Исследование функций и построение графиков

Задание:

№№ 6.465, 6.476, 6.488, 6.497

Исследование функции и построение графиков

При построении графика функции целесообразно пользоваться следующей схемой:

1. Найти область определения функции и провести исследование на концах области определения;
2. Исследовать функцию на четность, нечетность и периодичность;
3. Найти точки пересечения графика с осями координат;
4. Найти асимптоты;
5. Найти интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции;
6. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

6.465 (продолжение)

① $D(x)$: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ $\qquad y = \dfrac{x^4}{x^3-1}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4}{x^3-1} = \lim_{x\to\pm\infty} 2x = \pm\infty$$

$$\frac{x^4}{x^3-1} \to \frac{4x^3}{3x^2} \to \frac{12x^2}{6x} = 2x \text{ (по пр. Лопиталя)}$$

$$\lim_{x\to 1\pm 0} \frac{x^4}{\underbrace{(x-1)}_{\to\pm 0}(x^2+x+1)} = \pm\infty.$$ $x=1$ – т. разр. 2 рода

② $y(-x) = \dfrac{x^4}{-x^3-1} = -\dfrac{x^4}{x^3+1} \neq y(x), -y(x)$

③ $y(0)=0$

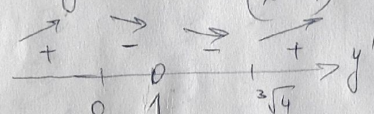
④ Верт. ас: $x=1$, $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} y(x) = \pm\infty$

Накл. ас: $y=kx+b$, $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^3-1} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^3-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x^4}-\cancel{x^4}+x}{x^3-1} = 0.$

$y=x$ – накл. ас

⑤ $y' = \dfrac{4x^3(x^3-1)-3x^2\cdot x^4}{(x^3-1)^2} = \dfrac{x^6-4x^3}{(x^3-1)^2} = \dfrac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2} = 0$ $\quad x=0$, $x=\sqrt[3]{4}$



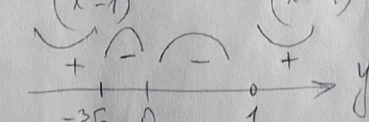
$x=0$ – max $\quad y(0)=0.$

$x=\sqrt[3]{4}$ – min $\quad y(\sqrt[3]{4}) = \dfrac{4\sqrt[3]{4}}{4-1} = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{4}.$

⑥ $y'' = \dfrac{(6x^5-12x^2)(x^3-1)^2 - 2(x^3-1)\cdot 3x^2(x^6-4x^3)}{(x^3-1)^4} =$

$= \dfrac{(x^3-1)x^2\left[(6x^3-12)(x^3-1)-6x^6+24x^3\right]}{(x^3-1)^4} = \dfrac{x^2(\cancel{6x^6}-6x^3-12x^3+12-\cancel{6x^6}+24x^3)}{(x^3-1)^3} =$

$= \dfrac{x^2(6x^3+12)}{(x^3-1)^3} = \dfrac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3} = 0$ при $x=0$, $x=-\sqrt[3]{2}$.



$x=-\sqrt[3]{2}$ – т. перегиба

$y(-\sqrt[3]{2}) = -\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{2}.$

6.476

$y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$

① $D(x)=(-\infty;+\infty)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1-(x-1)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}=0.$

② $y(-x)=\sqrt[3]{-x+1}-\sqrt[3]{-x-1}=-\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=y(x)\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ф-ия четная $\Rightarrow$ график симметричен отн. Oy.

③ $y(0)=2$

④ Верт. асимптот нет
Наклонные: $y=kx+b$, $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)}=0.$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}y(x)=0\Rightarrow y=0$ – горизонт. асимптота

⑤ $y'=\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}-\frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}=\frac{1}{3}\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}=0$ при $x=0$.

	-1		0		1	
y': $+$ ↗		$+$ ↗		$-$ ↘		$-$ ↘

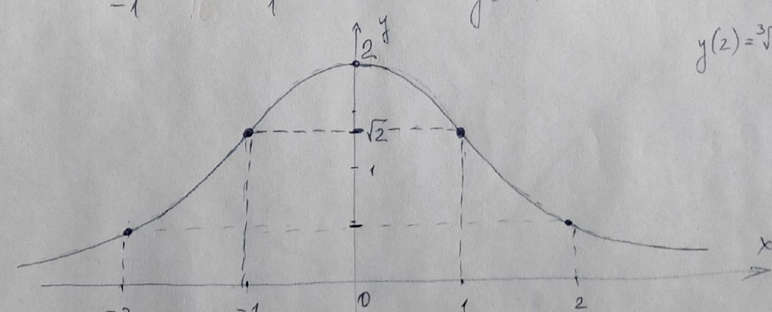
$x=0$ – т. max, $y(0)=2$.

⑥ $y''=\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left((x+1)^{-5/3}-(x-1)^{-5/3}\right)=-\frac{2}{9}\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^5}-\sqrt[3]{(x+1)^5}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^5}}=0$

	-1		1	
y'': $+$ ∪		$-$ ∩		$+$ ∪

$x=\pm1$ – т. перегиба
$y(\pm1)=\sqrt[3]{2}\approx1{,}25$

$y(2)=\sqrt[3]{3}-1\approx0{,}45$



Домашнее задание:

№№ 6.512, 6.481