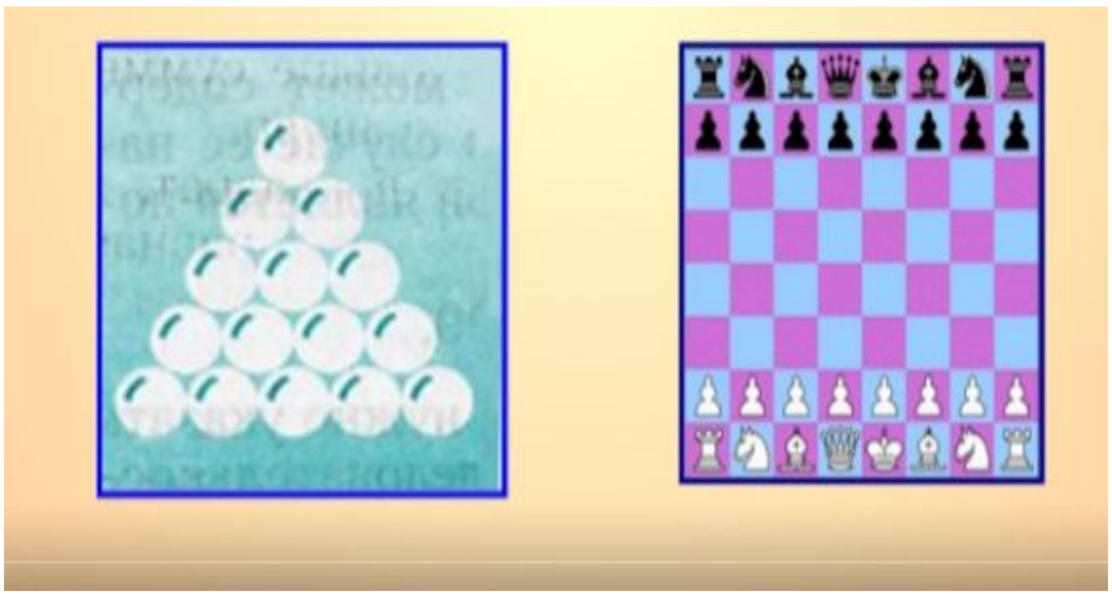
ПРОГРЕССИИ

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ



Преподаватель:
Махмудов
Кароматулло Азизович

Новосибирск – 2020

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Определение. Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же для данной последовательности числом, т. е.

$$a_{n+1} = a_n + d, \text{ где } n \in \boldsymbol{N},\ d \in \boldsymbol{R}.$$

Число d называется **разностью арифметической прогрессии.**

Из равенства $a_{n+1} = a_n + d$ следует, что $d = a_{n+1} - a_n$.

Чтобы задать арифметическую прогрессию (a_n), достаточно задать ее первый член a_1 и разность d.

$$\boxed{a_{n+1} = a_n + d}$$

Например, если $a_1 = 3$, $d = 4$, то получится арифметическая прогрессия 3; 7; 11; 15; ... .

Если $a_1 = 2$, $d = -3$, то арифметическая прогрессия имеет вид 2; –1; –4; –7; –10; ... .

Если $a_1 = -7$, $d = 0$, то все члены арифметической прогрессии равны между собой: –7; –7; –7; –7; ... .

Чтобы вычислить любой член арифметической прогрессии, не вычисляя все предыдущие члены, используют формулу n-го члена арифметической прогрессии

Формула n-го члена арифметической прогрессии (a_n) позволяет вычислить любой член прогрессии, зная ее первый член a_1, номер члена n и разность прогрессии d.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$a_{21}=a_1+20d$; $a_{27}=a_1+26d$

$a_{43}=a_1+42d$; $a_{34}=a_1+33d$

Пример 1. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, $a_1 = 2$, $d = 2{,}5$. Найдите 100-й член прогрессии.

Решение. По формуле n-го члена получим:

$a_{100} = a_1 + (100 - 1)d = 2 + 99 \cdot 2{,}5 = 249{,}5.$

Ответ: 249,5.

3. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите двадцатый член прогрессии, если $a_1 = 3$, $d = 1{,}6$.	По формуле n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n-1)d$ получим: $a_{20} = 3 + (20 - 1) \cdot 1{,}6 = 33{,}4$.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$Sn = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad (1)$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n \quad (2)$$

Пример 1. Найдите сумму пятидесяти первых членов арифметической прогрессии 3; 7; 11; 15; ... .

Решение. В этой прогрессии первый член равен 3, а разность $d = 7 - 3 = 4$. Применим формулу суммы

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

для $n = 50$ и получим:

$$S_{50} = \frac{2 \cdot 3 + 4(50-1)}{2} \cdot 50 = 5050.$$

Ответ: 5050.

Формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Пример 2. В арифметической прогрессии $a_1 = -2$, $a_{85} = 44$. Найдите сумму 85 первых членов арифметической прогрессии.

Решение. Применим формулу сумы $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ и получим: $S_{85} = \frac{a_1 + a_{85}}{2} \cdot 85$; $S_{85} = \frac{-2 + 44}{2} \cdot 85 = 21 \cdot 85 = 1785$.

Ответ: 1785.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Определение. Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый следующий, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же для данной последовательности число, не равное нулю, т. е.

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \text{ где } n \in N,\ q \neq 0.$$

Число q называется **знаменателем геометрической прогрессии.**

Из равенства $b_{n+1} = b_n \cdot q$ следует, что $q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

Чтобы задать геометрическую прогрессию (b_n), достаточно задать ее первый член b_1 и знаменатель q.

$$\boxed{b_{n+1} = b_n \cdot q}$$

Например, если $b_1 = 3$, $q = 2$, то получится геометрическая прогрессия 3; 6; 12; 24; ... .

Если $b_1 = 3$, $q = -2$, то получится геометрическая прогрессия, знаки членов у которой чередуются, так как знаменатель прогрессии является отрицательным числом: 3; –6; 12; –24; ... .

Если $b_1 = 16$, $q = \frac{1}{4}$, то геометрическая прогрессия имеет вид 16; 4; 1; $\frac{1}{4}$; ... .

Если $b_1 = 3$, $q = 1$, то все члены геометрической прогрессии равны между собой: 3; 3; 3; 3; ... .

Чтобы вычислить любой член геометрической прогрессии, не вычисляя все предыдущие члены, используют **формулу n-го члена геометрической прогрессии**

Формула n-го члена геометрической прогрессии (b_n) позволяет вычислить любой член прогрессии, зная ее первый член, номер члена и знаменатель прогрессии.

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Пример 1. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия, $b_1 = 2$, $q = 3$. Найдите 8-й член прогрессии.

Решение. По формуле n-го члена получим:

$$b_8 = b_1 \cdot q^{8-1} = 2 \cdot 3^7 = 2 \cdot 2187 = 4374.$$

Ответ: 4374.

3. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите пятый член этой прогрессии, если $b_1 = -0{,}1$, $q = 4$.	По формуле n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ получим: $b_5 = b_1 \cdot q^4 = -0{,}1 \cdot 4^4 = -25{,}6$.

Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Пример 1. Найдите сумму десяти первых членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 0{,}5$, $q = 2$.

Решение. Применим формулу суммы $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ для $n = 10$, получим $S_{10} = \frac{b_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{0{,}5(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 0{,}5 \cdot (1024 - 1) = 0{,}5 \cdot 1023 = 511{,}5$.

Ответ: 511,5.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

$$|q| < 1$$

Например, геометрическая прогрессия 8; 4; 2; ... является бесконечно убывающей геометрической прогрессий, так как $q = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} < 1.$

Геометрическая прогрессия 9; –3; 1; $-\frac{1}{3}$, ... также является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, поскольку $\left|q\right| = \left|\frac{-3}{9}\right| = \frac{1}{3} < 1.$