Метод наименьших квадратов

Самооценка денежных доходов респондентов РФ,
% от числа опрошенных

Год	1994, II	1995, I	1996, I	1997, I	1998, XII	1999, XI	2000, XII	2001, XII	2002, XII	2003, X
Ограниченные в средствах	28	33	34	36	29	32	39	39	40	39
Год	**2004, XII**	**2005, IX**	**2006, VI**	**2007, VII**	**2008, XI**	**2009, XII**	**2010, XII**	**2011, XI**	**2012, XII**	**2013, XII**
Ограниченные в средствах	44	45	43	45	47	50	51	54	57	58

Необходимо построить функцию, которая бы проходила наиболее близко к указанным точкам

$$\tilde{y} = f\left(x, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

$$Q\left(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \tilde{y}\left(x_i, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\right) \right]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\ 2} + a_3 x_i^{\ 3} + a_4 x_i^{\ 4} \right) \right]^2$$

x_i, y_i – координаты заданных точек (данные из таблицы)

n – количество заданных точек

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n$$

$$Q\left(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\left(a_0+a_1x_i+a_2x_i{}^2+a_3x_i{}^3+a_4x_i{}^4\right)\right]^2$$

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial Q}{\partial a_0}=-2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-a_0-a_1x_i-a_2x_i{}^2-a_3x_i{}^3-a_4x_i{}^4\right]=0,\\
\dfrac{\partial Q}{\partial a_1}=-2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-a_0-a_1x_i-a_2x_i{}^2-a_3x_i{}^3-a_4x_i{}^4\right]\left(x_i\right)=0,\\
\dfrac{\partial Q}{\partial a_2}=-2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-a_0-a_1x_i-a_2x_i{}^2-a_3x_i{}^3-a_4x_i{}^4\right]\left(x_i^2\right)=0.\\
\dfrac{\partial Q}{\partial a_3}=-2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-a_0-a_1x_i-a_2x_i{}^2-a_3x_i{}^3-a_4x_i{}^4\right]\left(x_i^3\right)=0\\
\dfrac{\partial Q}{\partial a_4}=-2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-a_0-a_1x_i-a_2x_i{}^2-a_3x_i{}^3-a_4x_i{}^4\right]\left(x_i^4\right)=0
\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
a_0 n + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_3 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_4 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\
a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_3 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + a_4 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^5 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i, \\
a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + a_3 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^5 + a_4 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^6 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i^2 \\
a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^5 + a_3 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^6 + a_4 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^7 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i^3 \\
a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^5 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^6 + a_3 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^7 + a_4 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^8 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i^4
\end{cases}
$$

$$A = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^5 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^5 & \sum_{i=1}^{n} x_i^6 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^5 & \sum_{i=1}^{n} x_i^6 & \sum_{i=1}^{n} x_i^7 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^5 & \sum_{i=1}^{n} x_i^6 & \sum_{i=1}^{n} x_i^7 & \sum_{i=1}^{n} x_i^8 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^4 \end{bmatrix}$$