

Федеральное агентство по образованию  
ФГБОУ ВО «Уральский государственный экономический университет»  
Институт Менеджмента и информационных технологий  
Кафедра Шахматного искусства и компьютерной математики



**Высшая математика. Лекция №2.**  
**Матричная алгебра.**



Автор: ст. преподаватель  
Миронов Денис Сергеевич

Екатеринбург  
2019

**Определение 1.** Матрица размерности  $m \times n$  – прямоугольная таблица рациональных чисел, содержащая  $m$  строк и  $n$  столбцов.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа  $a_{11}, a_{12}, a_{ij}$  называют элементами матрицы.

Элементы  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{ii}, \dots$ , стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют *главную диагональ*.

**Определение 1 (хорошее).** Матрицей размерности  $m$  х  $n$  будем называть функцию  $F$  с область определения  $D(F) = \{1,2,3,\dots,m\} \times \{1,2,3,\dots,n\}$ .



**Определение 2.** Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется *квадратной*.

Квадратную матрицу размерности  $n \times n$  называют матрицей  $n$ -го порядка.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Определение 3.** Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется

*диагональной*. Например,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ .

**Определение 4.** Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется **единичной**.

Например,  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  – единичная матрица третьего порядка.

**Определение 5.** Матрицы называются *равными* между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т.е.

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}.$$

**Пример 1.** Являются ли равными матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } D = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & \sqrt{4} \end{pmatrix}.$$

**Определение 6.** Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется вектором-столбцом или вектором-строкой.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \text{ или } B = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}).$$

**Определение 7.** Сумма элементов главной диагонали матрицы  $A$  называется *следом матрицы* и обозначается как  $tr A$ .

## Произведение матрицы на скаляр (число).

**Определение 8.** Произведением матрицы  $A_{m \times n} = (a_{ij})$  на число  $k$  называется матрица  $A_{m \times n} = (b_{ij})$  такая, что  $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ .

**Пример 2.** Вычислить: а)  $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ;

б)  $(-5) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

**Определение 9.** Матрица  $-A = (-1) \cdot A$  называется противоположной матрице  $A$ .



## Сложение

**Определение 10.** Суммой двух матриц  $A_{m \times n} = (a_{ij})$  и  $B_{m \times n} = (b_{ij})$  называется матрица  $C_{m \times n} = (c_{ij})$ , такая что  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Сумма обозначается как  $C = A + B$ .

**Обратите внимание, что операция сложения вводится только для матриц одинаковой размерности.**

**Пример 2.** Вычислить  $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Аналогично определяется разность матриц.**

**Пример 3.** Вычислить  $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -8 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -8 & 4 & -7 \\ 5 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ .

## Свойства операции сложения матриц

Пусть даны матрицы  $A_{m \times n}$ ,  $B_{m \times n}$ ,  $C_{m \times n}$  и  $0_{m \times n}$  (нулевая матрица размерности  $m \times n$ , элементами которой являются нули), а также скаляр  $k$ .

1. Коммутативность сложения:  $A + B = B + A$ .
2. Ассоциативность сложения:  $(A + B) + C = A + (B + C)$ .
3. Существование противоположного элемента:  $A + (-A) = 0$ .
4.  $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$ .
5.  $0 \cdot A = 0$ .
6.  $E \cdot A = A$ .

## 6. Произведение матриц.

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

**Определение 12.** Произведением матрицы  $A_{m \times n} = (a_{ij})$  на матрицу  $B_{n \times p} = (b_{jk})$  называется матрица  $C_{m \times p} = (c_{ik})$  такая, что

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}.$$

Иначе говоря, элемент матрицы  $c_{ik}$  стоящий в  $i$ -той строке и  $j$ -том столбце, равен сумме произведений элементов  $i$ -той строки матрицы на соответствующие элементы  $j$ -го столбца матрицы.

Таким образом, умножение осуществляется по правилу умножения строки на столбец.

Например,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

**Пример 4.** Вычислить: а)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ , б)  $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

## Свойства операции умножения матриц

1. Некоммутативность умножения:  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .
2. Из равенства  $A \cdot B = 0$  не следует, что  $A = 0$  или  $B = 0$ .
3. Ассоциативность умножения:  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ .
4. Дистрибутивность умножения:  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ .
5.  $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$ .
6.  $0 \cdot A = 0$ .

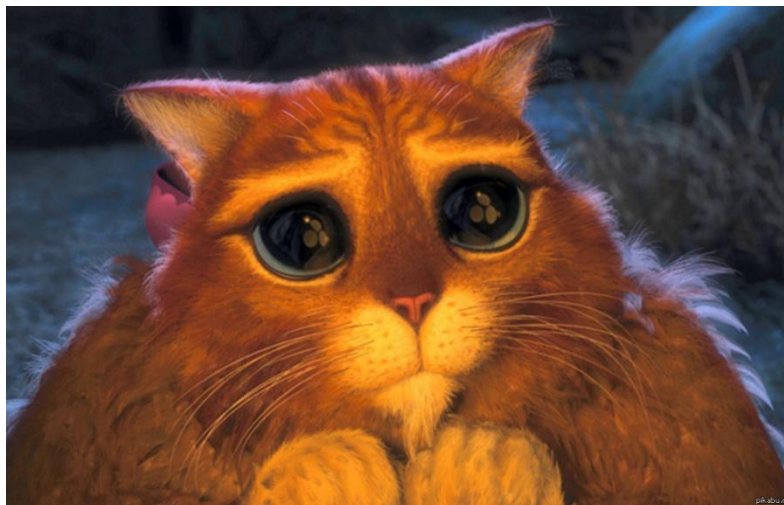
## 7. Транспонирование

**Определение 11.** Матрицу  $A^T$  называют *транспонированной* матрицей матрицы  $A$ , а переход от  $A$  к  $A^T$  *транспонированием*, если элементы каждой строки матрицы  $A$  записать в том же порядке в столбцы матрицы  $A^T$ . Иными словами,  $A_{ij} = A_{ji}^T$ .

Например,  $A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ , тогда  $A^T_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$ .

### Свойства транспонирования

1.  $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$ .
2.  $(A + B)^T = A^T + B^T$ .
3.  $(A \cdot B)^T = B^T A^T$ .



**На сегодня всё. Спасибо за внимание.**

*Надеюсь Вам понравилось, я старался!*

*«Теория без практики — мертва,  
практика без теории — слепа».*

***В. Зубков***

