Задача Цілочислового Лінійного Програмування

Дослідження операцій

Математична модель ЗЦЛП

Цільова функція

$$\min(\max) z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \qquad (1)$$

Обмеження

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}; \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}; \qquad (3)$$

$$x_j \text{ ціла}, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (4)$$

Округлення

Один з найпростіших підходів до вирішення ЗЦЛП:

1) вирішити неперервну задачу (ЗЛП)
2) округлити координати отриманого оптимуму до допустимих цілих значень.

Округлення

Один з найпростіших підходів до вирішення ЗЦЛП:

1) вирішити неперервну задачу (ЗЛП)
2) округлити координати отриманого оптимуму до допустимих цілих значень.

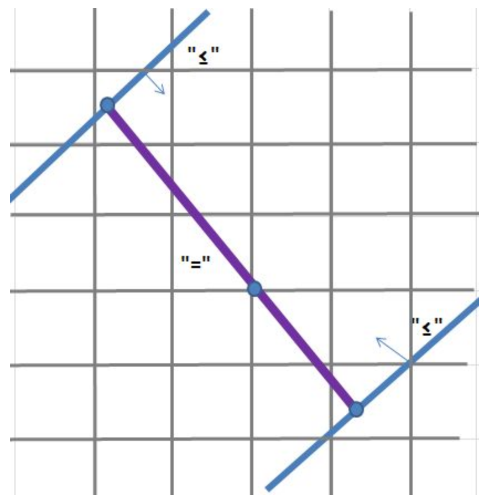
АЛЕ

немає гарантії, що округлений розв’язок буде **допустимим** і / або **оптимальним**.

Проблеми, що виникають при округленні розв'язку ЗЛП (1)

Випадок 1

Серед вихідних обмежень є обмеження-рівності.

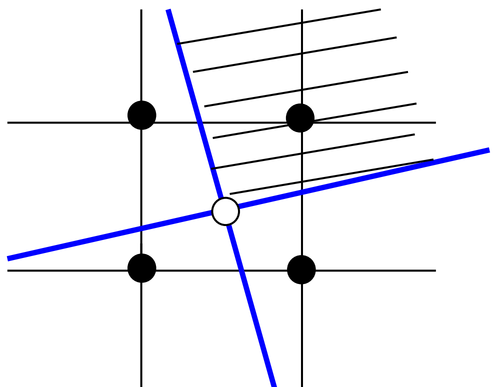


В цьому випадку округлений розв'язок (майже) завжди є недопустимим

Проблеми, що виникають при округленні розв’язку ЗЛП (2)

Випадок 2

Вихідні обмеження є обмеженнями-нерівностями.



У просторі R^n кожна повністю нецілочислова точка має 2^n цілочислових точок-сусідок.

Оскільки заздалегідь не відомо, в який бік потрібно виконувати округлення, необхідно перебрати усі сусідні точки.

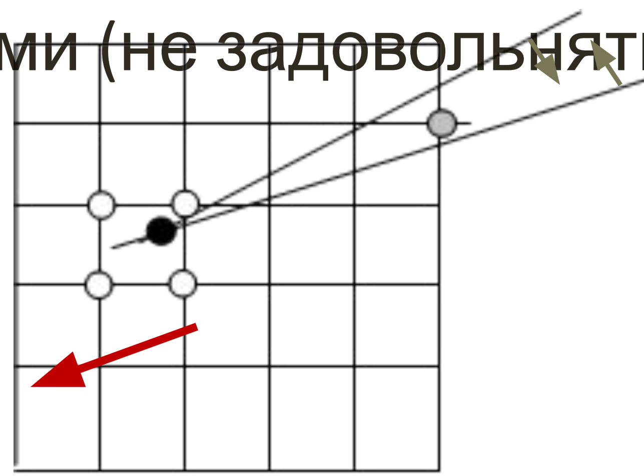
В цьому випадку округлений розв’язок **не завжди** є допустимим та/або оптимальним.

Проблеми, що виникають при округленні розв’язку ЗЛП (3)

Випадок 2.1

Вихідні обмеження є обмеженнями-нерівностями.

Усі округлені точки можуть виявитися не допустимими (не задовольнятимуть усім обмеженням)

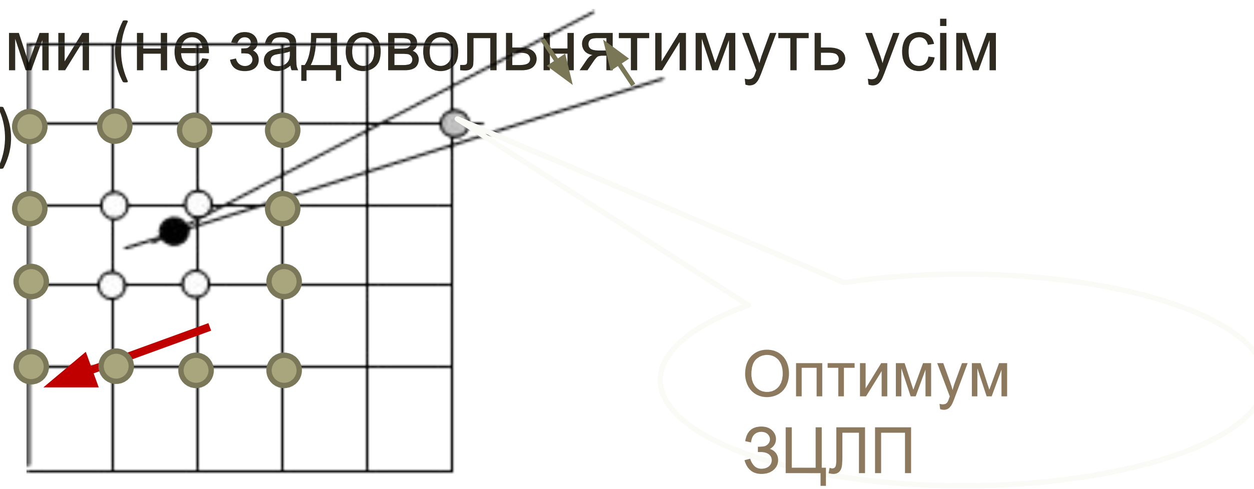


Проблеми, що виникають при округленні розв’язку ЗЛП (3)

Випадок 2.1

Вихідні обмеження є обмеженнями-нерівностями.

Усі округлені точки можуть виявитися не допустимими (не задовольнятимуть усім обмеженням)



Проблеми, що виникають при округленні розв'язку ЗЛП (4)

Випадок 2.2

Вихідні обмеження є обмеженнями-нерівностями.

Округлена допустима точка може виявитися не оптимальною.

Приклад

$$z = 610x_1 + 500x_2 \to \max$$

$$6x_1 + 5x_2 \le 15$$

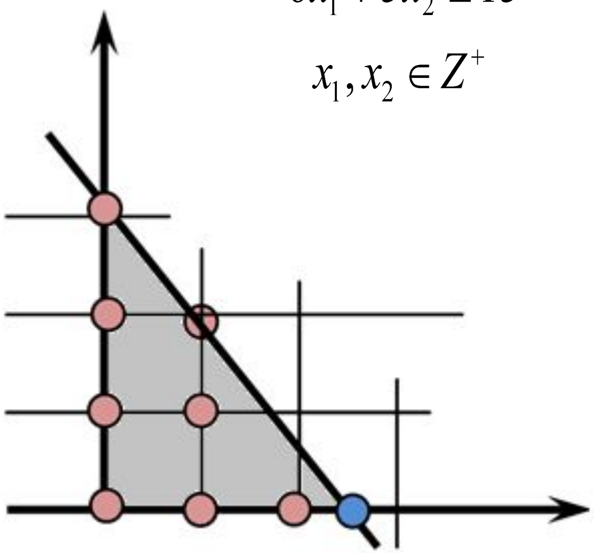
$$x_1, x_2 \in Z^+$$

Проблеми, що виникають при округленні розв'язку ЗЛП (5)

$$z = 610x_1 + 500x_2 \to \max$$

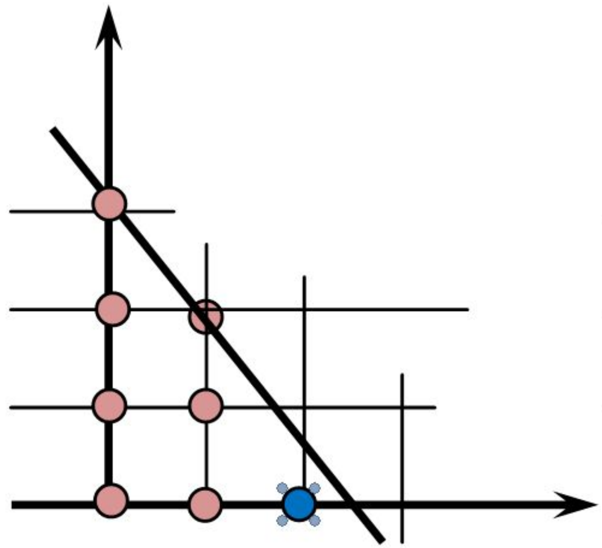
$$6x_1 + 5x_2 \le 15$$

$$x_1, x_2 \in Z^+$$



$$x_1 = 2.5,\ x_2 = 0$$

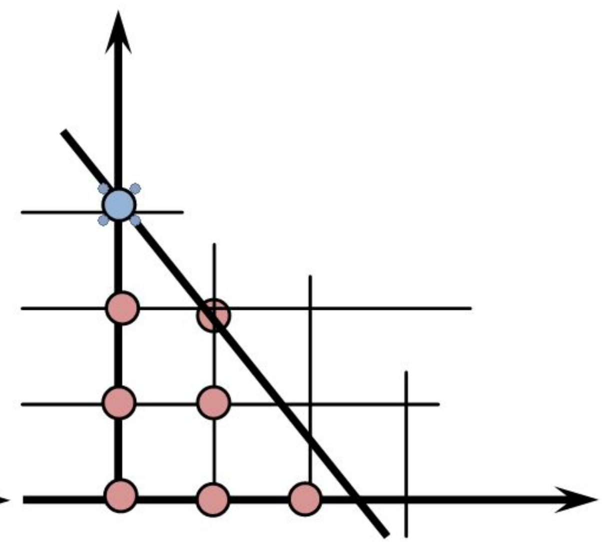
Розв'язок ЗЛП
(без умов: x_j цілі)



$$x_1 = 2,\ x_2 = 0$$

$$z = 1220.$$

Округлений розв'язок ЗЛП



$$x_1 = 0,\ x_2 = 3$$

$$z = 1500.$$

Оптимум ЗЦЛП

Методи розв’язання ЗЦЛП

- Методи відсікань Гоморі
- Метод гілок та меж

Алгоритм Гоморі

Дослідження операцій

Математична модель ЗЦЛП

Цільова функція

$$\min\ (\max)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \qquad (1)$$

Обмеження

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}; \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}; \qquad (3)$$

$$x_j\ \text{ціла}, \quad j = \overline{1, n}. \qquad (4)$$

Існує принципова можливість звести розв’язання ЗЦЛП (1) - (4) до знаходження оптимального розв’язку деякої ЗЛП

$$\min(\max)\, z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \quad (1)$$

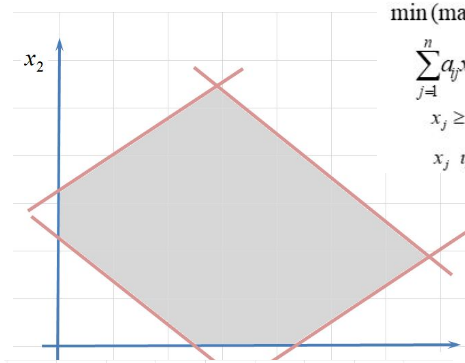
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}; \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}; \quad (3)$$

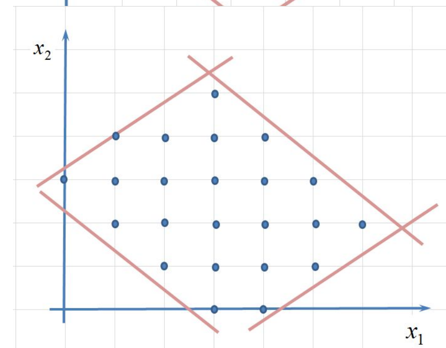
$$x_j \text{ ціла}, \quad j = \overline{1,n}. \quad (4)$$

Нехай

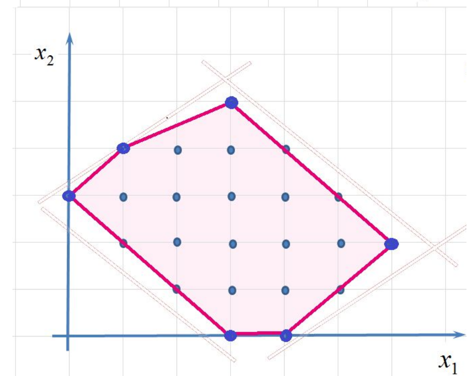
$X = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\}$ - багатогранник



$X^{ц} = \{x \in Z^n | x \in X\}$ - множина усіх цілих точок в X, $X^{ц} \subseteq X$



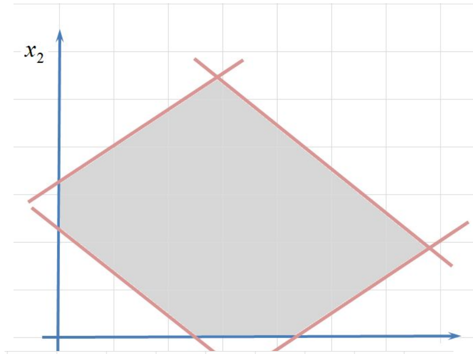
$\tilde{X}^{ц}$ - опукла лінійна оболонка точок множини $X^{ц}$, $X^{ц} \subseteq \tilde{X}^{ц}$



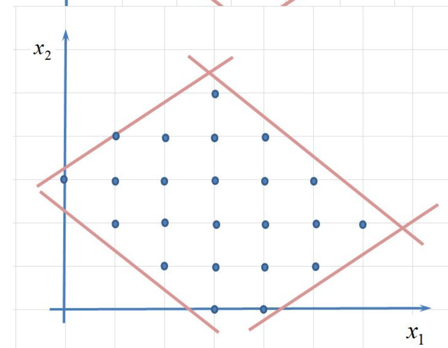
X – багатогранник → $X^{ц}$ – скінчена множина → $\tilde{X}^{ц}$ – багатогранни, у якого УСІ вершини ЦІЛІ

Нехай

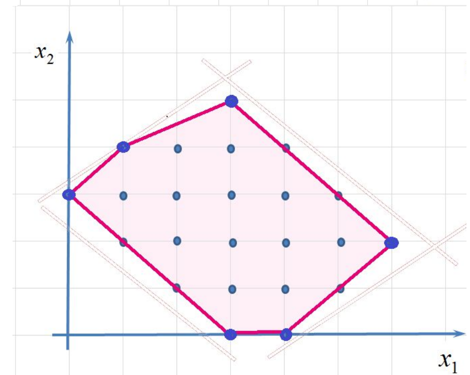
$X = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\}$ - багатогранник



$X^{ц} = \{x \in Z^n | x \in X\}$ - множина усіх цілих точок в X, $X^{ц} \subseteq X$



$\tilde{X}^{ц}$ - опукла лінійна оболонка точок множини $X^{ц}$, $X^{ц} \subseteq \tilde{X}^{ц}$



X – багатогранник → $X^{ц}$ – скінчена множина → $\tilde{X}^{ц}$ – ЦІЛОЧИСЛОВИЙ багатогранник

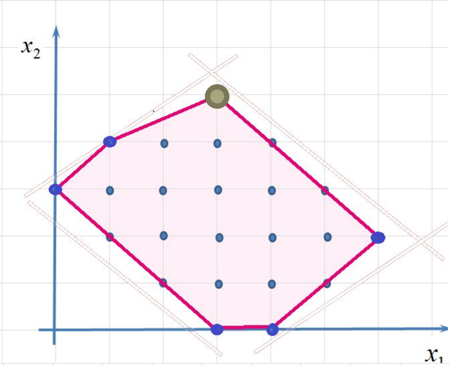
Теорема (про оптимальність вершини цілочислового багатогранника)

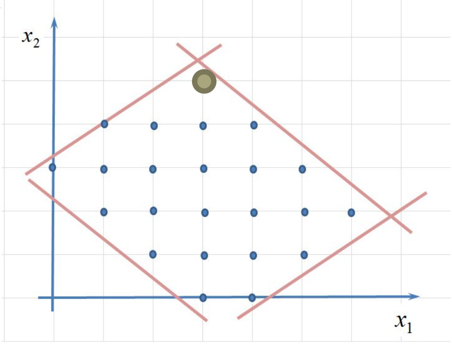
Будь-який оптимальний **базисний** розв’язок ЗЛП

$$\max c^T x \qquad (5)$$
$$x \in \widetilde{X^{ц}}$$

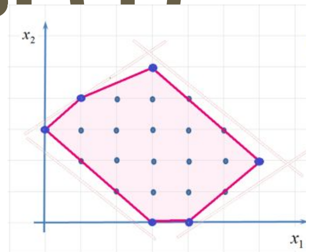
є оптимальним розв’язком задачі

$$\max c^T x \qquad (6)$$
$$x \in X^{ц}$$

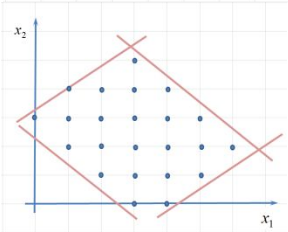




Доказательство теоремы (1)



(5)



(6)

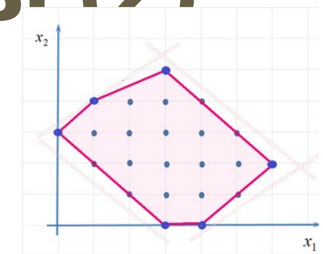
Пусть

$\tilde{x}^*$ - оптимальное **<u>базисное</u>** решение задачи (5) (лучшее в $\tilde{X}^ц$),

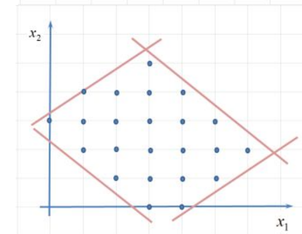
x^* - оптимальное решение исходной задачи (6) (лучшее в $X^ц$),

и пусть $X^{цв}$ - множество вершин $\tilde{X}^ц$ (они целочисленные).

Доказательство теоремы (2)



(5)



(6)

Пусть

$\tilde{x}^*$ - оптимальное **базисное** решение задачи (5) (лучшее в $\tilde{X}^{ц}$),

x^* - оптимальное решение исходной задачи (6) (лучшее в $X^{ц}$),

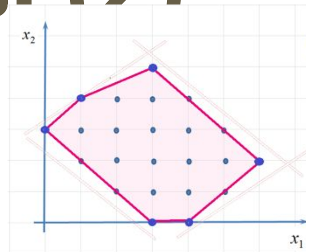
и пусть $X^{цв}$ - множество вершин $\tilde{X}^{ц}$ (они целочисленные).

$\tilde{x}^*$ – ДБР задачи (5)

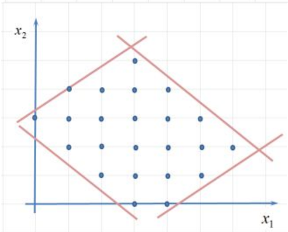
эта точка – целочисленная вершина $\tilde{x}^* \in X^{цв} \subset X^{ц}$

$c^T \tilde{x}^* \le c^T x^*$

Доказательство теоремы (2)



(5)



(6)

Пусть

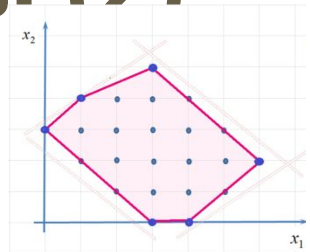
$\tilde{x}^*$ - оптимальное **<u>базисное</u>** решение задачи (5) (лучшее в $\tilde{X}^{ц}$),

x^* - оптимальное решение исходной задачи (6) (лучшее в $X^{ц}$),

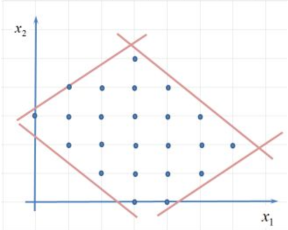
и пусть $X^{цв}$ - множество вершин $\tilde{X}^{ц}$ (они целочисленные).

$\tilde{x}^*$ – ДБР задачи (5)	эта точка – целочисленная вершина $\tilde{x}^* \in X^{цв} \subset X^{ц}$	$c^T \tilde{x}^* \le c^T x^*$
x^* – целочис-ленное решение	$x^* \in X^{ц} \subset \tilde{X}^{ц}$ (выпуклая оболочка охватывает все целые точки)	$c^T x^* \le c^T \tilde{x}^*$

Доказательство теоремы (2)



(5)



(6)

Пусть

$\tilde{x}^*$ - оптимальное **<u>базисное</u>** решение задачи (5) (лучшее в $\tilde{X}^{ц}$),

x^* - оптимальное решение исходной задачи (6) (лучшее в $X^{ц}$),

и пусть $X^{цв}$ - множество вершин $\tilde{X}^{ц}$ (они целочисленные).

$\tilde{x}^*$ – ДБР задачи (5)	эта точка – целочисленная вершина $\tilde{x}^* \in X^{цв} \subset X^{ц}$	$c^T \tilde{x}^* \le c^T x^*$
x^* – целочис-ленное решение	$x^* \in X^{ц} \subset \tilde{X}^{ц}$ (выпуклая оболочка охватывает все целые точки)	$c^T x^* \le c^T \tilde{x}^*$

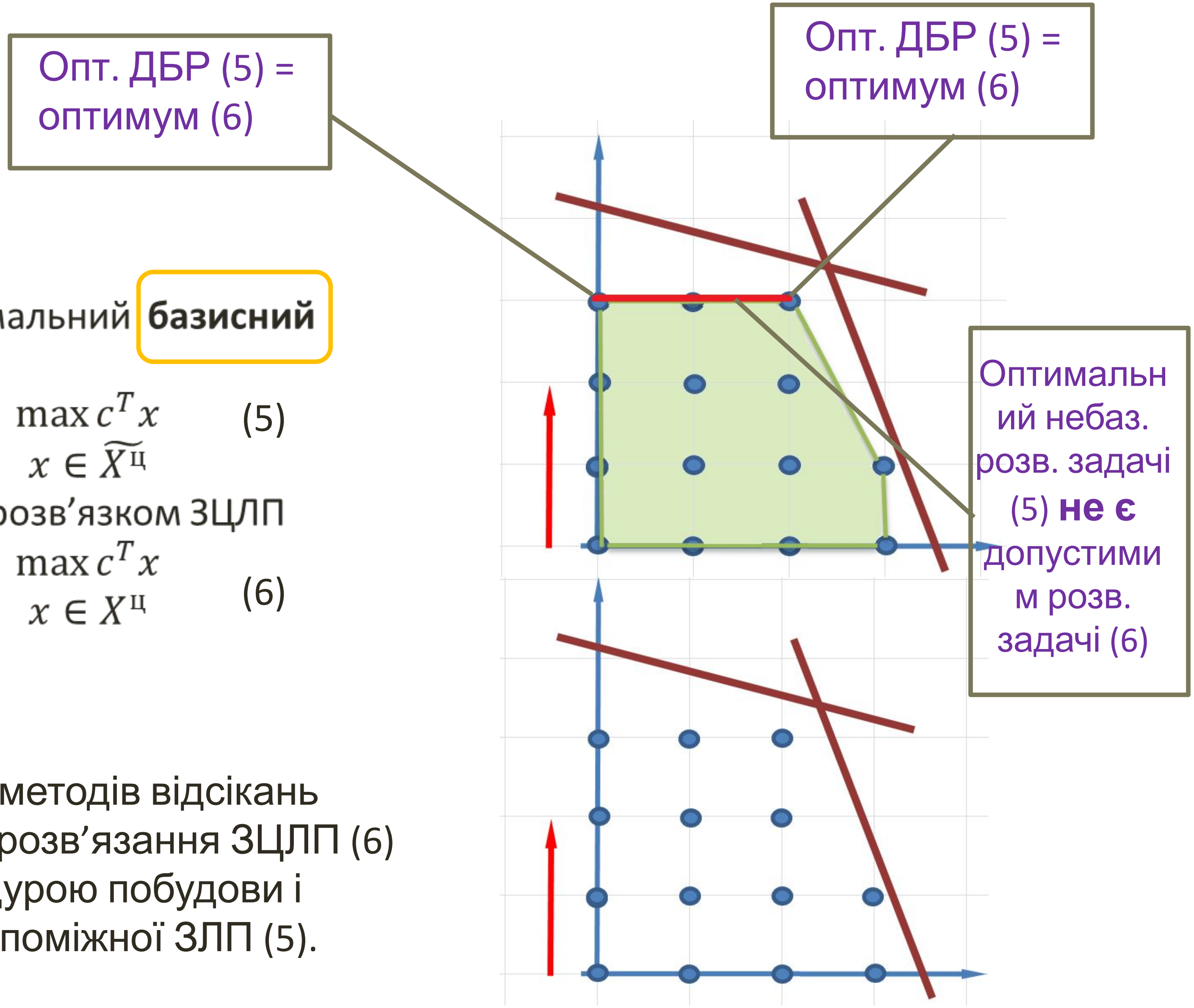
$c^T x^* = c^T \tilde{x}^*$

Будь-який оптимальний **базисний** розв'язок ЗЛП

$$\max c^T x \qquad (5)$$
$$x \in \widetilde{X^{ц}}$$

є оптимальним розв'язком ЗЦЛП

$$\max c^T x \qquad (6)$$
$$x \in X^{ц}$$



Отже, в основі методів відсікань лежить заміна розв'язання ЗЦЛП (6) деякою процедурою побудови і розв'язання допоміжної ЗЛП (5).

Послаблена задача (Пос

$$\min(\max) z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}; \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}; \qquad (3)$$

$$x_j \text{ — цілі}, \quad j = \overline{1,n} \qquad (4)$$

Визначення. ***Послабленою*** *називається* задача ЛП, яка отримана з ЗЦЛП шляхом відкидання умов цілочисловості.

Властивості ПосЗ

1) якщо ПосЗ не має допустимих розв'язків, їх не має і вихідна задача;

2) оптимальне значення ЦФ послабленої задачі визначає *нижню (верхню)* границю оптимального значення ЦФ вихідної задачі на *min (max)*

3) якщо оптимальний розв'язок ПосЗ є *допустимим* для вихідної ЗЦЛП, то він є і *оптимальним* для неї.

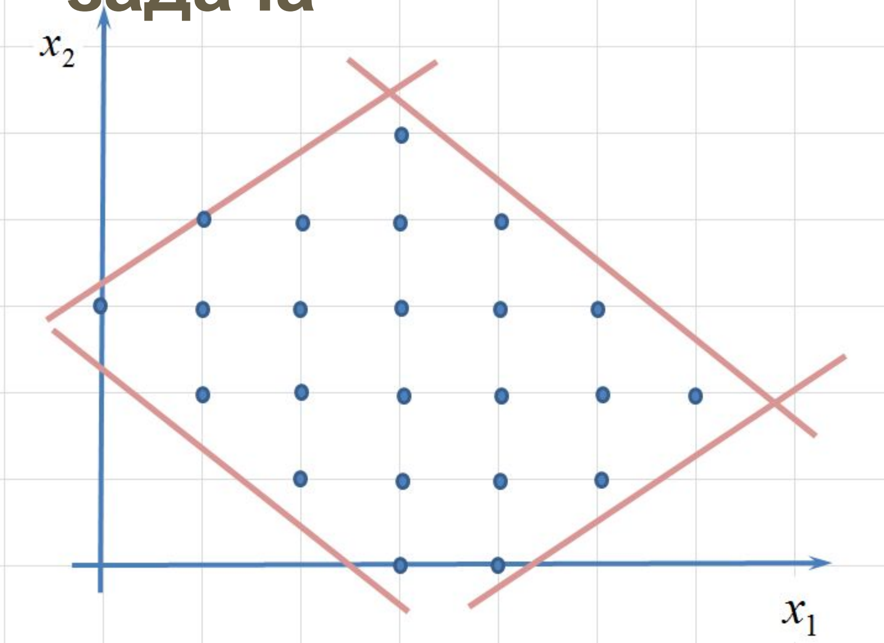
$$\min(\max) z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}; \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}; \qquad (3)$$

$$x_j \ \text{ціла}, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (4)$$

Вихідна задача



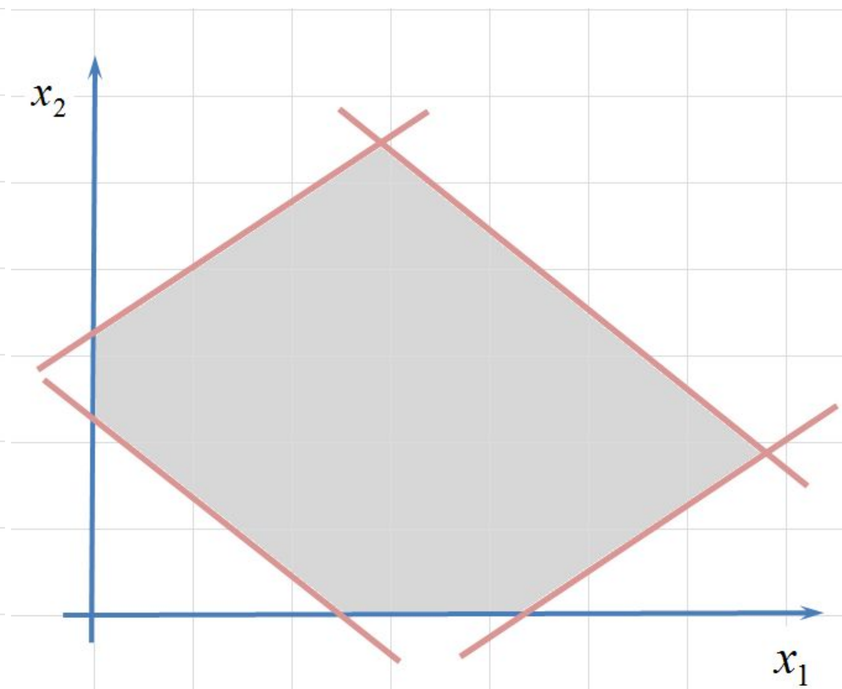
ЗЦЛП

$$\min(\max) z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}; \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}; \qquad (3)$$

Послаблена задача



ПосЗ (ЗЛП)

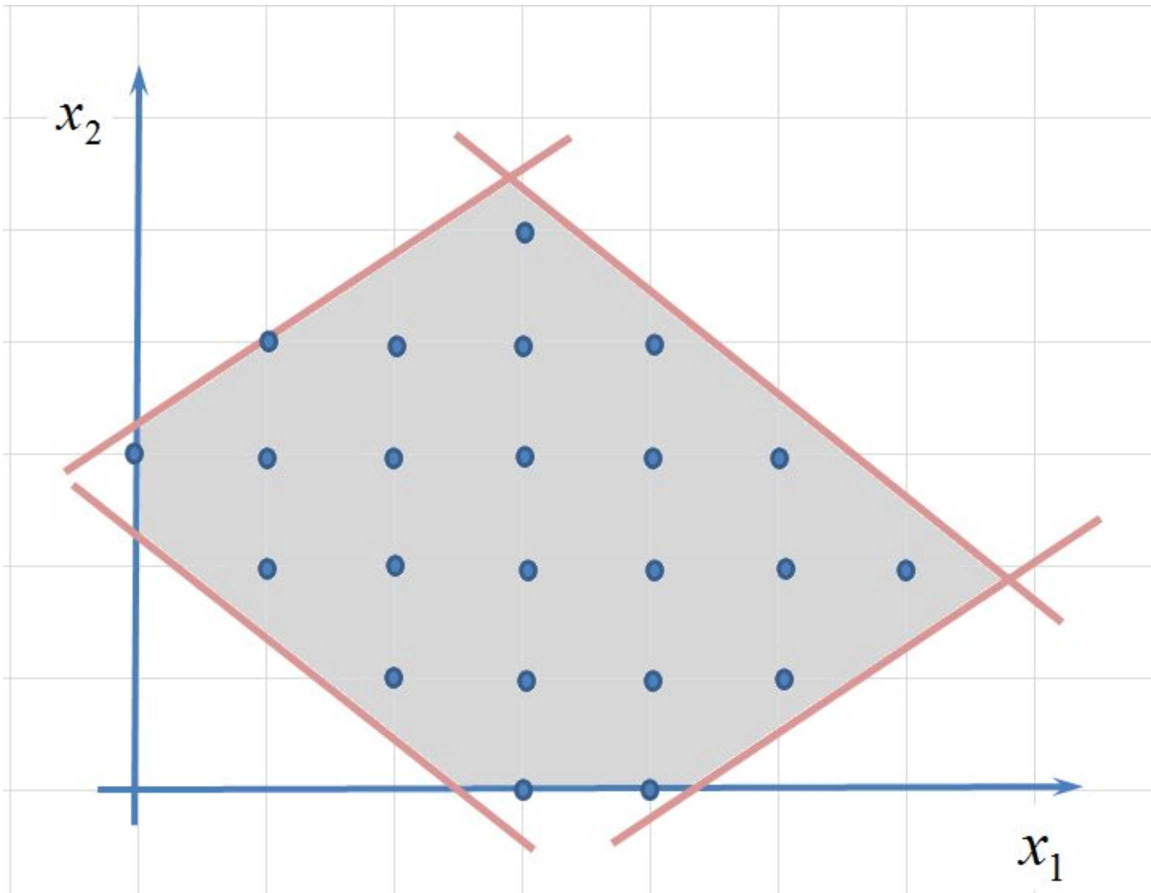
Схема розв’язання

1) Вихідною точкою є оптимальний розв’язок відповідної послабленої задачі.

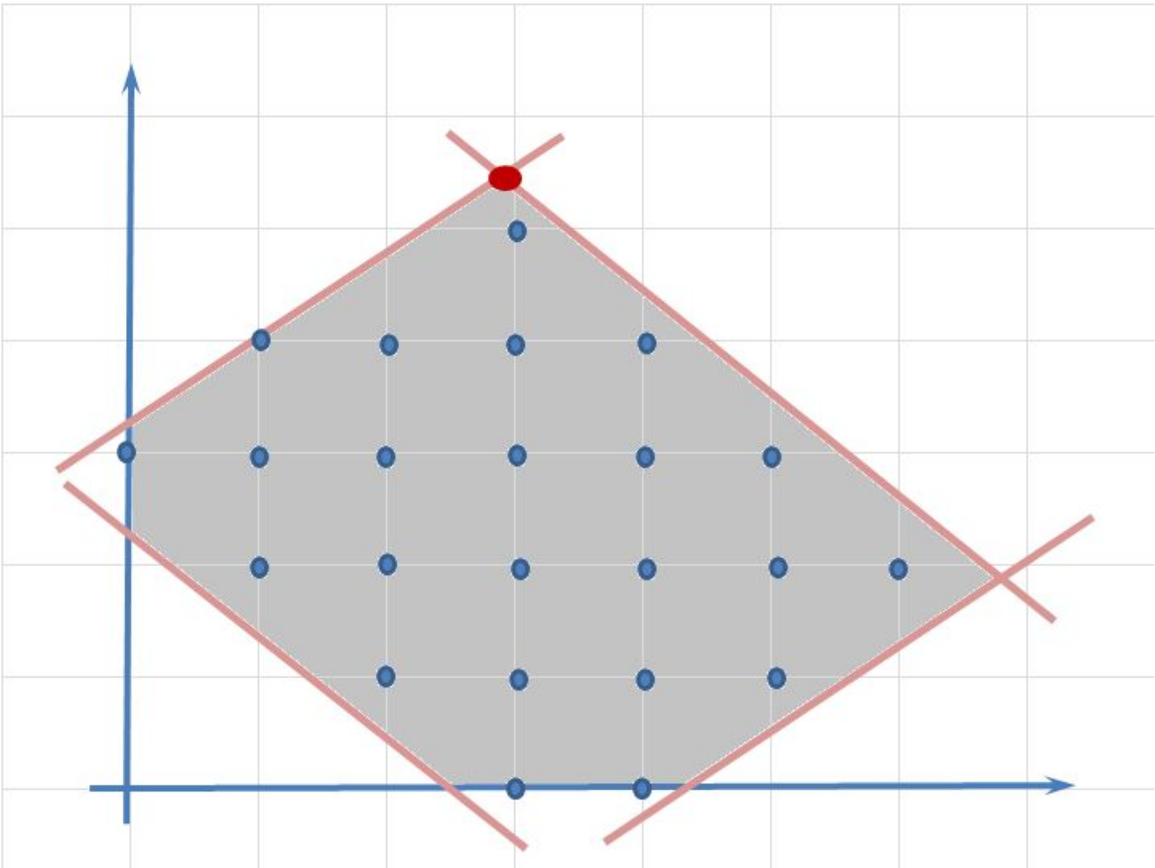
2) На кожній ітерації додається лінійне обмеження, яке задовольняє цілочисловим розв’язкам вихідної задачі, але виключає поточний нецілочисловий розв’язок (**багатогранник стискується**).

3) Обчислювальний процес припиняється, як тільки буде досягнуто будь-який цілочисловий розв’язок.

Графічна ілюстрація процесу розв'язання

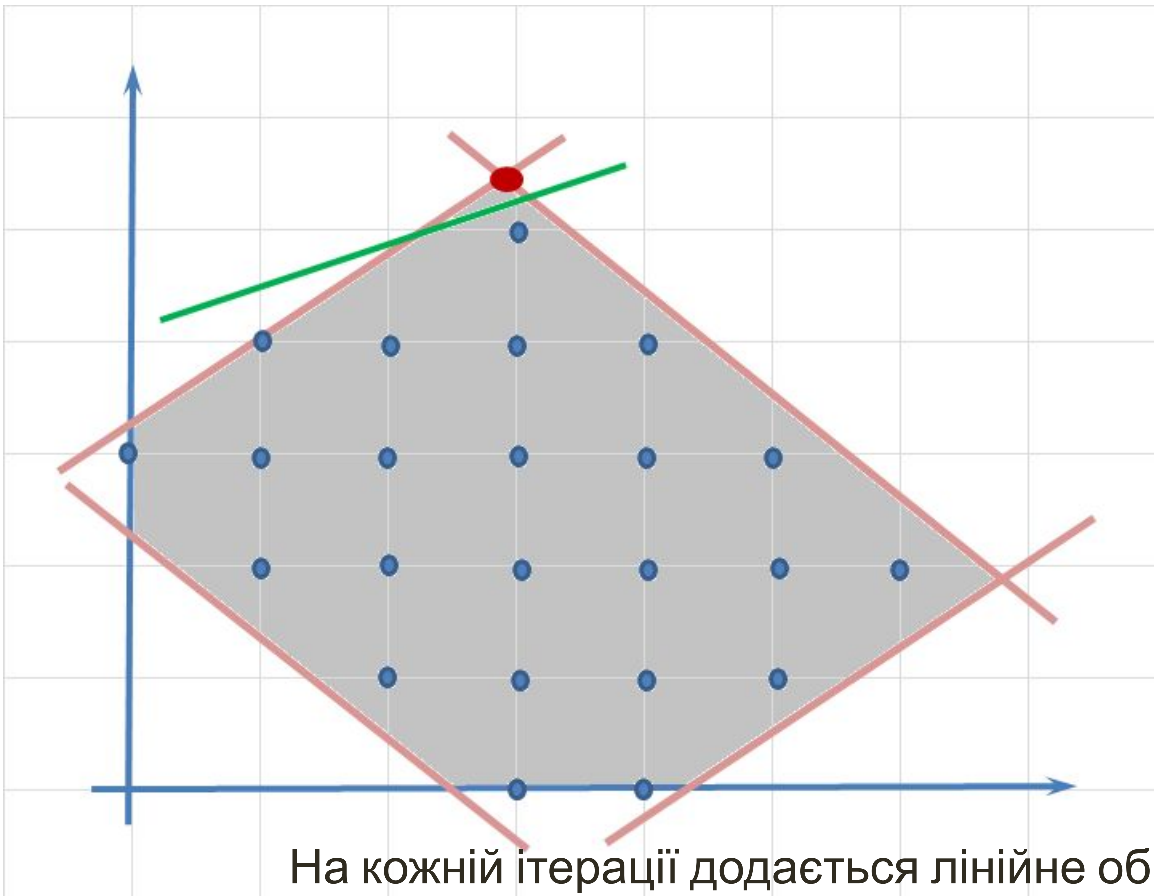


Графічна ілюстрація процесу розв'язання



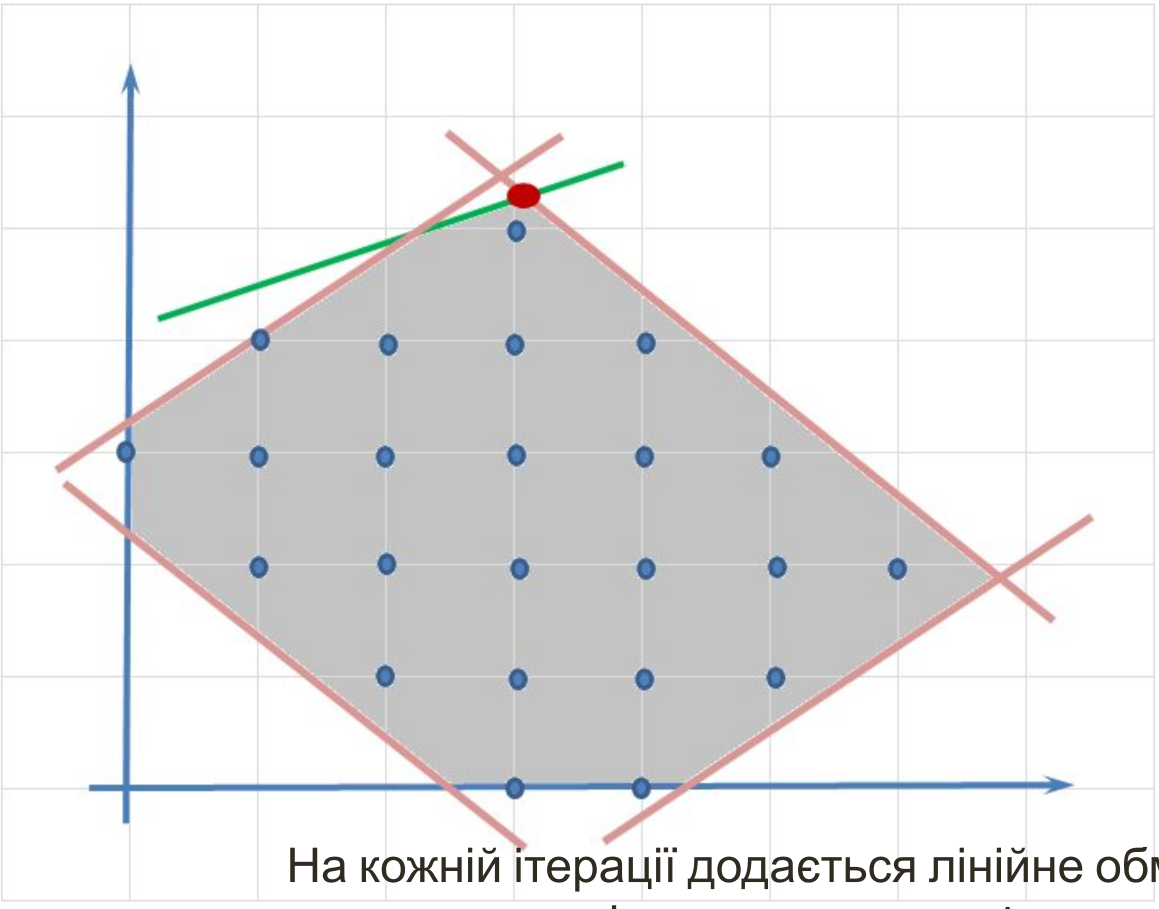
Вихідною точкою є оптимальний розв'язок відповідної послабленої задачі

Графічна ілюстрація процесу розв’язання



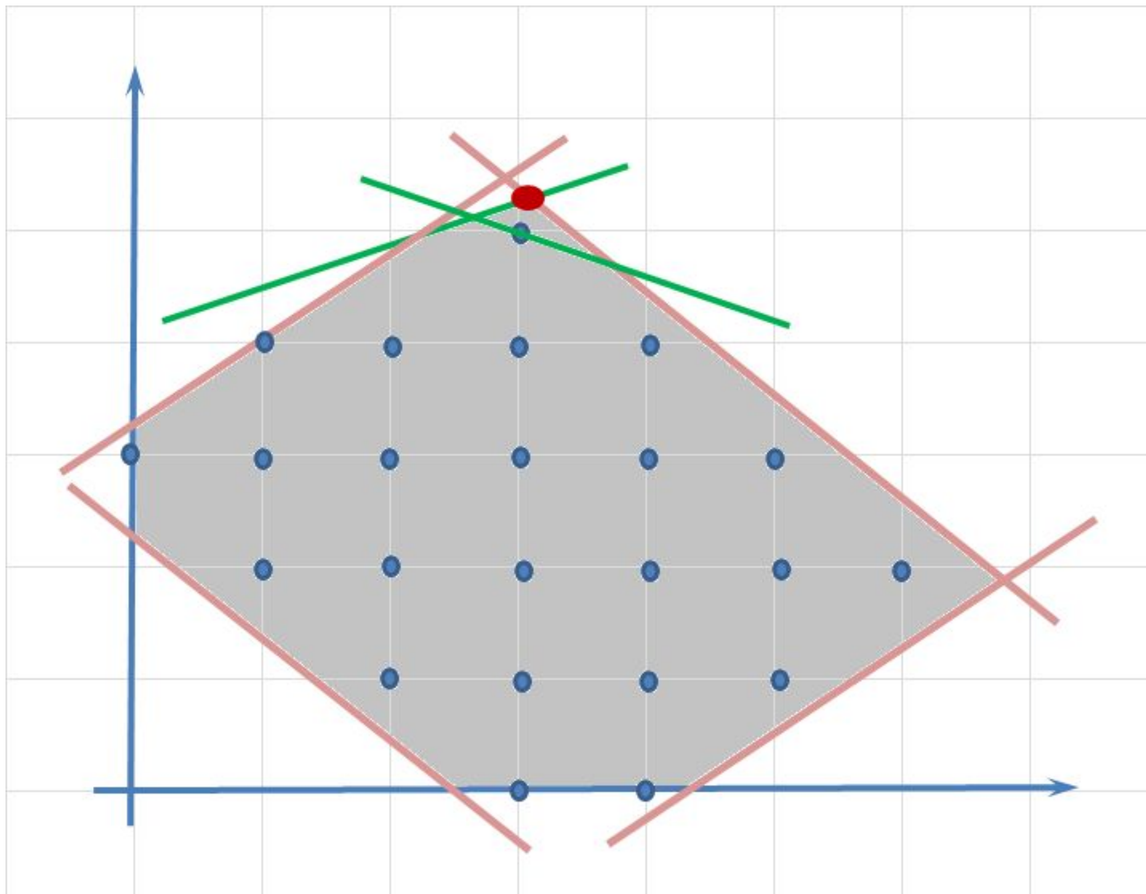
На кожній ітерації додається лінійне обмеження, яке задовольняє цілочисловим розв’язкам вихідної задачі, але виключає поточний нецілочисловий розв’язок

Графічна ілюстрація процесу розв’язання

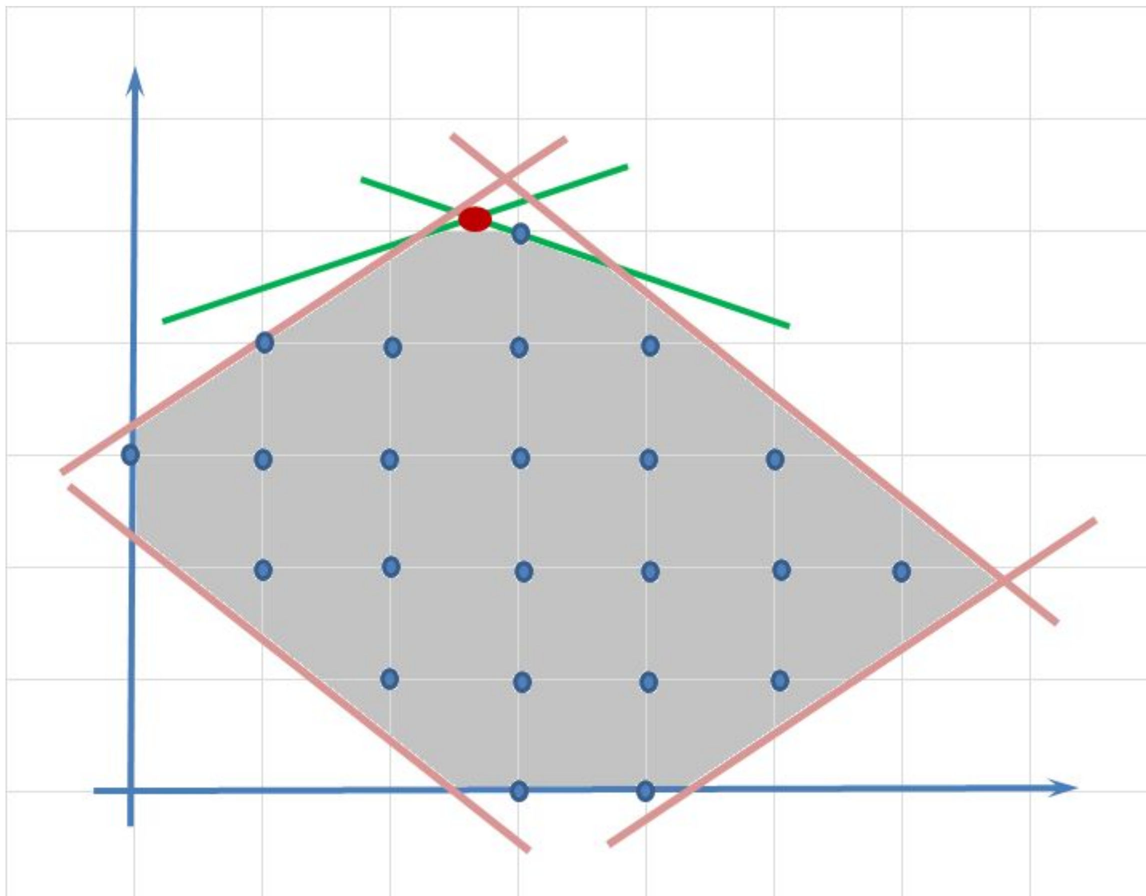


На кожній ітерації додається лінійне обмеження, яке задовольняє цілочисловим розв’язкам вихідної задачі, але виключає поточний нецілочисловий розв’язок (**багатогранник стискується**).

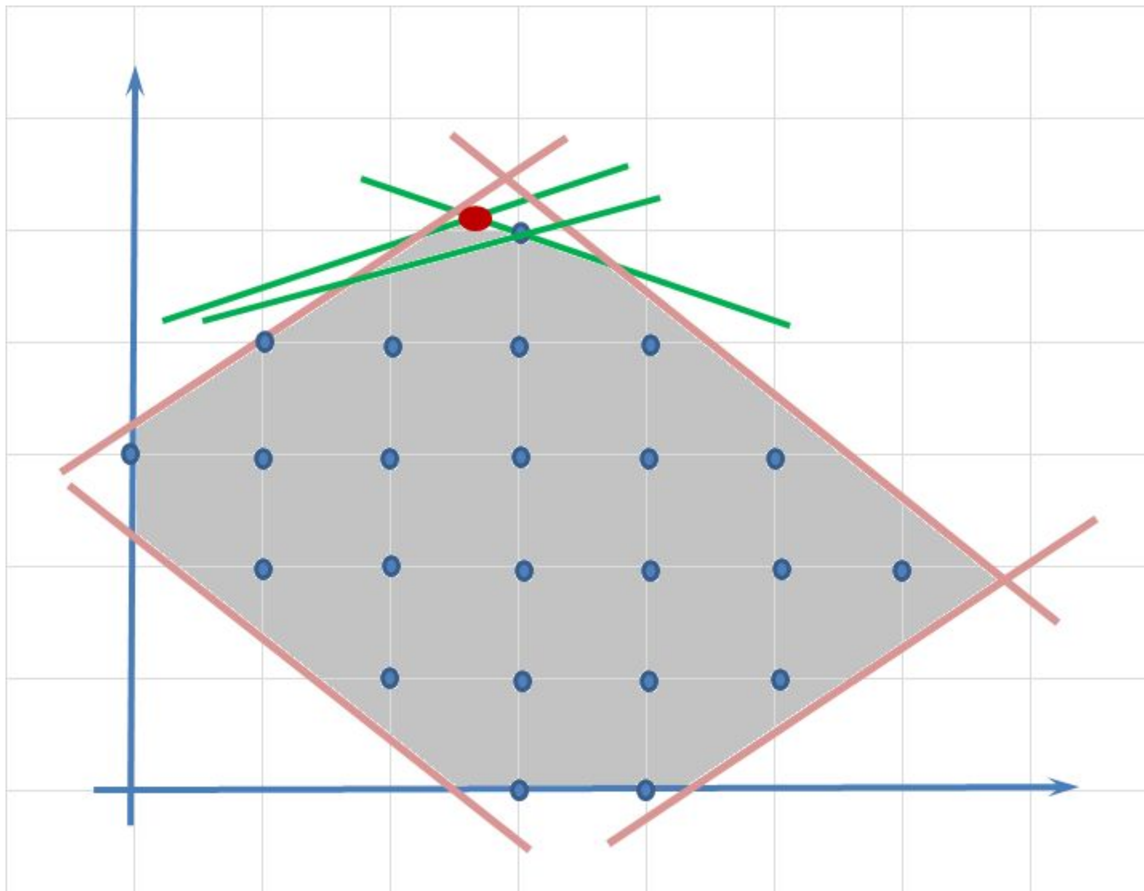
Графічна ілюстрація процесу розв’язання



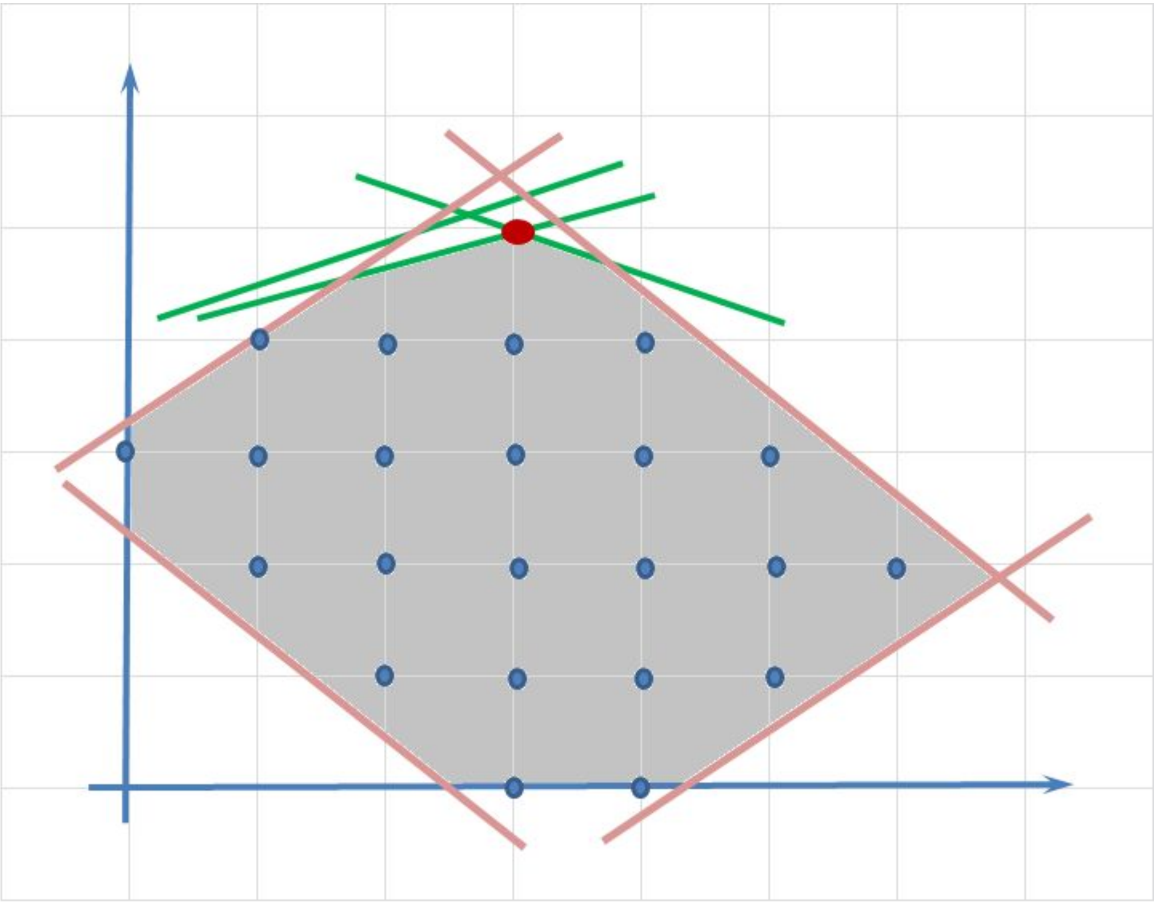
Графічна ілюстрація процесу розв'язання



Графічна ілюстрація процесу розв’язання

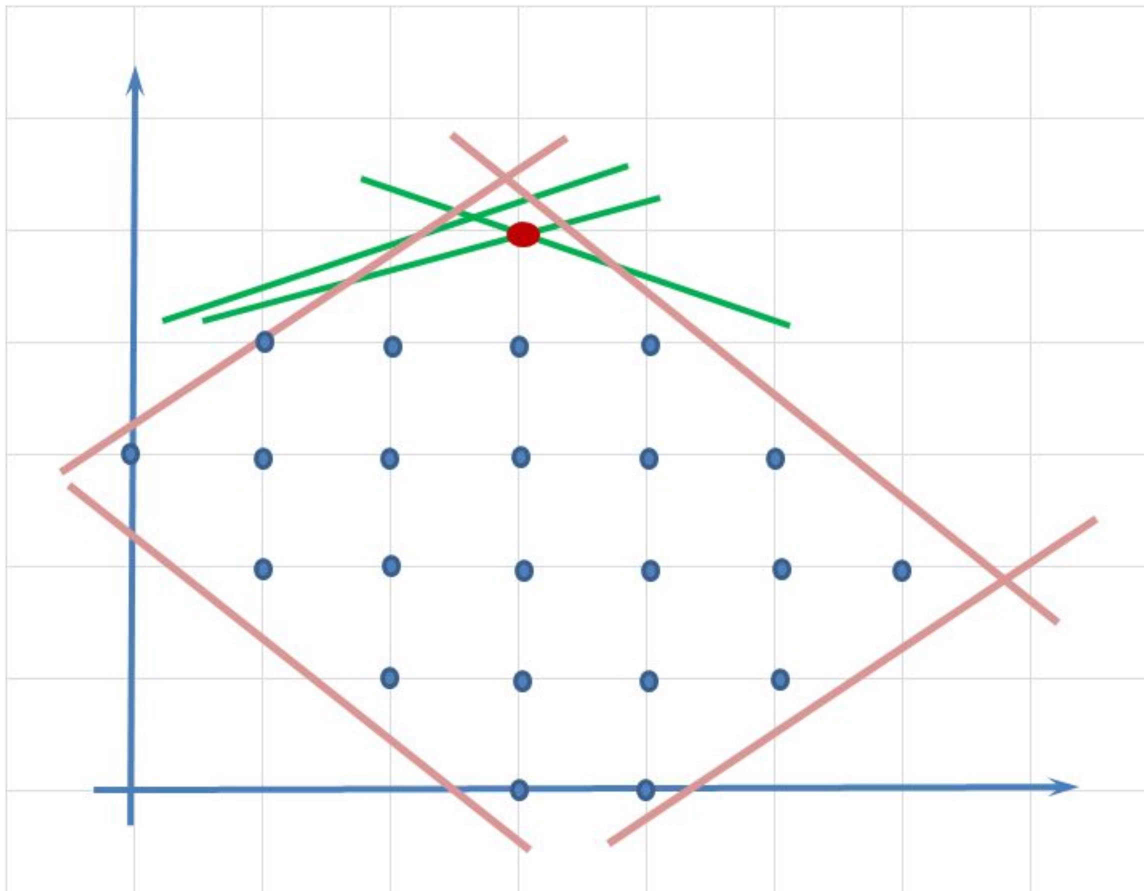


Графічна ілюстрація процесу розв’язанням



Обчислювальний процес припиняється, як тільки буде досягнуто будь-який цілочисловий розв’язок

Графічна ілюстрація процесу розв'язання



Оптимум ЗЦЛП знайдено.

Існуючі методи відсікань

- Метод відсікань для розв’язання **повністю** цілочислових задач
- Метод відсікань для розв’язання **частково** цілочислових задач

Будемо розглядати перший з методів

ЗЦЛП

- У повністю цілочислових задач цілими є **всі** змінні (**основні x_j , залишкові s_i, надлишкові S_i** змінні).

- Для досягнення цього перед приведенням задачі до канонічної формі треба перетворити систему обмежень таким чином, щоб усі коефіцієнти a_{ij}, та b_i були цілими.

ЗЦЛП

Приклад

$$5x_1 + 3x_2 \quad \leq 15.5$$
$$x_1, x_2 \in Z^+$$

$$50x_1 + 30x_2 \quad \leq 155$$
$$x_1, x_2 \in Z^+$$

Канонічна форма

$$5x_1 + 3x_2 + s \quad = 15.5$$
$$x_1, x_2 \in Z^+$$
$s \geq 0$, *НЕ ціла*

$$50x_1 + 30x_2 + s \; = 155$$
$$x_1, x_2 \in Z^+$$
$s \geq 0$, *ЦІЛА*

$$50x_1 + 30x_2 + s \; = 155$$
$$x_1, x_2, s \; \in Z^+$$

Початковий крок

Спочатку розв’язуємо послаблену задачу.
Якщо її розв’язок цілочисловий, то він же є і розв’язком ЗЦЛП
Інакше – реалізуємо ідею відсікання.

Для реалізації ідеї відсікань необхідно визначитись з:

1) знаходження універсального правила формування додаткових обмежень;

2) доведення скінченності відповідного процесу відсікання;

3) боротьба з надмірним «розростанням» задачі при додаванні додаткових обмежень.

Виведення рівняння-відсікання

Як побудувати додаткове лінійне обмеження, якому задовольняє кожний розв’язок, допустимий за умовами (2) - (4)?

$$\min(\max) z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}; \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}; \qquad (3)$$

$$x_j \ \text{ціла}, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (4)$$

Стартовою точкою є оптимальна симплекс-таблиця послабленої задачі.

Наприклад:

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	Решение
z	0	0	$\frac{7}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{13}{4}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{2}$
x_2	0	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$

Виведення рівняння-відсікання

(7) $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i$$

i-й рядок оптимальної симплекс-таблиці ПосЗ

$$\sum_{j=1}^{n} [\alpha_{ij}] x_j \leq \beta_i$$

Символом [α] позначатимемо ***цілу частину*** дійсного числа α: найбільше ціле, менше або рівне за α, тобто [α] ≤ α.

$$\sum_{j=1}^{n} [\alpha_{ij}] x_j \leq [\beta_i]$$

(8) $$\sum_{j=1}^{n} [\alpha_{ij}] x_j + s = [\beta_i]$$

- рівняння в цілих частинах

$s \geq 0$, ціле

Дробовою частиною числа α називається величина f, що визначається рівністю [α] + f = α

(8)-(7): $$\sum_{j=1}^{n} (-f_j) x_j + s = -f$$

де $[\alpha_{ij}] + f_j = \alpha_{ij}, \quad [\beta_i] + f = \beta_i$

- рівняння в дробових частинах

Приклади знаходження цілих і дробових частин

$[\alpha] \leq \alpha$ $\qquad$ $[\alpha] + f = \alpha$

Число	Ціла частина	Дробова частина
1.2	1	0.2
-1.2	-2	0.8
0.5	0	0.5
-0.5	-1	0.5
	6	
	-7	

За визначенням дробова частина f завжди ≥ 0

Визначення

- Рівняння в дробових частинах називається **рівнянням відсікання (відсіканням Гоморі)**
- Рівняння (7), за яким побудували рівняння відсікання, називається **породжуючим рівнянням**
- Задача (1) - (3) + додаткове рівняння відсікання називається **розширеною**.

Схема алгоритму Гоморі

КРОК 1. Знайти оптимальний розв’язок послабленої задачі.

КРОК 2. ЯКЩО розв’язок поточної ЗЛП є цілочисловим, то припинити обчислення

ІНАКШЕ

{1.1 Обрати **дробову** базисну змінну x_k .

1.2 По рівнянню оптимальної симплекс-таблиці, яке відповідає змінній x_k :

$$x_k + \sum_{j \in I_N} \alpha_{ij} x_j = \beta_i$$

скласти рівняння відсікання

$$\sum_{j \in I_N} -f_{ij} x_j + s = -f_i$$

}

КРОК 2. Додати до поточної ЗЛП отримане рівняння відсікання, знайти за допомогою двоїстого симплекс-методу оптимальний розв’язок розширеної ЗЛП і повернутися до КРОКУ 2.

Формування рівняння-відсікання

[illegible]	x1	x2	x3	x4	Реш	
z	9/2	0	0	5/4	35/2	
x3	3/2	0	1	-5/4	3/2	
x2	3/2	1	0	1/4	7/2	Породжуюче рівняння (*)

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i$$

$$\frac{3}{2} x_1 + 1 x_2 + \frac{1}{4} x_4 = \frac{7}{2}$$

Формування рівняння-відсікання

БП	x1	x2	x3	x4	Реш	
z	9/2	0	0	5/4	35/2	
x3	3/2	0	1	-5/4	3/2	
x2	3/2	1	0	1/4	7/2	Породжуюче рівняння (*)

$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i$	$\frac{3}{2}x_1 + 1x_2 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{7}{2}$
$\sum_{j=1}^{n} [\alpha_{ij}] x_j \le \beta_i$	$\left[\frac{3}{2}\right]x_1 + [1]x_2 + \left[\frac{1}{4}\right]x_4 \le \frac{7}{2}$ $1x_1 + 1x_2 \le \frac{7}{2}$

Формування рівняння-відсікання

БП	x1	x2	x3	x4	Реш	
z	9/2	0	0	5/4	35/2	
x3	3/2	0	1	-5/4	3/2	
x2	3/2	1	0	1/4	7/2	Породжуюче рівняння (*)

$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j=\beta_i$	$\frac{3}{2}x_1+1x_2+\frac{1}{4}x_4=\frac{7}{2}$
$\sum_{j=1}^{n}[\alpha_{ij}]x_j\le\beta_i$	$\left[\frac{3}{2}\right]x_1+[1]x_2+\left[\frac{1}{4}\right]x_4\le\frac{7}{2}$ $1x_1+1x_2\le\frac{7}{2}$
$\sum_{j=1}^{n}[\alpha_{ij}]x_j\le[\beta_i]$	$1x_1+1x_2\le\left[\frac{7}{2}\right]$ $1x_1+1x_2\le 3$

Формування рівняння-відсікання

БП	x1	x2	x3	x4	Реш	
z	9/2	0	0	5/4	35/2	
x3	3/2	0	1	-5/4	3/2	
x2	3/2	1	0	1/4	7/2	Породжуюче рівняння (*)

$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i$	$\frac{3}{2}x_1 + 1x_2 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{7}{2}$
$\sum_{j=1}^{n} [\alpha_{ij}] x_j \le \beta_i$	$\left[\frac{3}{2}\right]x_1 + [1]x_2 + \left[\frac{1}{4}\right]x_4 \le \frac{7}{2}$ $1x_1 + 1x_2 \le \frac{7}{2}$
$\sum_{j=1}^{n} [\alpha_{ij}] x_j \le [\beta_i]$	$1x_1 + 1x_2 \le \left[\frac{7}{2}\right]$ $1x_1 + 1x_2 \le 3$
$\sum_{j=1}^{n} [\alpha_{ij}] x_j + s = [\beta_i]$	$1x_1 + 1x_2 + s = 3$ Рівняння в цілих частинах
$\sum_{j=1}^{n} (-f_j) x_j + s = -f$	$-\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_4 + s = -\frac{1}{2}$

Рівняння відсікання (саме його додаємо до оптимальної симплекс-таблиці Пос3)

Приклад 1

Оптимальна симплекс-таблиця ПосЗ

БП	x1	x2	x3	x4	Реш
z	9/2	0	0	5/4	35/2
x3	3/2	0	1	-5/4	3/2
x2	3/2	1	0	1/4	7/2

Рівняння відсікання, яке сформовано по рядку x_2 оптимальної симплекс-таблиці ПосЗ)

БП	X1	x2	x3	x4	s	Реш
z	9/2	0	0	5/4	0	35/2
x3	3/2	0	1	-5/4	0	3/2
x2	3/2	1	0	1/4	0	7/2
s	-1/2	0	0	-1/4	1	-1/2

Застосо-вуємо двоїстий СМ

Оптимальна симплекс-таблиця розширеної ЗЛП

БП	x1	x2	x3	x4	s	Реш
z	2	0	0	0	5	15
x3	1	0	1	0	-5	4
x2	4	1	0	0	1	3
x4	2	0	0	1	-4	2

Усі змінні цілі → розв'язок ЗЦЛП

Приклад 2

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max \qquad z = 3x_1 + x_2 + 0x_3 \to \max$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 6 \qquad 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0$$
$$x_1, x_2 \text{ цілі} \qquad x_1, x_2, x_3 \text{ цілі}$$

Оптимальна симплекс-таблиця ПоСЗ

БЗ	x1	x2	x3		Розв.
z	0	5/4	3/4		9/2
x1	1	3/4	1/4		3/2

Приклад 2

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max$$
$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \text{цілі}$$

БЗ	x1	x2	x3			Розв.
z	0	5/4	3/4			9/2
x1	1	3/4	1/4			3/2

$$\sum_{j \in I_N} -f_{ij} x_j + s = -f_i$$

Приклад 2

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max$$
$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \text{цілі}$$

БЗ	x1	x2	x3	s1		Розв.
z	0	5/4	3/4	0		9/2
x1	1	3/4	1/4	0		3/2
s1	0	-3/4	-1/4	1		-1/2

БЗ	x1	x2	x3	s1		Розв.
z	0	0	1/2	5/3		11/3
x1	1	0	0	1		1
x2	0	1	1/3	-4/3		2/3

$$\sum_{j \in I_N} -f_{ij} x_j + s = -f_i$$

Приклад 2

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max$$
$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \text{цілі}$$

БЗ	x1	x2	x3	s1		Розв.
z	0	5/4	3/4	0		9/2
x1	1	3/4	1/4	0		3/2
s1	0	-3/4	-1/4	1		-1/2

БЗ	x1	x2	x3	s1		Розв.
z	0	0	1/2	5/3		11/3
x1	1	0	0	1		1
x2	0	1	1/3	-4/3		2/3

Приклад 2

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max$$
$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \text{ цілі}$$

БЗ	x1	x2	x3	s1		Розв.
z	0	5/4	3/4	0		9/2
x1	1	3/4	1/4	0		3/2
s1	0	-3/4	-1/4	1		-1/2

БЗ	x1	x2	x3	s1		Розв.
z	0	0	1/2	5/3		11/3
x1	1	0	0	1		1
x2	0	1	1/3	-4/3		2/3

Приклад 2

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max$$
$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \text{цілі}$$

БЗ	x1	x2	x3	s1		Розв.
z	0	5/4	3/4	0		9/2
x1	1	3/4	1/4	0		3/2
s1	0	-3/4	-1/4	1		-1/2

БЗ	x1	x2	x3	s1		Розв.
z	0	0	1/2	5/3		11/3
x1	1	0	0	1		1
x2	0	1	1/3	-4/3		2/3

$$\sum_{j \in I_N} -f_{ij}\, x_j + s = -f_i$$

Приклад 2

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max$$
$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \text{цілі}$$

БЗ	x1	x2	x3	s1		Розв.
z	0	5/4	3/4	0		9/2
x1	1	3/4	1/4	0		3/2
s1	0	-3/4	-1/4	1		-1/2

БЗ	x1	x2	x3	s1	s2	Розв.
z	0	0	1/2	5/3	0	11/3
x1	1	0	0	1	0	1
x2	0	1	1/3	-4/3	0	2/3
s2	0	0	$\boxed{-1/3}$	-2/3	1	-2/3

Приклад 2

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max$$
$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \text{цілі}$$

БЗ	x1	x2	x3	s1		Розв.
z	0	5/4	9/4	0		9/2
x1	1	3/4	3/2	0		3/2
s1	0	-3/4	-1/2	1		-1/2

БЗ	x1	x2	x3	s1	s2	Розв.
z	0	0	1/2	5/3	0	11/3
x1	1	0	0	1	0	1
x2	0	1	1/3	-4/3	0	2/3
s2	0	0	-1/3	-2/3	1	-2/3

БЗ	x1	x2	x3	s1	s2	Розв.
z	0	0	0	1	1	3
x1	1	0	0	1	0	1
x2	0	1	0	-2	0	0
x3	0	0	1	2	-3	2

Усі змінні цілі → розв'язок ЗЦЛП

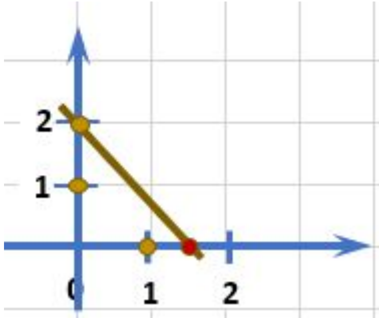
Графічна ілюстрація

- Приклад 2

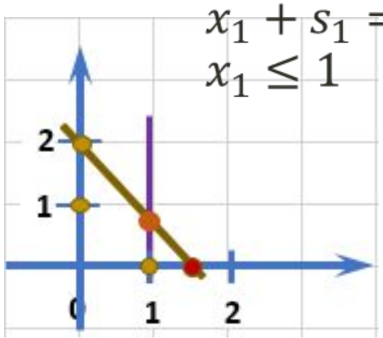
Приклад 2

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max$$
$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \text{ цілі}$$

БЗ	x1	x2	x3	s1		Розв.
z	0	5/4	9/4	0		9/2
x1	1	3/4	1/4	0		3/2
s1	0	-3/4	-1/4	1		-1/2



$$x_1 + s_1 = 1$$
$$x_1 \leq 1$$



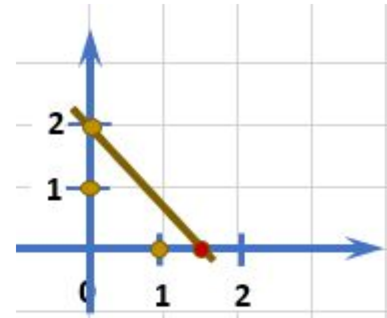
БЗ	x1	x2	x3	s1	s2	Розв.
z	0	0	1/2	5/3	0	11/3
x1	1	0	0	1	0	1
x2	0	1	1/3	-4/3	0	2/3
s2	0	0	-1/3	-2/3	1	-2/3

БЗ	x1	x2	x3	s1	s2	Розв.
z	0	0	0	1	1	3
x1	1	0	0	1	0	1
x2	0	1	0	-2	0	0
x3	0	0	1	2	-3	2

Приклад 2

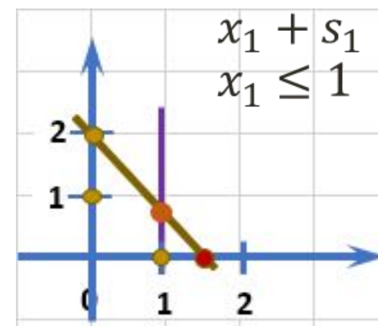
$$z = 3x_1 + x_2 \to \max$$
$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \text{цілі}$$

БЗ	x1	x2	x3	s1		Розв.
z	0	5/4	9/4	0		9/2
x1	1	3/4	1/4	0		3/2
s1	0	-3/4	-1/4	1		-1/2

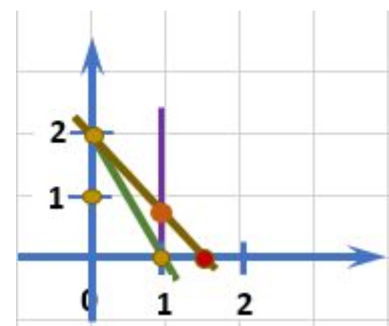


БЗ	x1	x2	x3	s1	s2	Розв.
z	0	0	1/2	5/3	0	11/3
x1	1	0	0	1	0	1
x2	0	1	1/3	-4/3	0	2/3
s2	0	0	-1/3	-2/3	1	-2/3

$$x_1 + s_1 = 1$$
$$x_1 \leq 1$$



БЗ	x1	x2	x3	s1	s2	Розв.
z	0	0	0	1	1	3
x1	1	0	0	1	0	1
x2	0	1	0	-2	0	0
x3	0	0	1	2	-3	2



$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

Приклади побудови рівнянь відсікань

БЗ	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	Розв.
z	0	0	0	25/16	0	5/16	4/16	9/16
x1	1	0	0	-2/16	0	3/16	1/16	3/16
x2	0	1	0	19/16	0	1	-1/16	4/16
x3	0	0	1	-19/16	0	1/16	-3/16	8/16
x5	0	0	0	1/16	1	1/16	3/16	26/16

$$\sum_{j\in I_N} -f_{ij}\, x_j + s = -f_i$$

Про розмір розширеної задачі

$$\min(\max) z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$x_j \ \text{ціле}, \quad j = \overline{1, n}.$$

ЗЛП

ЗЦЛП

Кількість базисних (ненульових) змінних ДОРІВНЮЄ m

Кожна точка в R^n (Z^n) має не більше n ненульових координат $\Rightarrow$ в симплекс-таблиці розширеної ЗЛП кількість рядків $\leq n$

Про розмір розширеної задачі (РЗ)

Для задання точки в нам не потрібно більше, ніж ненульових (базисних) змінних

Число обмежень РЗ не повинно перевищувати кількості змінних вихідної задачі в КФ

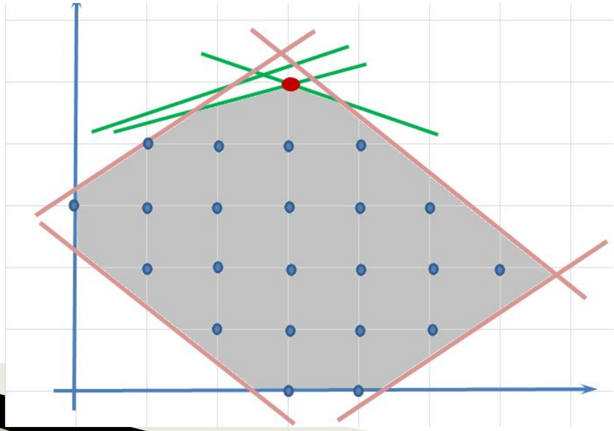
РЗ – розширена задача

Про розмір розширеної задачі

Якщо розширена ЗЛП містить більше, ніж обмежень

то одна або кілька залишкових змінних , асоційованих з відсіканнями Гоморі, є базисними,

значить відповідні обмеження стають надлишковими і можуть бути **виключені** з таблиці



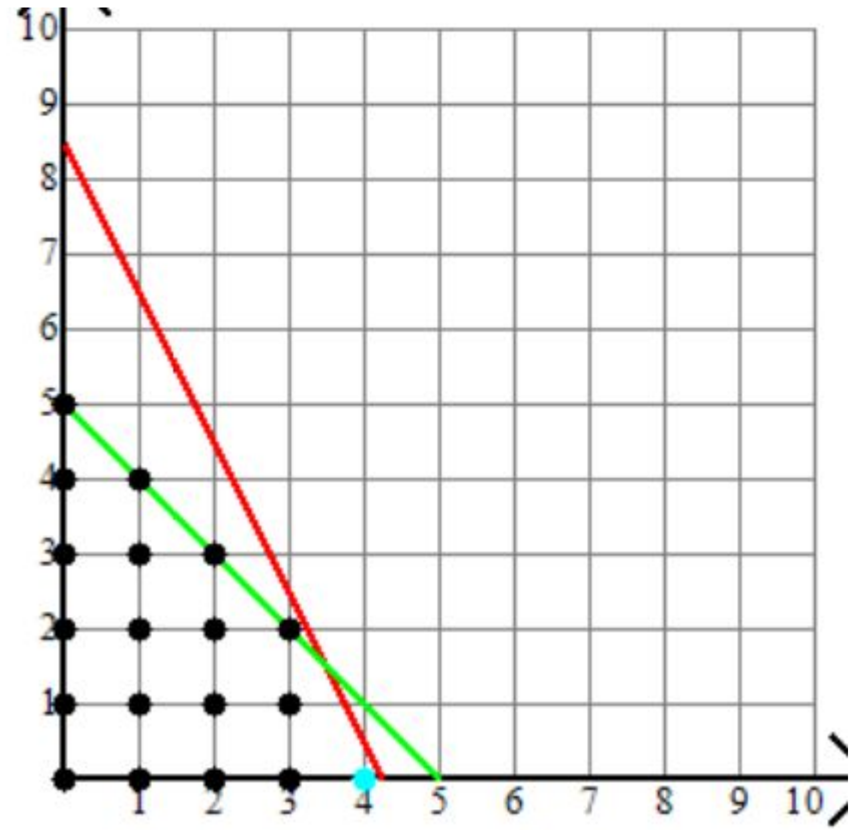
Ефективність відсікань

Приклад 3

$$z = 4x_1 + 1x_2$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 17$$
$$1x_1 + 1x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0, \text{цілі}$$

Оптимальна СТ послабленої задачі

	X1	X2	S1	S2	V
Z(max)	0	1	1	0	17
X1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{17}{4}$
S2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{4}$



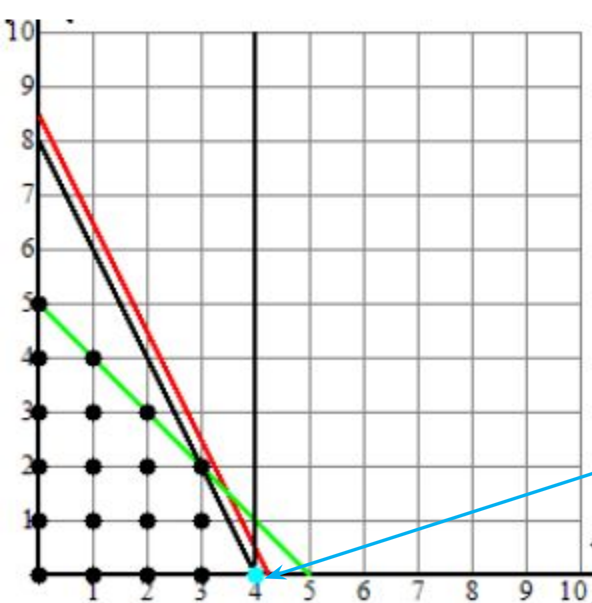
Приклад 3. Шлях розв’язання 1

В цьому прикладі змінні, пов’язані з обмеженнями відсіканнями, позначаються G_i

Рівняння відсікання, яке сформовано по рядку x_1 оптимальної симплекс-таблиці Пос3 $(1x_1 \leq 4)$

Рівняння відсікання, яке сформовано по рядку x_2 (або z або s_2) оптимальної симплекс-таблиці розширеної Пос3 $(2x_1 + 1x_2 \leq 8)$

	X1	X2	S1	S2	G1	G2	
Z(max)	0	1	1	0			17
X1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0			$\frac{17}{4}$
S2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1			$\frac{3}{4}$
Z(max)	0	1	1	0	0		17
X1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0		$\frac{17}{4}$
S2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	0		$\frac{3}{4}$
G1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	1		$-\frac{1}{4}$
Z(max)	0	0	$\frac{1}{2}$	0	2		$\frac{33}{2}$
X1	1	0	0	0	1		4
S2	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	1		$\frac{1}{2}$
X2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	-2		$\frac{1}{2}$
Z(max)	0	0	$\frac{1}{2}$	0	2	0	$\frac{33}{2}$
X1	1	0	0	0	1	0	4
S2	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{2}$
X2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	-2	0	$\frac{1}{2}$
G2	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$
Z(max)	0	0	0	0	2	1	16
X1	1	0	0	0	1	0	4
S2	0	0	0	1	1	-1	1
X2	0	1	0	0	-2	1	0
S1	0	0	1	0	0	-2	1



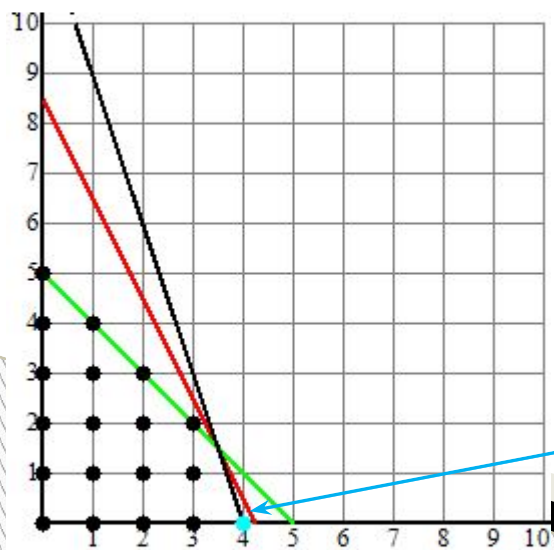
Оптимум досягнуто за дві ітерації

Приклад 3. Шлях розв’язання 2

В цьому прикладі залишкова змінна, пов’язана з обмеженням відсіканням, позначена G_1

Рівняння відсікання, яке сформовано по рядку s_2 оптимальної симплекс-таблиці Пос3 $(3x_1 + 1x_2 \leq 12)$

	X1	X2	S1	S2	G1	
Z(max)	0	1	1	0		17
X1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0		$\frac{17}{4}$
S2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1		$\frac{3}{4}$
Z(max)	0	1	1	0	0	17
X1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{17}{4}$
S2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$
G1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$
Z(max)	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$	16
X1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	4
S2	0	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	1
S1	0	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{4}{3}$	1



Оптимум досягнуто за одну ітерацію

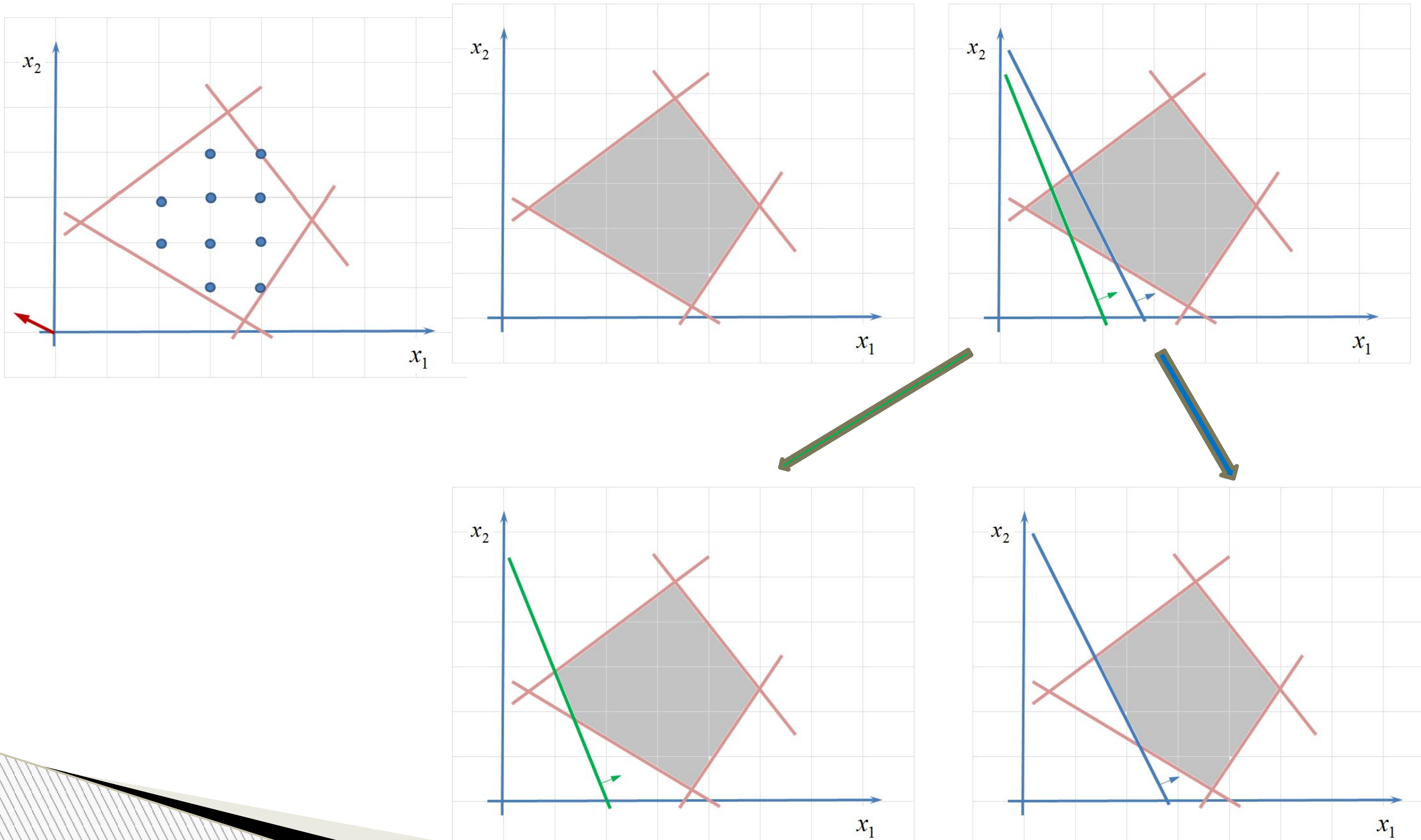
Ефективність відсікань Гоморі

Одна і та ж оптимальна симплекс-таблиця розширеної ЗЛП породжує різні відсікання.

???? Яке з них є найбільш ефективним?

Ефективність відсікання характеризується розмірами області, що відсікається від багатогранника допустимих розв'язків

Ефективність відсікань Гоморі



Це відсікання
ефективніше!

Нехай по рядку i побудовано таке обмеження-відсікання

$$\sum_{j \in I_N} -f_{ij} x_j + s_i = -f_i$$

$$\sum_{j \in I_N} f_{ij} x_j - s_i = f_i$$

$$\sum_{j \in I_N} f_{ij} x_j \geq f_i \qquad (*)$$

Нехай по рядку k побудовано таке обмеження-відсікання

$$\sum_{j \in I_N} -f_{kj} x_j + s_k = -f_k$$

$$\sum_{j \in I_N} f_{kj} x_j - s_k = f_k$$

$$\sum_{j \in I_N} f_{kj} x_j \geq f_k \qquad (**)$$

***Правило* 1.**

Відсікання (*) ефективніше відсікання (**), якщо

$$f_i \geq f_k,$$

$$f_{ij} \leq f_{kj}, \quad \forall j,$$

причому, принаймні, в одному випадку виконується строга нерівність (> або <).

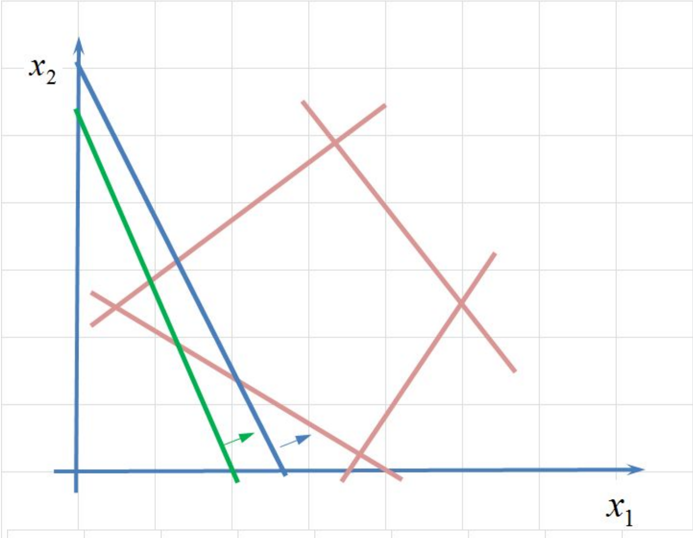
Правило 1

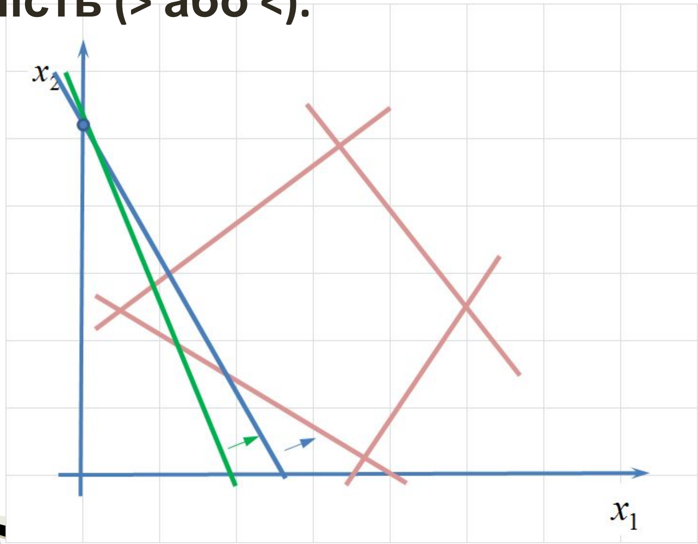
Відсікання (*) ефективніше відсікання (**), якщо

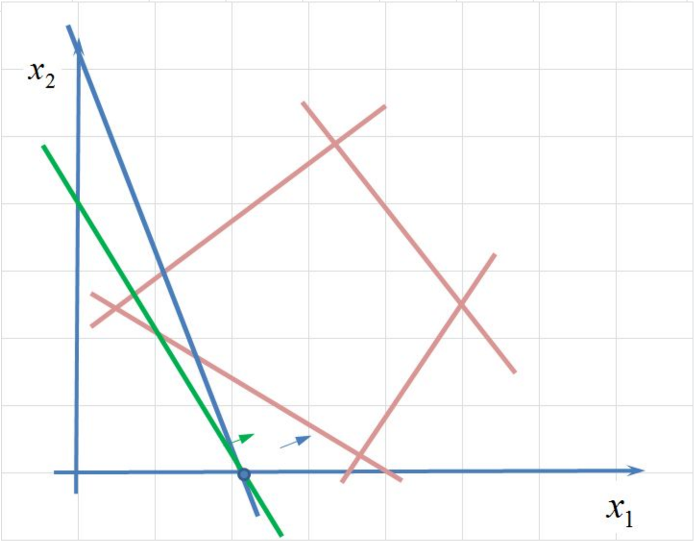
$$f_i \geq f_k,$$

$$f_{ij} \leq f_{kj}, \quad \forall j,$$

причому, принаймні, в одному випадку виконується строга нерівність (> або <).







Сині відсікання ефективніші за зелені

Правило 1

Відсікання $\qquad \frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_5 \geq \frac{2}{4}$

ефективніше відсікання $\qquad \frac{2}{3}x_1 + \frac{3}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_5 \geq \frac{1}{4}.$

$$\underbrace{\frac{1}{4} < \frac{2}{3}; \quad \frac{3}{4} = \frac{3}{4}; \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{4};}_{f_{ij} \leq f_{kj}, \quad \forall j,} \qquad \underbrace{\frac{2}{4} > \frac{1}{4}}_{f_i \geq f_k,}$$

причому, принаймні, в одному випадку виконується строга нерівність

Задача про фарби

$Z = 3*x1 + 2*x2$

$x1 + 2*x2 <= 6$
$2*x1 + x2 <= 8$
$-x1 + x2 <= 1$
$x2 <= 2$

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	P
Z	0	0	1/3	4/3	0	0	38/3
x2	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3
x1	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3
x5	0	0	-1	1	1	0	3
x6	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3

$2*x1 + 2*x2 <= 9$

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	s1	P
Z	0	0	0	1	0	0	1/2	25/2
x3	0	0	1	1	0	0	-3/2	1/2
x1	1	0	0	1	0	0	-1/2	7/2
x5	0	0	0	2	1	0	-3/2	7/2
x6	0	0	0	1	0	1	-1	1
x2	0	1	0	-1	0	0	1	1

Не оптимум((

$x1 + x2 <= 4$

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	s1	P
Z	0	0	0	1	0	0	1	12
x3	0	0	1	1	0	0	-3	2
x1	1	0	0	1	0	0	-1	4
x5	0	0	0	2	1	0	-3	5
x6	0	0	0	1	0	1	-2	2
x2	0	1	0	-1	0	0	2	0

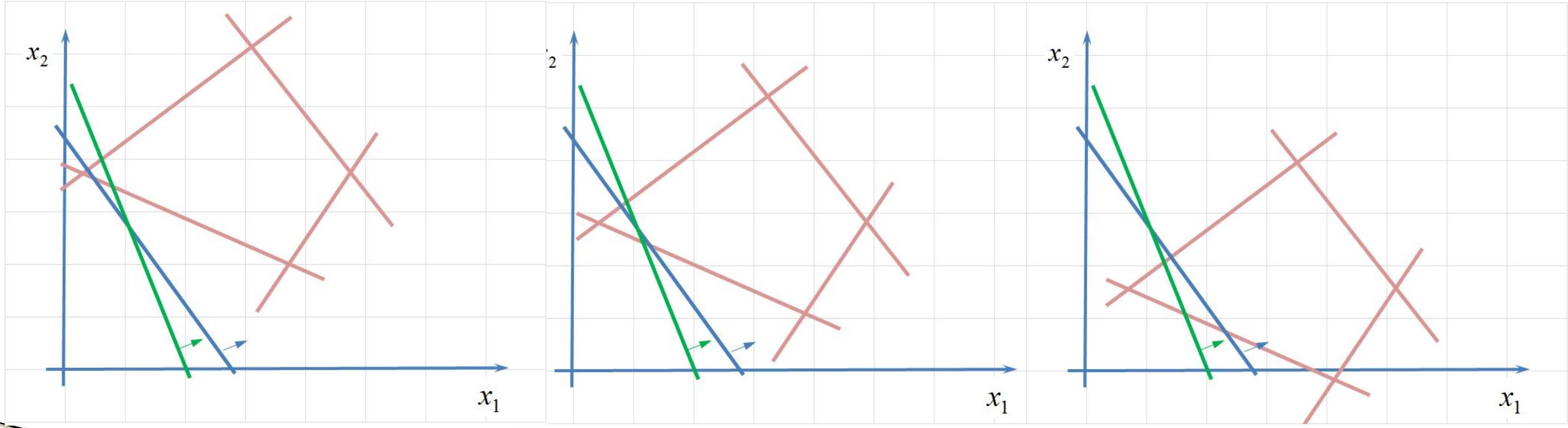
Оптимум))

Правило 1

Серед відсіканнь $$\frac{1}{12}x_3 + \frac{5}{12}x_4 \geq \frac{1}{12}$$

та $$\frac{3}{12}x_3 + \frac{2}{12}x_4 \geq \frac{2}{12}$$

не можна однозначно вибрати більш ефективне.



Правила 2 та 3

Використання Правила 1 пов'язано з істотними труднощами обчислювального характеру

Правило 2. У якості породжуючого обирається той рядок, якому відповідає

$$\max_i \frac{f_i}{\sum_{j=1}^{n} f_{ij}};$$

Правило 3. У якості породжуючого обирається той рядок, якому відповідає

$$\max_i f_i .$$

Використання цих двох правил не завжди забезпечує введення найбільш ефективного відсікання

Порівняння ефективності рівнянь-відсікань

БЗ	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	Розв.
z	0	0	0	25/16	0	5/16	4/16	9/16
x1	1	0	0	-2/16	0	3/16	1/16	3/16
x2	0	1	0	19/16	0	1	-1/16	4/16
x3	0	0	1	-19/16	0	1/16	-3/16	8/16
x5	0	0	0	1/16	1	1/16	3/16	26/16

-9/16x4 -5/16x6 -4/16x7 +s1 =- 9/16

-14/16x4 -3/16x6 -1/16x7 +s2 =- 3/16

…

-1/16x4 -1/16x6 -3/16x7 +s5 =- 10/16

9/16x4 +5/16x6 +4/16x7 >= 9/16

14/16x4 +3/16x6 +1/16x7 >= 3/16

1/16x4 +1/16x6 +3/16x7 >= 10/16

Порівняння ефективності рівнянь-відсікань за правилом 1

БЗ	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	Розв.
z	0	0	0	25/16	0	5/16	4/16	9/16
x1	1	0	0	-2/16	0	3/16	1/16	3/16
x2	0	1	0	19/16	0	1	-1/16	4/16
x3	0	0	1	-19/16	0	1/16	-3/16	8/16
x5	0	0	0	1/16	1	1/16	3/16	26/16

9/16x4 +5/16x6 +4/16x7 >= 9/16

14/16x4 +3/16x6 +1/16x7 >= 3/16

1/16x4 +1/16x6 +3/16x7 >= 10/16

Порівняння ефективності рівнянь-відсікань за правилом 2

БЗ	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	Розв.
z	0	0	0	25/16	0	5/16	4/16	9/16
x1	1	0	0	-2/16	0	3/16	1/16	3/16
x2	0	1	0	19/16	0	1	-1/16	4/16
x3	0	0	1	-19/16	0	1/16	-3/16	8/16
x5	0	0	0	1/16	1	1/16	3/16	26/16

9/16x4 +5/16x6 +4/16x7 >= 9/16

$$\frac{\frac{9}{16}}{\frac{9}{16}+\frac{5}{16}+\frac{4}{16}}$$

14/16x4 +3/16x6 +1/16x7 >= 3/16

$$\frac{\frac{3}{16}}{\frac{14}{16}+\frac{3}{16}+\frac{1}{16}}$$

1/16x4 +1/16x6 +3/16x7 >= 10/16

$$\frac{\frac{10}{16}}{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{3}{16}}$$

Порівняння ефективності рівнянь-відсікань за правилом 3

БЗ	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	Розв.
z	0	0	0	25/16	0	5/16	4/16	9/16
x1	1	0	0	-2/16	0	3/16	1/16	3/16
x2	0	1	0	19/16	0	1	-1/16	4/16
x3	0	0	1	-19/16	0	1/16	-3/16	8/16
x5	0	0	0	1/16	1	1/16	3/16	26/16

$9/16x_4 \quad +5/16x_6 +4/16x_7 >= 9/16$

$14/16x_4 \quad +3/16x_6 +1/16x_7 >= 3/16$

$1/16x_4 \quad +1/16x_6 +3/16x_7 >= 10/16$

АГ знаходить розв'язок за скінчену кількість ітерацій

- В ході виконання ітерацій знаменники дробів рівняннях відсікань зменшуються. Це є однією з характеристик методу Гоморі і забезпечує збіжність алгоритму.

В рівняннях $\sum_{j\in I_N} -f_{ij}\, x_j + s = -f_i$ є правильними дробами - чисельник менший за знаменник

БЗ	…		x_p			Розв.
s	…	$-\frac{13}{17}$	$-\frac{12}{17}$	$-\frac{15}{17}$	1	$-\frac{12}{17}$

БЗ	…					Розв.
x_p	…	$\frac{13}{12}$	1	$\frac{15}{12}$	$-\frac{17}{12}$	1

Недоліки АГ

- Помилки округлення, що виникають в процесі обчислень можуть привести до отримання невірного (не оптимального) цілочислового розв’язку (вихід - зберігати окремо чисельники і знаменники).
- Розв’язки, одержувані послідовно в процесі реалізації алгоритму, *не є допустимими* (в процесі розв’язання усі проміжні розв’язки або нецілочислові або мають від’ємні компоненти). Тобто алгоритм не дозволяє отримати будь-який цілочисловий розв’язок, відмінний від оптимального (у разі вимушеної зупинки через відсутність достатнього часу).

Приклад 3

$$\max z = x_2 \ , \qquad (2.13)$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 6 \ , \qquad (2.14)$$

$$-3x_1 + 2x_2 \le 0 \ , \qquad (2.15)$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \ . \qquad (2.16)$$

$$x_1, x_2 \text{-целые} \ . \qquad (2.17)$$

Приведем задачу к канонической форме:

$$\max z = x_2 \ , \qquad (2.13')$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \ , \qquad (2.14')$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \ , \qquad (2.15')$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \ , \qquad (2.16')$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \text{-целые} \ . \qquad (2.17')$$

Приклад 3

Начальная симплекс-таблица ослабленной задачи (2.13)’-(2.16)’:

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	Решение
z	0	-1	0	0	0
x_3	3	2	1	0	6
x_4	-3	2	0	1	0

Ооптимальная симплекс-таблица ослабленной задачи:

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	Решение
z	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_1	1	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	1
x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$

Приклад 3 (ітерація 1)

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	Решение
z	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_1	1	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	1
x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Решение
Z	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}$
x_1	1	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	1
x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}$
s_1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$

Приклад 3 (ітерація 1)

Базисные переменные	x_1	x_2	$x_3 \downarrow$	x_4	s_1	Решение
Z	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}$
x_1	1	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	1
x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}$
$s_1 \leftarrow$	0	0	$\boxed{-\frac{1}{4}}$	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Решение
Z	0	0	0	0	1	1
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_2	0	1	0	0	1	1
x_3	0	0	1	1	-4	2

Приклад 3 (ітерація 2)

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Решение
Z	0	0	0	0	1	1
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_2	0	1	0	0	1	1
x_3	0	0	1	1	-4	2

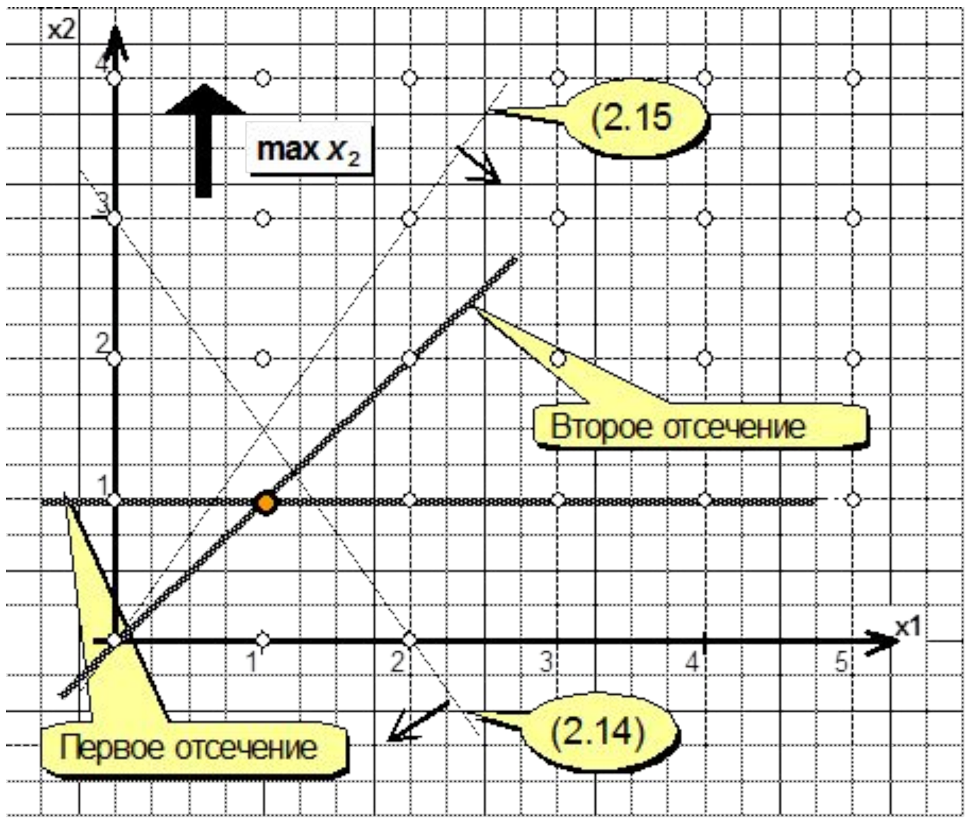
Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Решение
Z	0	0	0	0	1	0	1
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
x_2	0	1	0	0	1	0	1
x_3	0	0	1	1	-4	0	2
s_2	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$

Приклад 3 (ітерація 2)

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	$x_4 \downarrow$	s_1	s_2	Решение
Z	0	0	0	0	1	0	1
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
x_2	0	1	0	0	1	0	1
x_3	0	0	1	1	-4	0	2
$\leftarrow s_2$	0	0	0	$\left\|-\frac{2}{3}\right\|$	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Решение
Z	0	0	0	0	1	0	1
x_1	1	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	1
x_2	0	1	0	0	1	0	1
x_3	0	0	1	0	-5	$\frac{3}{2}$	1
x_4	0	0	0	1	1	$-\frac{3}{2}$	1

Приклад 3 (графічна ілюстрація)



Яка верхня границя кількості ітерацій АГ?

Начальная матрица:

	x1	x2	x3	x4	Реш.
z	0	0	-4/5	-1/3	120
x2	0	1	-3/35	-1/21	60/7
x1	1	0	1/35	1/14	120/7

Сработал второй критерий эффективности отсечения
Строим отсечение по 3 строке:

	x1	x2	x3	x4	Реш.	s1
z	0	0	-4/5	-1/3	120	0
x2	0	1	-3/35	-1/21	60/7	0
x1	1	0	1/35	1/14	120/7	0
s1	0	0	-1/35	-1/14	-1/7	1

Решение двойственным симплекс-методом.
Ведущий элемент в столбце 4 и строке 4.

	x1	x2	x3	x4	Реш.	s1
z	0	0	-2/3	0	362/3	-14/3
x2	0	1	-1/15	0	26/3	-2/3
x1	1	0	0	0	17	1
x4	0	0	2/5	1	2	-14

Сработал второй критерий эффективности отсечения
Строим отсечение по 1 строке:

	x1	x2	x3	x4	Реш.	s1	s2
z	0	0	-2/3	0	362/3	-14/3	0
x2	0	1	-1/15	0	26/3	-2/3	0
x1	1	0	0	0	17	1	0
x4	0	0	2/5	1	2	-14	0
s2	0	0	-1/3	0	-2/3	-1/3	1

Решение двойственным симплекс-методом.
Ведущий элемент в столбце 3 и строке 5.

---

	x1	x2	x3	x4	Реш.	s1	s2
z	0	0	0	0	122	-4	-2
x2	0	1	0	0	44/5	-3/5	-1/5
x1	1	0	0	0	17	1	0
x4	0	0	0	1	6/5	-72/5	6/5
x3	0	0	1	0	2	1	-3

Сработал второй критерий эффективности отсечения
Строим отсечение по 2 строке:

---

	x1	x2	x3	x4	Реш.	s1	s2	s3
z	0	0	0	0	122	-4	-2	0
x2	0	1	0	0	44/5	-3/5	-1/5	0
x1	1	0	0	0	17	1	0	0
x4	0	0	0	1	6/5	-72/5	6/5	0
x3	0	0	1	0	2	1	-3	0
s3	0	0	0	0	-4/5	-2/5	-4/5	1

Решение двойственным симплекс-методом.
Ведущий элемент в столбце 7 и строке 6.

---

	x1	x2	x3	x4	Реш.	s1	s2	s3
z	0	0	0	0	124	-3	0	-5/2
x2	0	1	0	0	9	-1/2	0	-1/4
x4	1	0	0	0	17	1	0	0
x4	0	0	0	1	0	-15	0	3/2
x3	0	0	1	0	5	5/2	0	-15/4
s2	0	0	0	0	1	1/2	1	-5/4