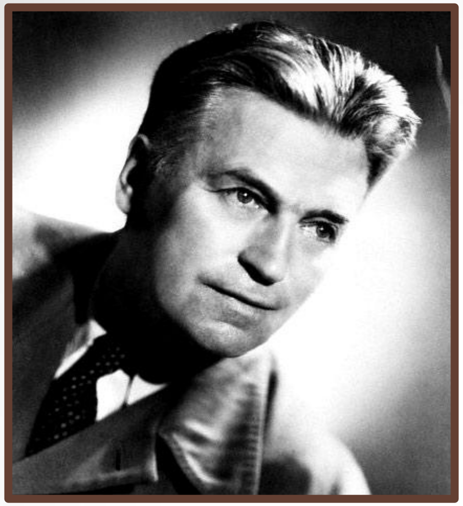
Логарифмические уравнения.

Основные методы их решения.



«Ничему тому, что важно знать, научить нельзя, - всё, что может сделать учитель, это указать дорожки»

Ричард Олдингтон
(1892 – 1962гг..) - английский поэт, прозаик, критик

«Кто говорит – тот сеет, кто слушает – тот собирает».

Русская народная пословица

уравнений.

1. Решение логарифмических уравнений на основании определения логарифма.

Определение логарифма: $\log_a b = c : a^c = b, a > 0, b > 0, a \neq 1.$

$$\boxed{\log_a f(x) = c \Rightarrow f(x) = a^c,}$$

$$f(x) > 0, a > 0, a \neq 1.$$

Пример 1:

$$\log_4 x = \boxed{2},$$

$$ОДЗ : x > 0,$$

$$x = 4^{\boxed{2}},$$

$$x = 16.$$

Ответ: 16.

Пример 2:

$$\log_3(2x+1)=\boxed{2},$$

$$2x+1=3^{\boxed{2}},$$

$$2x+1=9,$$

$$x=4.$$

***Проверка*:**

$$\log_3(2\cdot 4+1)=2,$$

$$\log_3 9=2,$$

$$2=2$$

Ответ: 4.

Пример 3:

$$4^{x-3}=5,$$

$$x-3=\log_4 5,$$

$$x=3+\log_4 5.$$

Ответ: $3+\log_4 5.$

$$\log_{g(x)} f(x) = c \Rightarrow f(x) = g(x)^c,$$

$$f(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1.$$

Пример 4: $\log_{x+1}(2x^2 + 1) = 2,$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2 + 1 > 0, \\ x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1, \end{cases} \Rightarrow \quad x \in (-1;0) \cup (0;+\infty)$

$$\log_{x+1}(2x^2 + 1) = \boxed{2},$$

$$2x^2 + 1 = (x + 1)^{\boxed{2}},$$

$$2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1,$$

$$x^2 - 2x = 0,$$

$$x(x - 2) = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Ответ: 2.

2. Метод потенцирования.

Под **потенцированием** понимается переход от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их.

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x),$$ где $a > 0, a \neq 1, f(x) > 0, g(x) > 0.$

Пример 5:

$$\log_2(x^2 + 7x - 5) = \log_2(4x - 1),$$

$$x^2 + 7x - 5 = 4x - 1,$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = -4.$$

Проверка:

$x = 1 \Rightarrow \log_2(1^2 + 7 \cdot 1 - 5) = \log_2(4 \cdot 1 - 1) \Rightarrow \log_2 3 = \log_2 3$ - верно

$x = -4 \Rightarrow \log_2((-4)^2 + 7 \cdot (-4) - 5) = \log_2(4 \cdot (-4) - 1) \Rightarrow \log_2(-17) = \log_2(-17)$ - не верно

Ответ: 1.

$$\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1.$$

Пример 6:

$$\log_{2+x}(x^2 + 7x - 5) = \log_{2+x}(4x - 1),$$

$$x^2 + 7x - 5 = 4x - 1,$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = -4.$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 + 7x - 5 > 0, \\ 4x - 1 > 0, \\ 2 + x > 0, \\ 2 + x \neq 1. \end{cases}$$

Проверка:

$$x = 1 \Rightarrow \log_{2+1}(1^2 + 7 \cdot 1 - 5) = \log_{2+1}(4 \cdot 1 - 1) \Rightarrow \log_3 3 = \log_3 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1 = 1$ верно

$$x = -4 \Rightarrow \log_{2-4}((-4)^2 + 7 \cdot (-4) - 5) = \log_{2-4}(4 \cdot (-4) - 1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \log_{-2}(-17) = \log_{-2}(-17)$ не верно

Ответ: 1.

Пример 7:

$$\log_4(4+7x) = \log_4(1+5x) + 1.$$

$1 = \log_4 4^1$

получим

$$\log_4(4+7x) = \log_4(1+5x) + \log_4 4,$$

$\log_c a + \log_c b = \log_c ab$

$$\log_4(4+7x) = \log_4((1+5x)\cdot 4),$$

$$4+7x = 4(1+5x),$$

$$x = 0.$$

Проверка:

$$\log_4(4+7\cdot 0) = \log_4(1+5\cdot 0) + 1,$$

$$\log_4 4 = \log_4 1 + 1,$$

$1 = 1$ верно

Ответ: 0.

3. Метод подстановки.

Пример 8: $$\log_3^2 x - \log_3 x = 2$$

ОДЗ: $x > 0.$

Пусть $\log_3 x = t,$ тогда $t^2 - t = 2,\ t^2 - t - 2 = 0.$

$$t_1 = -1, t_2 = 2.$$

Значит, $\log_3 x = -1$ или $\log_3 x = 2$

$x = 3^{-1}$ $x = 3^2$

$x = \frac{1}{3}.$ $x = 9.$

Ответ: $\frac{1}{3},\ 9.$

$$a\log^2_{g(x)} f(x) + b\log_{g(x)} f(x) + c = 0$$

$$f(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1, a, b, c - \textit{числа}, a \neq 0.$$

Пример 9: $\log_7 x - \log_x 7 = 2{,}5$ ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Приведём логарифмы к одному основанию – 7: $\log_7 x - \dfrac{1}{\log_7 x} = \dfrac{5}{2}.$

Подстановка: $t = \log_7 x.$ Уравнение примет вид: $t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{5}{2},$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0,$$

$$t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}.$$

Значит, $\log_7 x = 2$ или $\log_7 x = \dfrac{1}{2}$

$x = 7^2,$ $\quad x = 7^{\frac{1}{2}},$

$x = 49.$ $\quad x = \sqrt{7}.$

Ответ: $\sqrt{7},\ 49.$

4. Метод логарифмирования.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$$

$$f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1.$$

Пример 10:

$$x^{\log_3 x - 4} = \frac{1}{27},$$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

$$\log_3 \left(x^{\log_3 x - 4}\right) = \log_3 \frac{1}{27},$$

$$\log_c a^p = p \log_c a$$

$$(\log_3 x - 4)\log_3 x = -3.$$

Пусть $\log_3 x = t,$ тогда

$$(t-4)t = -3,$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0,$$

$$t_1 = 1, t_2 = 3.$$

Значит, $\log_3 x = 1$ или $\log_3 x = 3,$

$$x = 3^1, \qquad x = 3^3,$$

$$x = 3. \qquad x = 27.$$

Ответ: 3; 27.

Выводы:

1. На основании определения логарифма.
2. Метод потенцирования.
3. Метод постановки.
4. Метод логарифмирования.

$$\log_a b$$

Спасибо за внимание!

Удачи !

Успехов!