

ПРОГРЕССИИ

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ



Преподаватель:
Махмудов
Кароматулло Азизович

Новосибирск – 2020

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Определение. Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же для данной последовательности числом, т. е.

$$a_{n+1} = a_n + d, \text{ где } n \in N, d \in R.$$

Число d называется разностью арифметической прогрессии.

Из равенства $a_{n+1} = a_n + d$ следует, что $d = a_{n+1} - a_n$.

Чтобы задать арифметическую прогрессию (a_n) , достаточно задать ее первый член a_1 и разность d .

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Например, если $a_1 = 3$, $d = 4$, то получится арифметическая прогрессия $3; 7; 11; 15; \dots$.

Если $a_1 = 2$, $d = -3$, то арифметическая прогрессия имеет вид $2; -1; -4; -7; -10; \dots$.

Если $a_1 = -7$, $d = 0$, то все члены арифметической прогрессии равны между собой: $-7; -7; -7; -7; \dots$.

Чтобы вычислить любой член арифметической прогрессии, не вычисляя все предыдущие члены, используют формулу n -го члена арифметической прогрессии

Формула n -го члена арифметической прогрессии (a_n) позволяет вычислить любой член прогрессии, зная ее первый член a_1 , номер члена n и разность прогрессии d .

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{21} = a_1 + 20d; \quad a_{27} = a_1 + 26d$$

$$a_{43} = a_1 + 42d; \quad a_{34} = a_1 + 33d$$

Пример 1. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, $a_1 = 2$, $d = 2,5$. Найдите 100-й член прогрессии.

Решение. По формуле n -го члена получим:

$$a_{100} = a_1 + (100 - 1)d = 2 + 99 \cdot 2,5 = 249,5.$$

Ответ: 249,5.

3. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите двадцатый член прогрессии, если $a_1 = 3$, $d = 1,6$.

По формуле n -го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n - 1)d$ получим: $a_{20} = 3 + (20 - 1) \cdot 1,6 = 33,4$.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad (1)$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n \quad (2)$$

Пример 1. Найдите сумму пятидесяти первых членов арифметической прогрессии 3; 7; 11; 15;

Решение. В этой прогрессии первый член равен 3, а разность $d = 7 - 3 = 4$. Применим формулу суммы

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

для $n = 50$ и получим:

$$S_{50} = \frac{2 \cdot 3 + 4(50-1)}{2} \cdot 50 = 5050.$$

Ответ: 5050.

Пример 2. В арифметической прогрессии $a_1 = -2$, $a_{85} = 44$. Найдите сумму 85 первых членов арифметической прогрессии.

Решение. Применим формулу суммы $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ и получим: $S_{85} = \frac{a_1 + a_{85}}{2} \cdot 85$; $S_{85} = \frac{-2 + 44}{2} \cdot 85 = 21 \cdot 85 = 1785$.

Ответ: 1785.

Формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Определение. Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый следующий, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же для данной последовательности число, не равное нулю, т. е.

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \text{ где } n \in N, q \neq 0.$$

Число q называется знаменателем геометрической прогрессии.

Из равенства $b_{n+1} = b_n \cdot q$ следует, что $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

Чтобы задать геометрическую прогрессию (b_n) , достаточно задать ее первый член b_1 и знаменатель q .

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

Например, если $b_1 = 3$, $q = 2$, то получится геометрическая прогрессия 3; 6; 12; 24;

Если $b_1 = 3$, $q = -2$, то получится геометрическая прогрессия, знаки членов у которой чередуются, так как знаменатель прогрессии является отрицательным числом: 3; -6; 12; -24;

Если $b_1 = 16$, $q = \frac{1}{4}$, то геометрическая прогрессия имеет вид 16; 4; 1; $\frac{1}{4}$;

Если $b_1 = 3$, $q = 1$, то все члены геометрической прогрессии равны между собой: 3; 3; 3; 3;

Чтобы вычислить любой член геометрической прогрессии, не вычисляя все предыдущие члены, используют формулу n -го члена геометрической прогрессии

Формула n -го члена геометрической прогрессии (b_n) позволяет вычислить любой член прогрессии, зная ее первый член, номер члена и знаменатель прогрессии.

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Пример 1. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия, $b_1 = 2$, $q = 3$. Найдите 8-й член прогрессии.

Решение. По формуле n -го члена получим:

$$b_8 = b_1 \cdot q^{8-1} = 2 \cdot 3^7 = 2 \cdot 2187 = 4374.$$

Ответ: 4374.

3. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите пятый член этой прогрессии, если $b_1 = -0,1$, $q = 4$.

По формуле n -го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ получим: $b_5 = b_1 \cdot q^4 = -0,1 \cdot 4^4 = -25,6$.

**Формула суммы n первых
членов геометрической
прогрессии**

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Пример 1. Найдите сумму десяти первых членов геометрической прогрессии (b_n) , в которой $b_1 = 0,5$, $q = 2$.

Решение. Применим формулу суммы $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ для $n = 10$, получим $S_{10} = \frac{b_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{0,5(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 0,5 \cdot (1024 - 1) = 0,5 \cdot 1023 = 511,5$.

Ответ: 511,5.

Сумма бесконечно
убывающей геометрической
прогрессии:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

$$|q| < 1$$

Например, геометрическая прогрессия $8; 4; 2; \dots$ является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, так как $q = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} < 1$.

Геометрическая прогрессия $9; -3; 1; -\frac{1}{3}, \dots$ также является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, поскольку $|q| = \left| \frac{-3}{9} \right| = \frac{1}{3} < 1$.