

Метод наименьших квадратов

Самооценка денежных доходов респондентов
РФ,
% от числа опрошенных

Год	1994, II	1995, I	1996, I	1997, I	1998, XII	1999, XI	2000, XII	2001, XII	2002, XII	2003, X
Ограниченные в средствах	28	33	34	36	29	32	39	39	40	39
Год	2004, XII	2005, IX	2006, VI	2007, VII	2008, XI	2009, XII	2010, XII	2011, XI	2012, XII	2013, XII
Ограниченные в средствах	44	45	43	45	47	50	51	54	57	58

Необходимо построить функцию, которая бы проходила наиболее близко к указанным точкам

$$\tilde{y} = f(x, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

$$Q(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{i=1}^n [y_i - \tilde{y}(x_i, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)]^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^n \left[y_i - \left(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 + a_4x_i^4 \right) \right]^2$$

x_i, y_i – координаты заданных точек (данные из таблицы)

n – количество заданных точек

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{n-1} + x_n$$

$$Q(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{i=1}^n \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + a_4 x_i^4) \right]^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^n \left[y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - a_3 x_i^3 - a_4 x_i^4 \right] = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^n \left[y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - a_3 x_i^3 - a_4 x_i^4 \right] (x_i) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial a_2} = -2 \sum_{i=1}^n \left[y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - a_3 x_i^3 - a_4 x_i^4 \right] (x_i^2) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial a_3} = -2 \sum_{i=1}^n \left[y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - a_3 x_i^3 - a_4 x_i^4 \right] (x_i^3) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial a_4} = -2 \sum_{i=1}^n \left[y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - a_3 x_i^3 - a_4 x_i^4 \right] (x_i^4) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_4 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n y_i, \\
a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^4 + a_4 \sum_{i=1}^n x_i^5 = \sum_{i=1}^n y_i x_i, \\
a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^5 + a_4 \sum_{i=1}^n x_i^6 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^2, \\
a_0 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^4 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^5 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^6 + a_4 \sum_{i=1}^n x_i^7 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^3, \\
a_0 \sum_{i=1}^n x_i^4 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^5 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^6 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^7 + a_4 \sum_{i=1}^n x_i^8 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^4
\end{array} \right.$$

$$A = \begin{bmatrix}
 n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \\
 \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^5 \\
 \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^5 & \sum_{i=1}^n x_i^6 \\
 \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^5 & \sum_{i=1}^n x_i^6 & \sum_{i=1}^n x_i^7 \\
 \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^5 & \sum_{i=1}^n x_i^6 & \sum_{i=1}^n x_i^7 & \sum_{i=1}^n x_i^8
 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{Bmatrix}
 a_0 \\
 a_1 \\
 a_2 \\
 a_3 \\
 a_4
 \end{Bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix}
 \sum_{i=1}^n y_i \\
 \sum_{i=1}^n y_i x_i \\
 \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \\
 \sum_{i=1}^n y_i x_i^3 \\
 \sum_{i=1}^n y_i x_i^4
 \end{bmatrix}$$