Федеральное агентство по образованию
ФГБОУ ВО «Уральский государственный экономический университет»
Институт Менеджмента и информационных технологий
Кафедра Шахматного искусства и компьютерной математики

Высшая математика. Лекция №2.

Матричная алгебра.

Автор: ст. преподаватель
Миронов Денис Сергеевич

Екатеринбург
2019

Определение 1. Матрица размерности $m \times n$ – прямоугольная таблица рациональных чисел, содержащая m строк и n столбцов.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{11}, a_{12}, a_{ij} называют элементами матрицы.

Элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots a_{ii}, \dots,$ стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют ***главную диагональ***.

Определение 1 (хорошее). Матрицей размерности *m* x *n будем* называть *функцию* F с область определения $D(F) = \{1,2,3,\ldots,m\} X \{1,2,3,\ldots,n\}$.

Определение 2. Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется ***квадратной.***

Квадратную матрицу размерности $n \times n$ называют матрицей *n-го* порядка.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Определение 3. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***. Например, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определение 4. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется **единичной.**

Например, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица третьего порядка.

Определение 5. Матрицы называются ***равными*** между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т.е.

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}.$$

Пример 1. Являются ли равными матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } D = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & \sqrt{4} \end{pmatrix}.$$

Определение 6. Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется вектором-столбцом или вектором-строкой.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \text{ или } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Определение 7. Сумма элементов главной диагонали матрицы A называется ***следом матрицы*** и обозначается как $tr\ A$.

Произведение матрицы на скаляр (число).

Определение 8. Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на число k называется матрица $A_{m\times n} = (b_{ij})$ такая, что $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

Пример 2. Вычислить: а) $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

б) $(-5) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Определение 9. Матрица $-A = (-1) \cdot A$ называется противоположной матрице A.

Сложение

Определение 10. Суммой двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$, такая что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Сумма обозначается как $C = A + B$.

Обратите внимание, что операция сложения вводится только для матриц одинаковой размерности.

Пример 2. Вычислить $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

Аналогично определяется разность матриц.

Пример 3. Вычислить $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -8 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -8 & 4 & -7 \\ 5 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

Свойства операции сложения матриц

Пусть даны матрицы $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$, $C_{m\times n}$ и $0_{m\times n}$(нулевая матрица размерности $m\times n$, элементами которой являются нули), а также скаляр k.

1. Коммутативность сложения: $A+B=B+A$.
2. Ассоциативность сложения: $(A+B)+C=A+(B+C)$.
3. Существование противоположного элемента: $A+(-A)=0$.
4. $k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$.
5. $0\cdot A=0$.
6. $E\cdot A=A$.

6. Произведение матриц.

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Определение 12. Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{n\times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p} = (c_{ik})$ такая, что $c_{ik} = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}$.

Иначе говоря, элемент матрицы c_{ik} стоящий в i-той строке и j-том столбце, равен сумме произведений элементов i-той строки матрицы на соответствующие элементы j-го столбца матрицы.

Таким образом, умножение осуществляется по правилу умножения строки на столбец.

Например,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Вычислить: а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Свойства операции умножения матриц

1. Некоммутативность умножения: $A \cdot B \neq B \cdot A$.
2. Из равенства $A \cdot B = 0$ не следует, что $A = 0$ или $B = 0$.
3. Ассоциативность умножения: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
4. Дистрибутивность умножения: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
5. $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$.
6. $0 \cdot A = 0$.

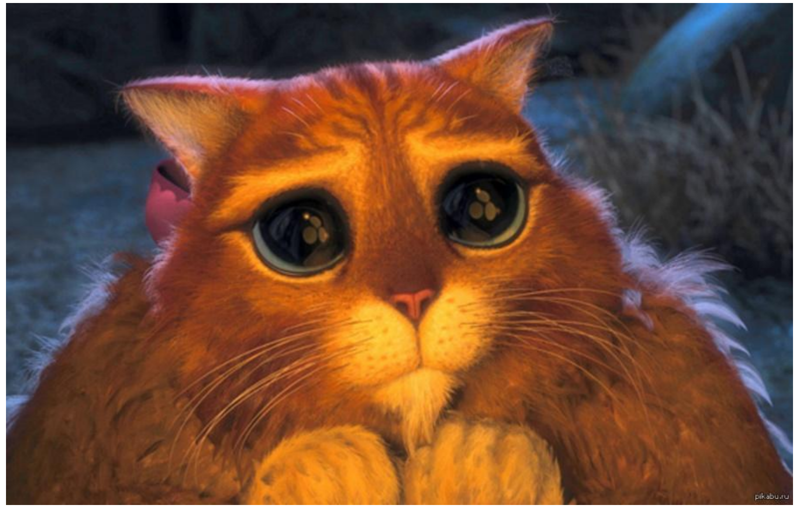
7. Транспонирование

Определение 11. Матрицу A^T называют ***транспонированной*** матрицей матрицы A, а переход от A к A^T ***транспонированием***, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы A^T. Иными словами, $A_{ij} = A^T_{ji}$.

Например, $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, тогда $A^T{}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Свойства транспонирования

1. $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$.
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
3. $(A \cdot B)^T = B^T A^T$.



На сегодня всё. Спасибо за внимание.

Надеюсь Вам понравилось, я старался!

«Теория без практики — мертва, практика без теории — слепа».

В. Зубков