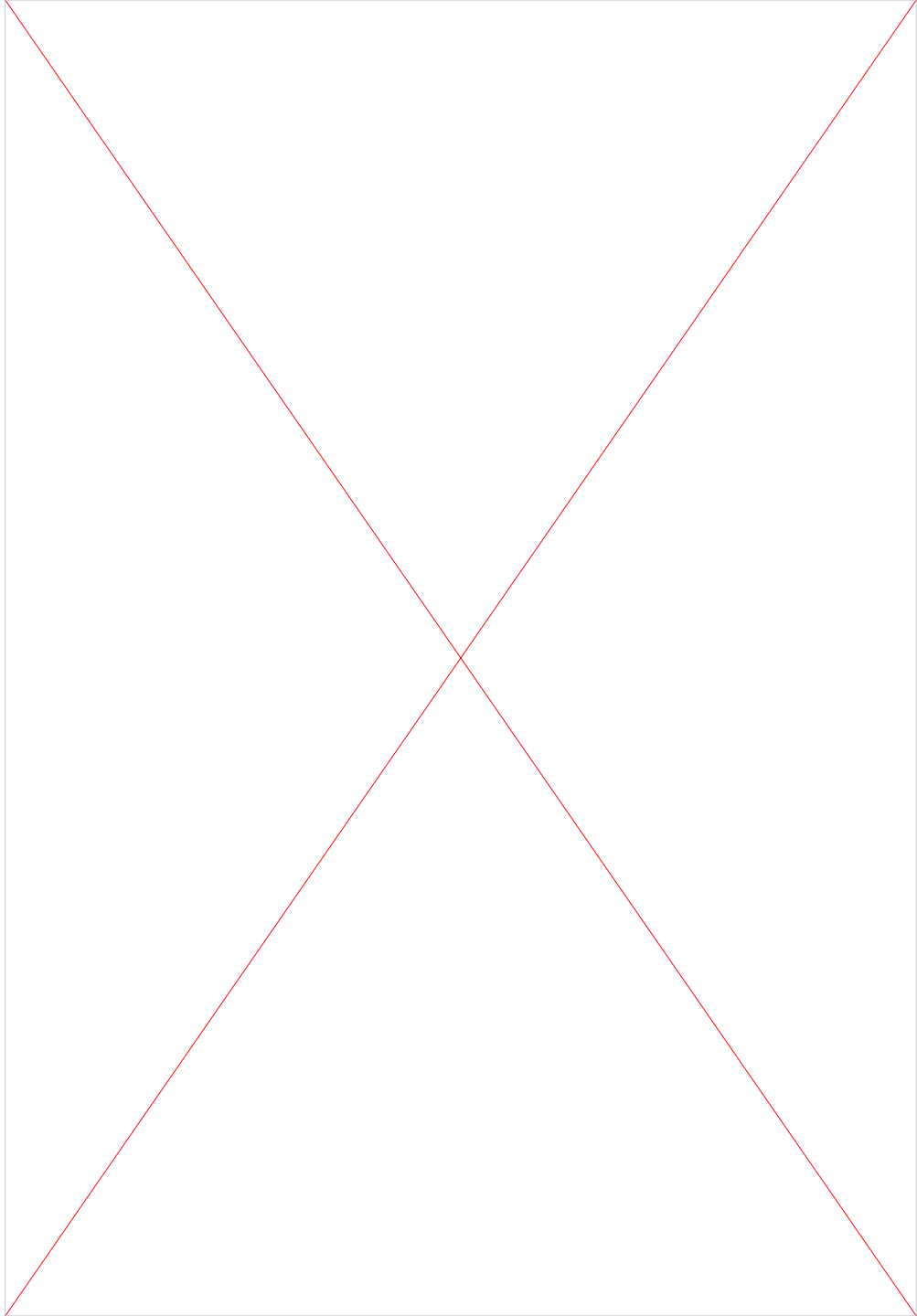
$x = \pm 1$  - г. перегиба  
 $y(\pm 1) = \sqrt[3]{2} \approx 1,25$



$y(2) = \sqrt[3]{3} - 1 \approx 0,45$







# Домашнее задание:

№№ 6.512, 6.481

