ПРОСТЕЙШИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

3.1. Задача анализа линейной цепи при наличии источников гармонических токов и напряжений

Гармонической называется функция вида $a(t) = A_m \cos(\omega t + \psi)$. Максимальное значение гармонической функции A_m называется амплитудой. Аргумент тригонометрической функции $\varphi(t) = \omega t + \psi$ называется мгновенной фазой. Значение мгновенной фазы в начальный момент времени называется начальной фазой $\psi = \varphi(t_0)$, $t_0 = 0$. Скорость изменения фазы называется циклической или круговой частотой ω. Наименьший промежуток времени, через который значение функции повторяется, называется периодом: $a(t) = a(t + nT)$, n – целое число, T – период. Величина, обратная периоду, называется частотой: $f = T^{-1}$. Единицей измерения частоты является один Герц (1 Гц). При этом выполняется соотношение $\omega = 2\pi f$.

Средним значением периодической функции называется величина:

$$A_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a(t)dt. \qquad (1)$$

Если $a(t) = Am \cos(\omega t + \psi)$ - гармоническая функция времени, то $A_{\text{СР}} = 0$.

Средневыпрямленным значением периодической функции называется величина:

$$A_{\text{СР.В}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |a(t)|dt. \qquad (2)$$

Для гармонической функции $A_{\text{СР.В}} = \frac{2}{\pi} A_m \approx 0,637 A_m$.

Действующим значением называется среднеквадратическое значение функции за период:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a^2(t)dt}. \quad (3)$$

Для гармонической функции $A = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 A_m$.

$W(t) = \int_0^T Ri^2(t)dt$ – энергия, выделившаяся на активном сопротивлении.

$W(T) = RI^2T$, где I – действующее значение переменного тока. С другой стороны,

$W(T) = RJ^2T$, где J – постоянный ток. Отсюда вытекает закон Джоуля-Ленца. Закон гласит, что при протекании через сопротивление переменного тока на нем выделяется такое же количество тепла, как при протекании через это сопротивление постоянного тока, равного действующему значению переменного тока.

Линейные операции над гармоническими функциями:

- умножение на скаляр: $y(t) = \alpha x(t)$;
- дифференцирование: $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$;
- интегрирование: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$;
- сложение: $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

В результате линейных операций, выполняемых над совокупностью гармонических функций одной частоты, получается гармоническая функция той же частоты. Меняются лишь амплитуда и начальная фаза.

Дифференциальное уравнение цепи для гармонического воздействия имеет вид:

$$a_v \frac{d^v y}{dt^v} + a_{v-1} \frac{d^{v-1} y}{dt^{v-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x_m \cos(\omega t + \psi_x) \qquad (4)$$

С течением времени реакция цепи становится гармонической функцией времени той же частоты: $y(t) = y_m \cos(\omega t + \psi_y)$. Неизвестными величинами при расчете цепей являются амплитуда и начальная фаза отклика.

Установившимся называется режим, при котором токи и напряжения в цепи являются периодическими во времени или сохраняют постоянные значения.

3.2. Метод комплексных амплитуд

Метод комплексных амплитуд применим:

- если воздействие является гармонической функцией времени;
- электрическая цепь является линейной;
- режим является установившимся.

3.2.1. Понятие о символических методах

Будем решать задачу нахождения реакции цепи на внешнее воздействие: $y(t) = F(x(t))$ (цепь считается известной).

Правила символического метода.

- Исходной функции $x(t)$, называемой оригиналом, ставится в соответствие по некоторому правилу функция другой переменной, называемая изображением $X(p)$.
- Находится изображение отклика $Y(p) = F(X(p))$ по изображению воздействия и некоторым правилам.
- От изображения отклика по известным правилам переходят к оригиналу отклика $Y(p) \to y(t)$.

3.2.2. Комплексное изображение гармонических функций времени

Пусть $a(t) = A_m \cos(\omega t + \psi)$ – гармоническая функция. Поставим ей в соответствие мгновенный комплекс

$$\underline{a}(t) = A_m \cos(\omega t + \psi) + jA_m \sin(\omega t + \psi) = A_m e^{j(\omega t+\psi)}, a(t) = Re[\underline{a}(t)]. \quad (5)$$

Запишем мгновенный комплекс в виде

$$a(t) = A_m e^{j(\omega t+\psi)} = A_m e^{j\psi} e^{j\omega t} = \dot{A}_m e^{j\omega t}, \dot{A}_m = A_m e^{j\psi} \quad (6)$$

Комплексной амплитудой называется комплексное число, модуль которого равен амплитуде гармонического колебания, а аргумент – начальной фазе. Вводят в рассмотрение символический метод (метод комплексных амплитуд), где оригиналом является гармоническая функция $a(t)$, а его изображением – комплексная амплитуда $a(t) \to \dot{A}_m$.

Пусть $a(t) = \sqrt{2}A\cos(\omega t + \psi)$. $A = \frac{A_m}{\sqrt{2}}$ – действующее значение гармонической функции. Тогда комплексно действующее значение:

$$\dot{A} = Ae^{j\psi}, \dot{A} = \frac{\dot{A}_m}{\sqrt{2}}. \quad (7)$$

3.2.3. Операции над комплексными изображениями гармонических функций

Рассмотрим взаимосвязь комплексной амплитуды воздействия и отклика при этих операциях.

- Умножение на скаляр.

$$y(t) = \alpha x(t),\ x(t) = X_m \cos(\omega t + \psi_x),\ y(t) = \alpha X_m \cos(\omega t + \psi_x) = Y_m \cos(\omega t + \psi_y),$$

$$x(t) \to \dot{X}_m = X_m e^{j\psi}, y(t) \to \dot{Y}_m = Y_m e^{j\psi}, \dot{Y}_m = \alpha \dot{X}_m. \quad (8)$$

- Дифференцирование.

Покажем, что

$$\frac{d}{dt} a(t) \to j\omega \dot{A}_m. \quad (9)$$

$\frac{d}{dt} A_m \cos(\omega t + \psi_x) = -\omega A_m \sin(\omega t + \psi_x) = \omega A_m \cos\left(\omega t + \psi_x + \frac{\pi}{2}\right),$

$\dot{Y}_m = \omega A_m e^{j\left(\psi_x + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega A_m e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\psi_x} = j\omega \dot{A}_m.$

- Интегрирование:

$$\int a(\tau) d\tau \to \frac{\dot{A}_m}{j\omega}. \tag{10}$$

$\int A_m \cos(\omega\tau + \psi_x) d\tau = \frac{A_m}{\omega} \sin(\omega t + \psi_x) = -\frac{A_m}{\omega} \cos\left(\omega t + \psi_x + \frac{\pi}{2}\right),$

$\dot{Y}_m = -\frac{A_m}{\omega} e^{j\left(\psi_x + \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{A_m}{\omega} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\psi_x} = \frac{\dot{A}_m}{j\omega}.$

- Сложение:

$$a_1(t) + a_2(t) \to \dot{A}_{m1} + \dot{A}_{m2}. \tag{11}$$

Линейным операциям (умножение на скаляр, дифференцирование, интегрирование, суммирование) над оригиналами соответствуют операции суммирования и умножения на скаляр над их изображениями. Системе дифференциальных уравнений для оригиналов будет соответствовать система алгебраических уравнений для изображений. Таким образом, применение метода комплексных амплитуд позволяет вместо решения системы дифференциальных уравнений решать систему алгебраических уравнений, что значительно проще.

3.2.4. Комплексное сопротивление и проводимость участка цепи

Рассмотрим пассивный двухполюсник (см. рис. 1)

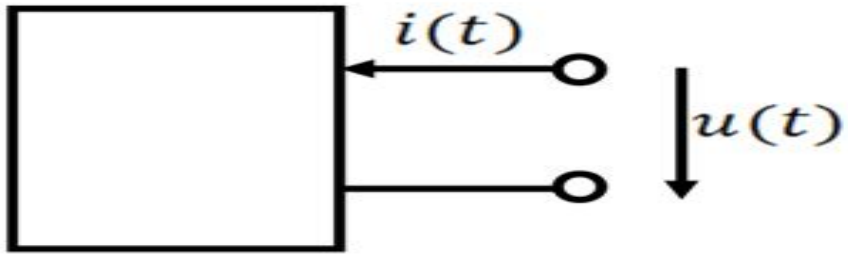


Рисунок 1. Пассивный двухполюсник

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i),\ i(t) \to \dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}. \quad (13)$$

Комплексным сопротивлением участка цепи называется отношение комплексной амплитуды напряжения к комплексной амплитуде тока.

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = |Z|e^{j\varphi},\ Z = r + jx,\ |Z| = \sqrt{r^2 + x^2}. \quad (14)$$

Действительная часть называется активным сопротивлением, мнимая – реактивным сопротивлением. Модуль комплексного сопротивления называется полным сопротивлением.

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{I_m e^{j\psi_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = |Z|e^{j\varphi}, !|Z| = \frac{U_m}{I_m}, !\varphi = \psi_u - \psi_i, !\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{r}\right). \quad (15)$$

Сдвиг фаз между напряжением и током определяется только параметрами нагрузки и не зависит от параметров тока и напряжения в цепи. Положительные значения φ соответствуют отставанию тока по фазе, а отрицательные – опережению.

Величина, обратная комплексному сопротивлению, называется комплексной проводимостью.

$Y = \frac{1}{Z} = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m}, Y = g + jb = |Y|e^{j\gamma}.$

Действительная часть называется активной проводимостью, а мнимая – реактивной проводимостью.

$g + jb = \frac{1}{r+jx} = \frac{r}{r^2+x^2} - j\frac{x}{r^2+x^2},$

$$g = \frac{r}{r^2 + x^2} = \frac{r}{Z^2},\ b = -\frac{x}{r^2 + x^2} = -\frac{x}{Z^2}, \quad (16)$$
$$r = \frac{g}{g^2 + b^2} = \frac{g}{Y^2},\ x = \frac{b}{g^2 + b^2} = \frac{b}{Y^2}.$$

Величина комплексного сопротивления участка цепи не зависит от амплитуды и начальной фазы воздействия и определяется только параметрами самой цепи.

3.2.5. Комплексная схема замещения цепи. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме.

Закон Ома в комплексной форме:

$$\dot{U}_m = Z\dot{I}_m,\ \dot{I}_m = Y\dot{U}_m. \tag{17}$$

Используя закон Ома в комплексной форме каждому участку цепи можно поставить в соответствие комплексную схему замещения. В этой схеме участок цепи представлен комплексным сопротивлением или проводимостью, а токи и напряжения на его зажимах – комплексными амплитудами.

Комплексная схема замещения может быть получена заменой всех идеализированных пассивных элементов их комплексными сопротивлениями и заменой всех токов и напряжений их комплексными амплитудами.

Первый закон Кирхгофа: сумма комплексных амплитуд токов всех ветвей, подключенных к каждому из узлов электрической цепи, равна нулю.

$$\sum_k \dot{I}_{m_k} = 0. \tag{18}$$

Второй закон Кирхгофа: сумма комплексных амплитуд напряжений на всех элементах любого контура равна сумме комплексных амплитуд ЭДС всех входящих в контур источников напряжения.

$$\sum_i \dot{U}_{m_i} = \sum_k \dot{E}_{m_k}. \tag{19}$$

3.2.6. Порядок анализа цепи методом комплексных амплитуд

1. Замена гармонических токов и напряжений всех ветвей их комплексными изображениями (комплексными амплитудами), а схемы замещения цепи для мгновенных значений – комплексной схемой замещения.
2. Составление уравнений электрического равновесия цепи для комплексных амплитуд токов и напряжений на основе законов Ома и Кирхгофа в комплексной форме.
3. Решение системы уравнений электрического равновесия относительно комплексных амплитуд интересующих токов и напряжений.
4. Переход от комплексных изображений интересующих токов и напряжений к их оригиналам (гармоническим функциям).

3.2.7. Активная, реактивная, полная и комплексная мощности

Активной мощностью называется средняя мощность за период:

$$P = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{T+t_0} p(\tau)d\tau, \tag{20}$$

$p(t) = u(t)i(t),\ u(t) = U_m\cos(\omega t + \psi_u),\ i(t) = I_m\cos(\omega t + \psi_i),$

$P = \frac{1}{T}\int\limits_0^T U_m I_m \cos(\omega\tau + \psi_u)\cos(\omega\tau + \psi_i)d\tau =$

$= \frac{U_m I_m}{2}\left(\int\limits_0^T \cos(\psi_u - \psi_i)d\tau + \int\limits_0^T \cos(2\omega\tau + \psi_u + \psi_i)d\tau\right) = \frac{U_m I_m}{2}\cos(\psi_u - \psi_i).$

$P = UI\cos\varphi,\ U = \frac{U_m}{\sqrt{2}},\ I = \frac{I_m}{\sqrt{2}},$

где $\cos\varphi$ – коэффициент мощности.

Активная мощность измеряется в Ваттах (1 Вт).

Активная мощность характеризует процесс потерь энергии в цепи, она связана только с наличием активных сопротивлений.

$\varphi = 0;\ \cos\varphi = 1$ – для сопротивления активная мощность максимальна.

$\varphi = \pi/2;\ \cos\varphi = 0;\ P = 0$ – для индуктивности и емкости.

Полной мощностью называется произведение действующих значений тока и напряжения

$$S = UI. \tag{21}$$

Полная мощность измеряется в вольт-амперах (1 ВА).

Реактивной мощностью называется произведение действующих значений тока и напряжения на синус угла сдвига фаз между ними.

$$Q = UI \sin \varphi. \tag{22}$$

Реактивная мощность измеряется в варах (1 ВАР – вольт-ампер реактивный). Она характеризует процессы обмена энергии в цепи. Если $Q > 0$, то энергия запасается в виде магнитного поля. Если $Q < 0$, то энергия запасается в виде электрического поля.

Комплексной мощностью называется комплексное число, действительная часть которого является активной, а мнимая – реактивной мощностью.

$$\dot{S} = P + jQ = UI(\cos \varphi + j \sin \varphi) = UIe^{j\varphi} = Se^{j\varphi}, \tag{23}$$

где $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$, а $\varphi = \psi_U - \psi_I$.

Можно получить, что $\dot{S} = \dot{U}I^*$, где $\dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}}$ и $I^* = \frac{I_m^*}{\sqrt{2}} I_m^* = I_m e^{-j\psi}$.

3.2.8. Условие передачи максимума активной мощности от источника в нагрузку

Рассмотрим комплексную схему замещения цепи, содержащей источник энергии с нагрузкой (см. рис. 2).

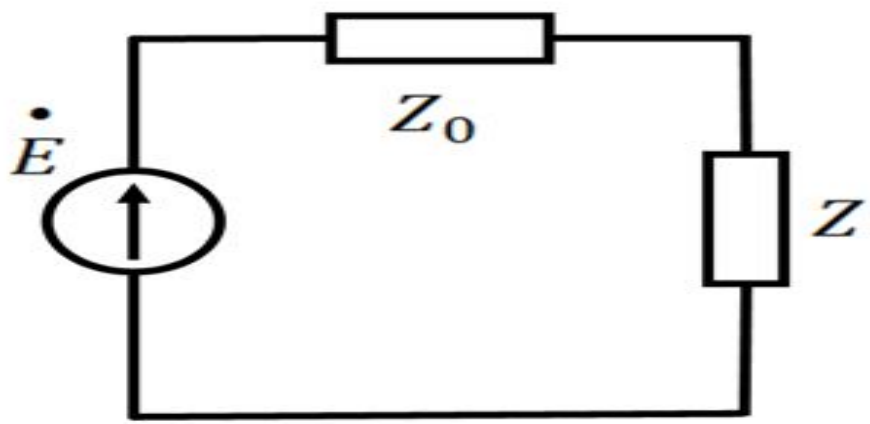


Рисунок 2. Источник энергии с подключенной нагрузкой Z

$\dot{E}$ – комплексное действующее значение ЭДС, Z_0 – комплексное внутреннее сопротивление источника, Z – комплексное сопротивление нагрузки.

Найдем Z, при котором активная мощность $P = P_{MAX}$.

Так как в общем случае $Z = R + jX,\ Z_0 = R_0 + jX_0$, то требуется найти R и X.

$P = I^2 R,\ \dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z_0+Z},\ I = \frac{E}{|Z_0+Z|}, P = \frac{RE^2}{|Z_0+Z|} = \frac{RE^2}{(R_0+R)^2+(X_0+X)^2}$.

$P = P_{max}$ при $X = -X_0$. Тогда $P_{max} = \frac{RE^2}{(R_0+R)^2}$.

Найдем значение R из условия $\frac{dP_{max}}{dR} = 0$.

$(R + R_0)^2 - 2R(R + R_0) = 0$ отсюда $R = R_0$.

Таким образом, условие передачи максимальной активной мощности:

$$Z = Z_0^*. \tag{24}$$

3.2.9. Баланс мощностей

Рассмотрим условие баланса мощности в цепях при гармоническом воздействии. В силу справедливости первого и второго законов Кирхгофа для комплексных действующих значений тока и напряжения в каждой из ветвей рассматриваемой цепи можно записать теорему Телледжена в комплексной форме (алгебраическая сумма произведений комплексных напряжений и токов ветвей электрической цепи, удовлетворяющей законам Кирхгофа, равна нулю):

$$\sum_{k=1}^{m} \dot{U}_k \dot{I}_k = 0, \tag{24}$$

где m – число ветвей цепи.

Однако поскольку первый закон Кирхгофа справедлив и по отношению к сопряженным токам то можно записать:

$$\sum_{k=1}^{m} \dot{U}_k \dot{I}_k^* = \sum_{k=1}^{m} \dot{S}_k = 0. \tag{26}$$

Это уравнение отражает баланс комплексной мощности, согласно которому сумма комплексных мощностей, потребляемых всеми ветвями цепи, равна нулю.

Поскольку $\dot{S} = P + jQ = 0$, то $\sum_i P_i = 0$ и $\sum_i Q_i = 0$.

Баланс комплексной мощности можно сформулировать и в другой форме: сумма комплексных мощностей, отдаваемых независимыми источниками, равна сумме комплексных мощностей, потребляемых остальными ветвями электрической цепи:

$$\sum_{k=1}^{m} \dot{S}_{k\text{и}} = \sum_{k=1}^{m} \dot{S}_{k\text{п}}. \qquad (27)$$

Из условия баланса комплексной мощности следуют условия баланса активных и реактивных мощностей:

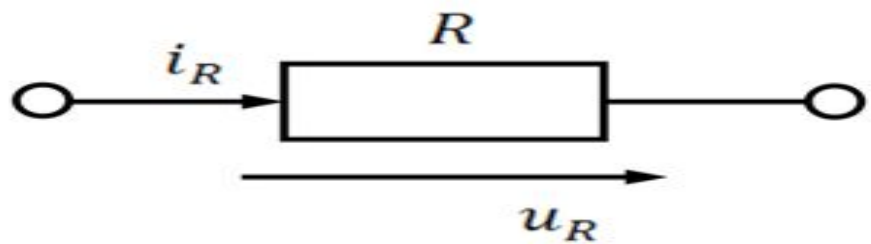
$$\sum_{k=1}^{m} P_{k\text{и}} = \sum_{k=1}^{m} P_{k\text{п}}, \quad \sum_{k=1}^{m} Q_{k\text{и}} = \sum_{k=1}^{m} Q_{k\text{п}}. \qquad (28)$$

Условие баланса активных мощностей непосредственно вытекает из закона сохранения энергии.

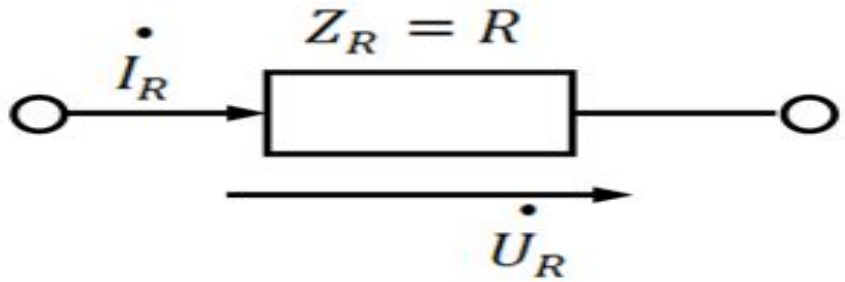
3.3. Гармонический ток в идеализированных пассивных элементах

3.3.1. Сопротивление

Рассмотрим изменение напряжения и тока на сопротивлении при гармоническом воздействии (рис. 3а).



а



б

Рисунок 3. Сопротивление при гармоническом воздействии.

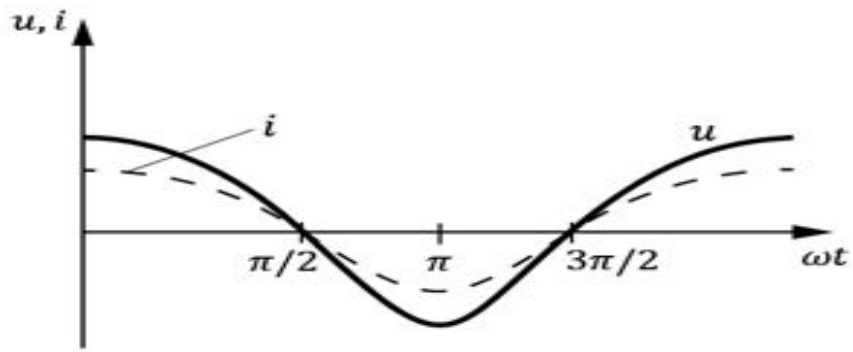
Пусть $i_R = I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \psi_i)$.

Тогда $u_R = R i_R = \sqrt{2} I R \cos(\omega t + \psi_i) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \psi_u)$, где $U = RI,\ \psi_i = \psi_u = \psi$.

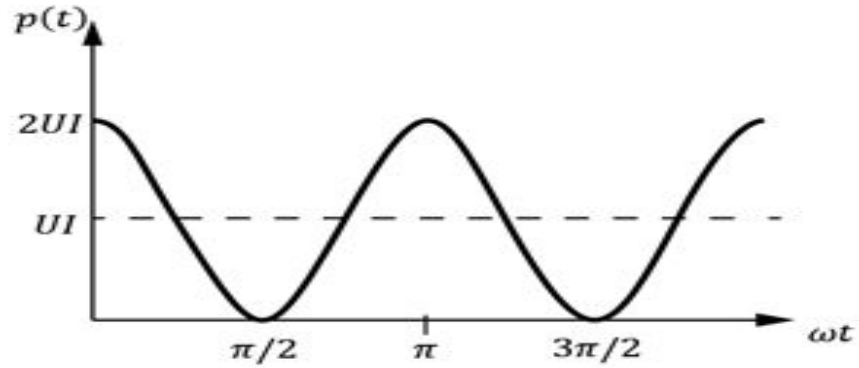
Найдем мгновенную мощность:

$$p(t) = u_R i_R = 2UI \cos^2(\omega t + \psi) = UI + UI \cos 2(\omega t + \psi). \qquad (29)$$

Зависимость напряжения, тока и мгновенной мощности на сопротивлении представлена на рис. 4.



а



б

Рисунок 4. Зависимость от времени напряжения и тока (а), мгновенной мощности (б) на сопротивлении.

Найдем активную мощность:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(\tau)d\tau = \frac{1}{T}\int_0^T Uid\tau + \frac{1}{T}\int_0^T UI\cos 2(\omega t + \psi)d\tau = UI. \qquad (30)$$

Перейдем к комплексному сопротивлению:

$\dot{I}_R = Ie^{j\psi_i} = Ie^{j\psi}$, $\dot{U}_R = Ue^{j\psi_u} = RIe^{j\psi}$,

комплексное сопротивление:

$$Z = \frac{\dot{U}_R}{\dot{I}_R} = \frac{RIe^{j\psi}}{Ie^{j\psi}} = R. \qquad (31)$$

Векторная диаграмма для тока, напряжения и сопротивления приведены на рис. 5, а схема замещения сопротивления для метода комплексных амплитуд – на рис. 3б.

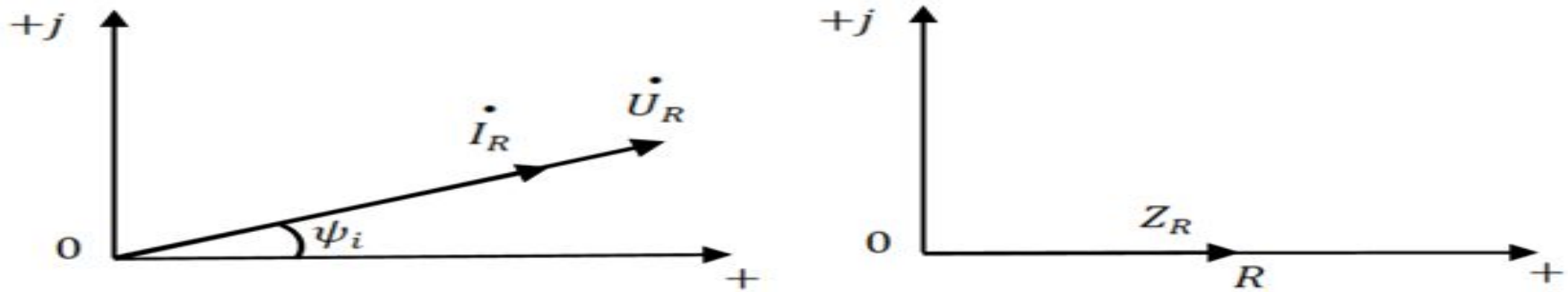


Рисунок 5. Векторная диаграмма для напряжения, тока и комплексного сопротивления.

3.3.2. Емкость

Рассмотрим изменение напряжения и тока на емкости при гармоническом воздействии (рис. 6).

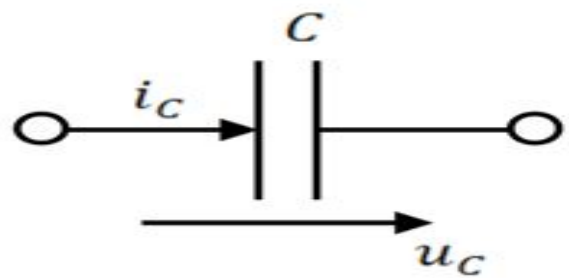


Рисунок 6. Емкость при гармоническом воздействии.

Пусть $u_C(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \psi_u)$.

Тогда $i_C(t) = C\frac{dU}{dt} = \sqrt{2}CU\omega(-\sin(\omega t + \psi_u)) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \psi)$, где $I = \omega CU,\ \psi_i = \psi_u + \frac{\pi}{2}$.

В емкости ток по фазе опережает напряжение на угол $\frac{\pi}{2}$.

Найдем мгновенную мощность:

$$p(t) = u_C i_C = -2UI\cos(\omega t + \psi_u)\sin(\omega t + \psi_u) = -UI\sin 2(\omega t + \psi_u). \qquad (32)$$

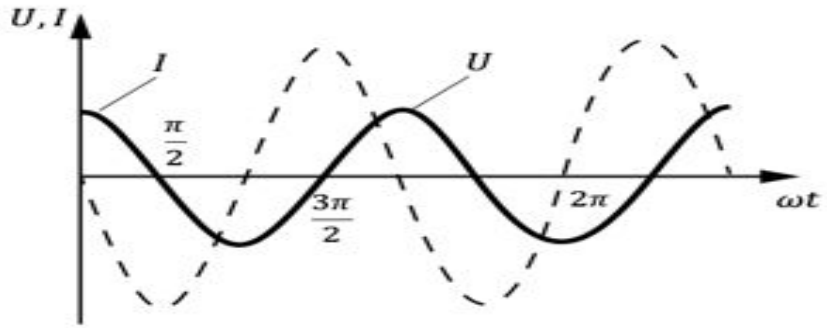
Найдем активную мощность:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(\tau)d\tau = 0. \qquad (36)$$

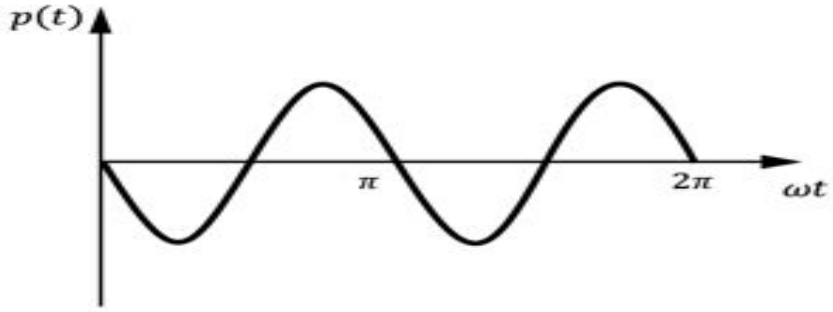
Найдем энергию:

$$W_L(t) = \frac{Li_L^2}{2} = \frac{2LI^2}{2}\cos(\omega t + \psi_i) = \frac{LI^2}{2}(1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)).$$

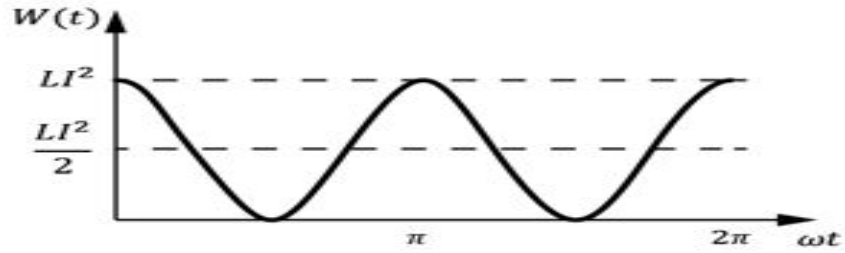
Зависимость напряжения, тока, мгновенной мощности и энергии на индуктивности приведена на рис. 10.



а



б



в

Рисунок 10. Зависимость от времени напряжения и тока (а), мгновенной мощности (б) и энергии (в) на емкости.

Перейдем к комплексному сопротивлению индуктивности:

$$\dot{I}_L = Ie^{j\psi_i},\ \dot{U}_L = Ue^{j\psi_U}, Z_L = \frac{\dot{U}_L}{\dot{I}_L} = \frac{\omega LIe^{j\left(\psi_i+\frac{\pi}{2}\right)}}{e^{j\psi_i}} = \omega Le^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega L,$$

Комплексное сопротивление индуктивности:

$$Z_L = j\omega L \tag{37}$$

Векторная диаграмма для тока, напряжения и сопротивления индуктивности приведены на рис. 11.

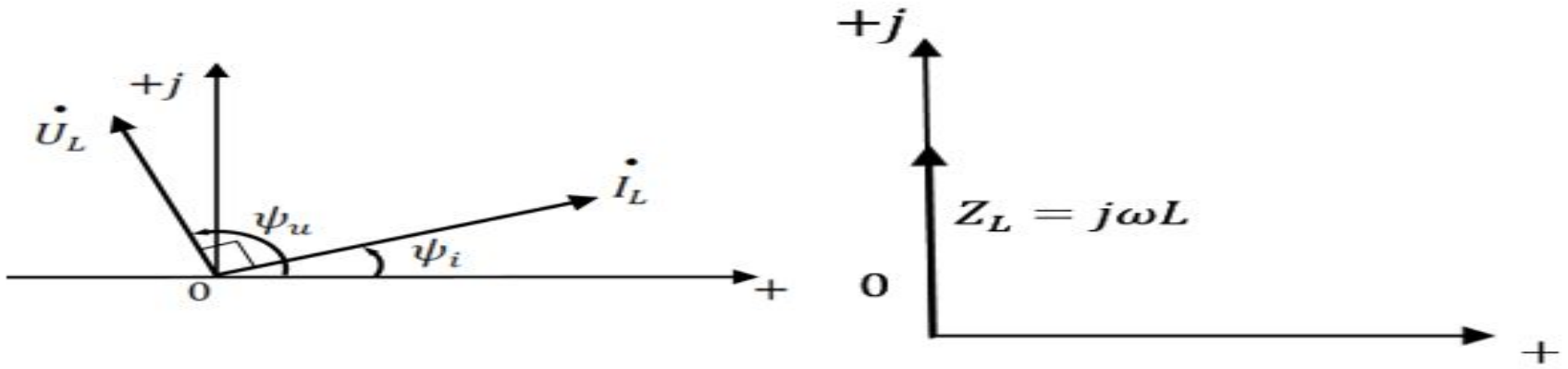
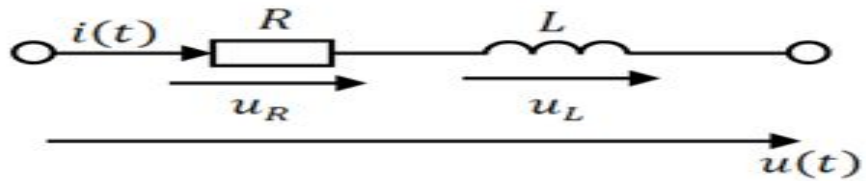


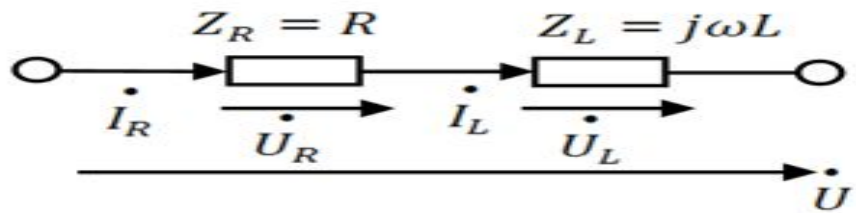
Рисунок 11. Векторная диаграмма для напряжения, тока и комплексного сопротивления индуктивности.

3.3.4. Последовательное соединение RLC-элементов

Рассмотрим последовательное соединение сопротивления, емкости и индуктивности (рис. 12а).



а



б

Рисунок 12. Схема последовательного соединения RLC-элементов (а) и ее комплексная схема замещения (б).

Рассчитаем общее напряжение и напряжение на элементах цепи при гармоническом воздействии $i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \psi_i)$ методом комплексных амплитуд. Перейдем к комплексной схеме замещения цепи (рис. 12б).

$Z_R = R,\ Z_L = j\omega L$ и $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$;

$\dot{I} = Ie^{j\psi_i},\ \dot{I}_R = \dot{I}_L = \dot{I}_C = \dot{I}$;

$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C,$

$\dot{U}_R = Z_R\dot{I}_R = R\dot{I} = RIe^{j\psi_i} = U_Re^{j\psi_{U_R}},$

$\dot{U}_L = Z_L\dot{I}_L = j\omega L\dot{I} = \omega LIe^{j\left(\psi_i+\frac{\pi}{2}\right)} = U_Le^{j\psi_{U_L}},$

$\dot{U}_C = Z_C\dot{I}_C = \frac{1}{j\omega C}Ie^{j\psi_i} = \frac{I}{\omega C}e^{j\left(\psi_i-\frac{\pi}{2}\right)} = U_Ce^{j\psi_{U_C}}.$

Тогда мгновенные значения напряжения на элементах цепи:

$$U_R(t) = \sqrt{2}RI\cos(\omega t + \psi_i),$$

$$U_L(t) = \sqrt{2}\omega LI\cos\left(\omega t + \psi_i + \tfrac{\pi}{2}\right),$$

$$U_C(t) = \sqrt{2}\tfrac{I}{\omega C}\cos\left(\omega t + \psi_i - \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Общее напряжение на элементах цепи:

$$\dot{U} = (Z_R + Z_L + Z_C)\dot{I} = \left(R + j\left(\omega L - \tfrac{1}{\omega C}\right)\right) Ie^{j\psi_i} =$$

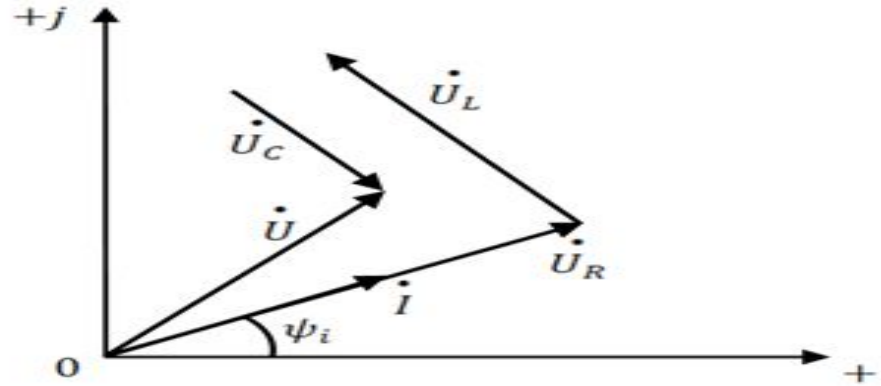
$$= I\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \tfrac{1}{\omega C}\right)^2}\, e^{j\left(\psi_i + \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)\right)} = Ue^{j\psi_U}.$$

$$U(t) = \sqrt{2}I\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\cos\left(\omega t + \psi_i + \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)\right). \qquad (38)$$

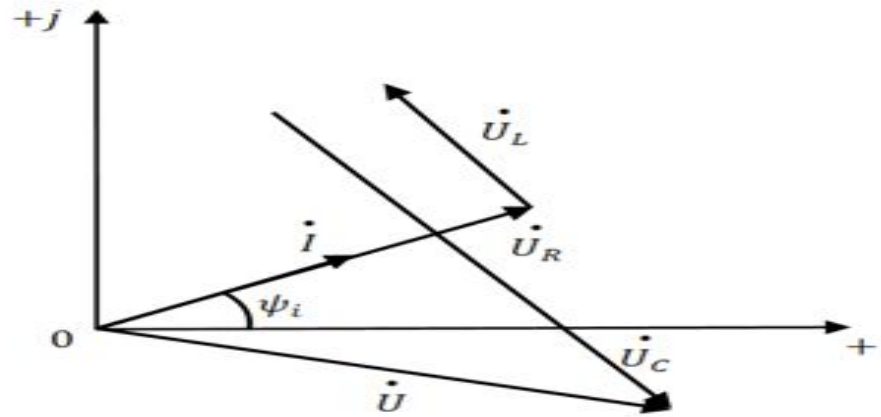
Рассмотрим векторную диаграмму токов и напряжений в цепи для двух случаев:

1. $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ или $\left|\dot{U}_L\right| > \left|\dot{U}_C\right|$;
2. $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ или $\left|\dot{U}_L\right| < \left|\dot{U}_C\right|$.

Диаграммы представлены на рис. 13. Видно, что в случае рис. 13а вектор напряжения по фазе опережает вектор тока, следовательно, цепь носит индуктивный характер. В случае рис. 13б вектор тока



а

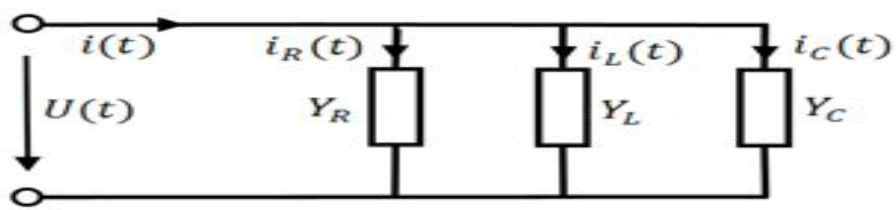


б

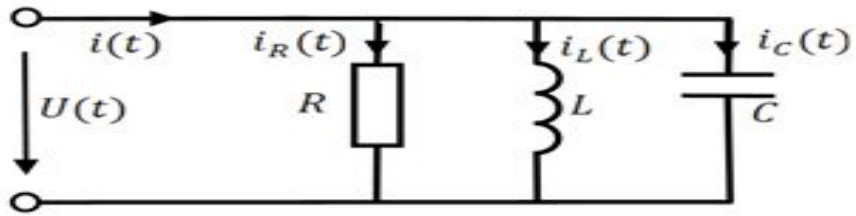
Рисунок 13. Векторная диаграмма токов и напряжений при $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ (а) и $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ (б).

3.3.5. Параллельное соединение RLC-элементов

Рассмотрим параллельное соединение сопротивления, емкости и индуктивности (рис. 14).



а



б

Рисунок 14. Схема параллельного соединения RLC-элементов (а) и ее комплексная схема замещения (б).

Рассчитаем токи во всех элементах и общий ток в цепи при гармоническом воздействии $u(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \psi_u)$ методом комплексных амплитуд. Перейдем к комплексной схеме замещения цепи (рис. 14б).

$$Y_R = \frac{1}{R},\ Y_L = \frac{1}{j\omega L} \text{ и } Y_C = j\omega C;$$

$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u},\ \dot{U} = \dot{U}_R = \dot{U}_L = \dot{U}_C;$$

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C,$$

$$\dot{I}_R = Y_R\dot{U}_R = \frac{U}{R}e^{j\psi_u} = I_R e^{j\psi_{i_R}},$$

$$\dot{I}_L = Y_L\dot{U}_L = \frac{\dot{I}}{j\omega L} = \frac{U}{\omega L}e^{j\left(\psi_u - \frac{\pi}{2}\right)} = I_L e^{j\psi_{i_L}},$$

$$\dot{I}_C = Y_C\dot{U}_C = j\omega C\dot{U} = \omega CUe^{j\left(\psi_u + \frac{\pi}{2}\right)} = I_C e^{j\psi_{i_C}}.$$

Тогда мгновенные значения тока в элементах цепи:

$$i_R(t) = \sqrt{2}\frac{U}{R}\cos(\omega t + \psi_u),$$

$$i_L(t) = \sqrt{2}\frac{U}{\omega L}\cos\left(\omega t + \psi_u - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$i_C(t) = \sqrt{2}U\omega C\cos\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right).$$

Общий ток в цепи:

$$\dot{I} = (Y_R + Y_L + Y_C)\dot{U} = \left(\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right) U e^{j\psi_u} =$$

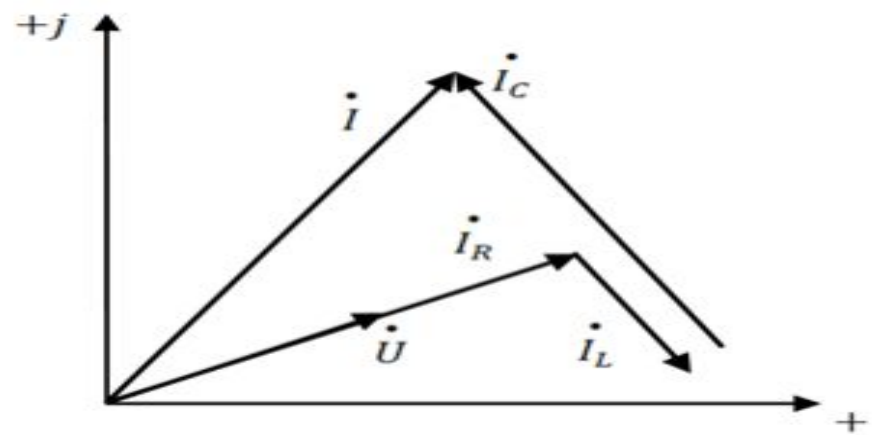
$$= U\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}\, e^{j\left(\psi_u + \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{1/R}\right)\right)} = I e^{j\psi_i},$$

$$i(t) = \sqrt{2}U\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}\cos\left(\omega t + \psi_u + \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{1/R}\right)\right). \qquad (39)$$

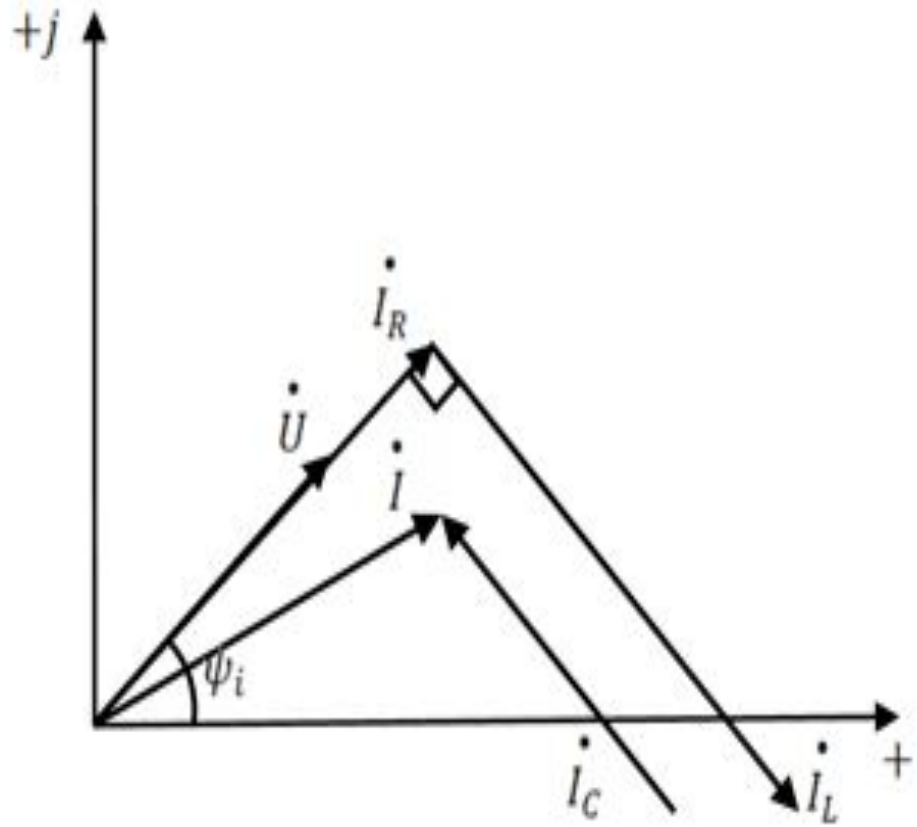
Рассмотрим векторную диаграмму токов и напряжений в цепи для двух случаев:

1. $\omega C > \frac{1}{\omega L}$ или $|\dot{I}_C| > |\dot{I}_L|$;
2. $\omega C < \frac{1}{\omega L}$ или $|\dot{I}_C| < |\dot{I}_L|$.

Диаграммы представлены на рис. 15. Видно, что в случае рис. 15а вектор тока по фазе опережает вектор напряжения, следовательно, цепь носит емкостной характер. В случае рис. 15б вектор напряжения опережает по фазе вектор тока, следовательно, цепь носит индуктивный характер.



а



б

Рисунок 15. Векторная диаграмма токов и напряжений при $\omega C > \frac{1}{\omega L}$ (а) и $\omega C < \frac{1}{\omega L}$ (б).