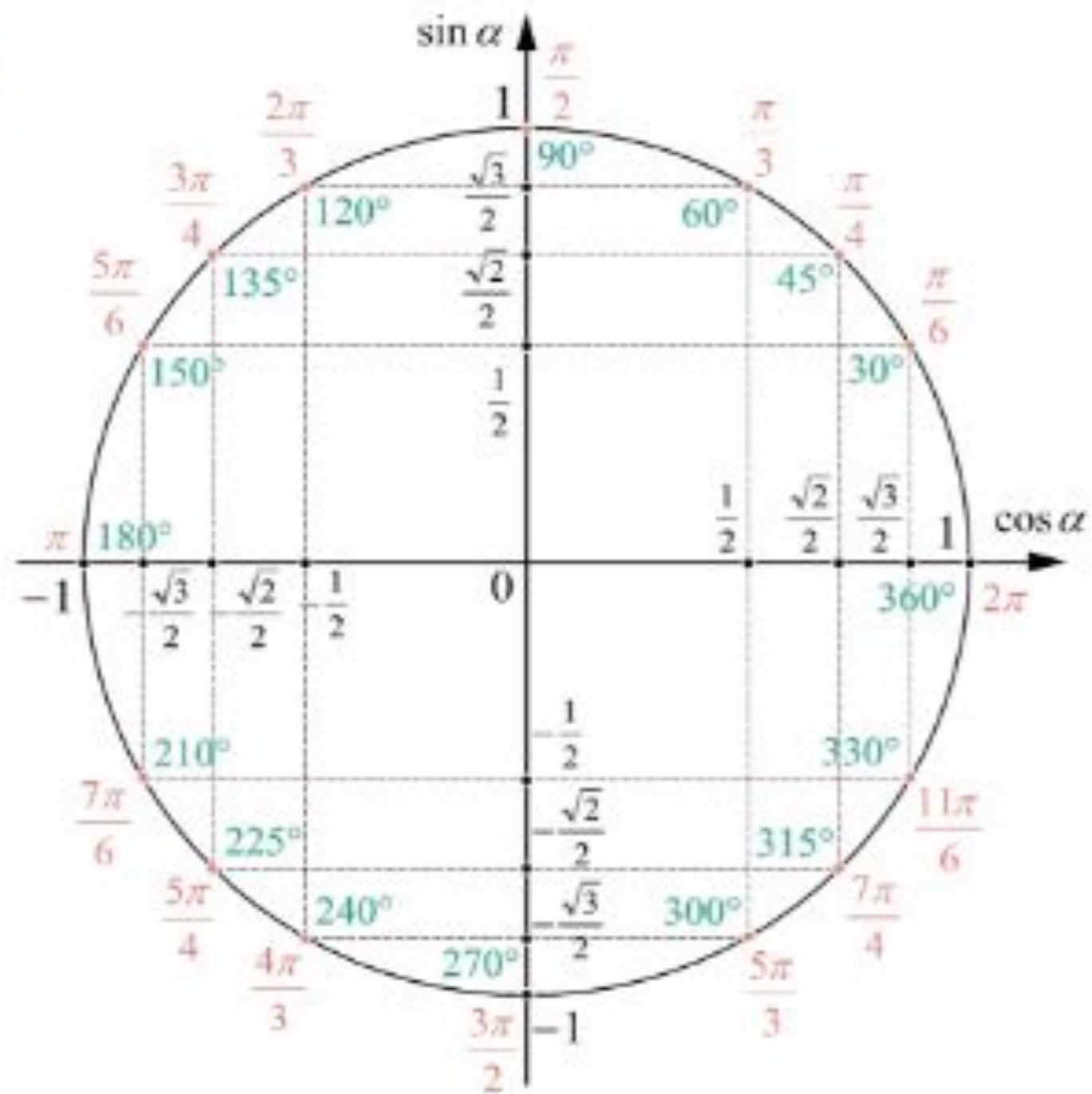


ЕГЭ. Математика
Задание №5
«Решение
простейших
Тригонометрически
х

Составитель: Коченкова Т.В. учитель
математики МБОУ «Средняя школа №2 г.
Навашино»

2017

ГОД



Вид уравнения	Общая формула решений
$\sin x = a, a \leq 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$ $n \in \mathbf{Z}$
$\cos x = a, a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n,$ $n \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} a + \pi n, n \in \mathbf{Z}$

1. Решения уравнения $\sin x = a$ ($-1 < a < 1$) можно записать совокупностью двух серий решений

$$x = \begin{cases} \arcsin a + 2\pi n, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{cases} n \in \mathbf{Z}.$$

2. Решения уравнения $\cos x = a$ ($-1 < a < 1$) можно записать совокупностью двух серий решений

$$x = \begin{cases} \arccos a + 2\pi n, \\ -\arccos a + 2\pi n, \end{cases} n \in \mathbf{Z}.$$

3. Решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ можно записать совокупностью двух серий

$$x = \begin{cases} \operatorname{arctg} a + 2\pi n, \\ \pi + \operatorname{arctg} a + 2\pi n, \end{cases} n \in \mathbf{Z}.$$

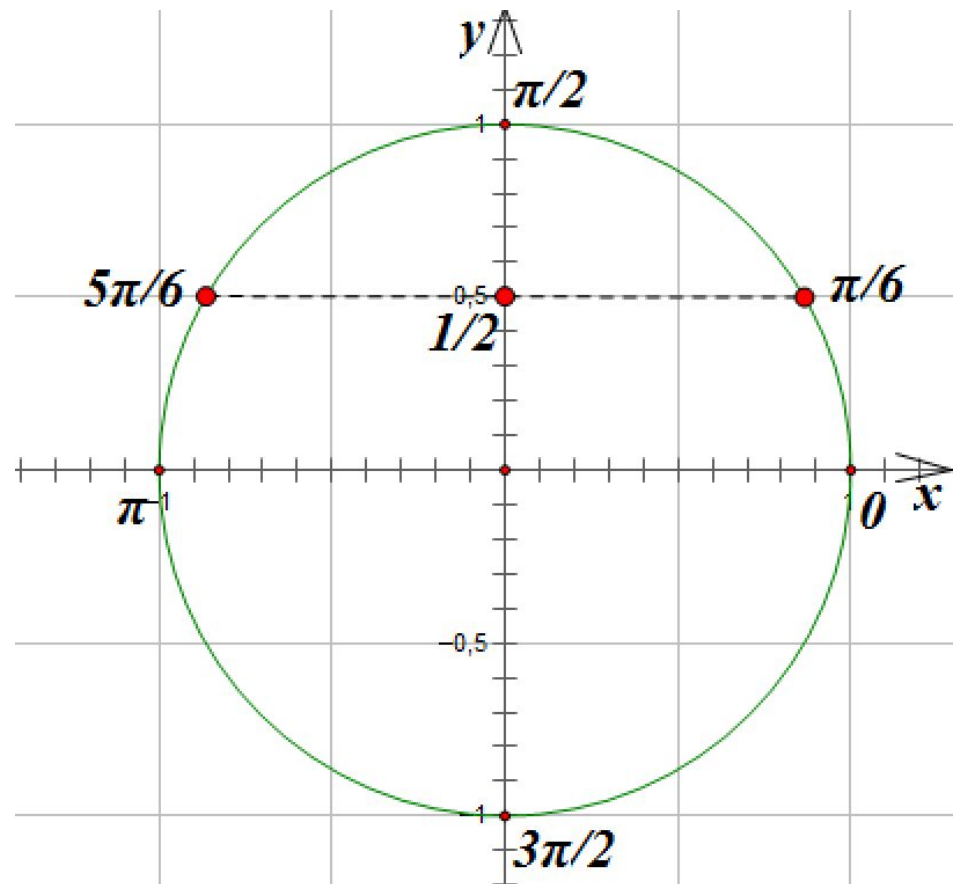
4. Решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ можно записать совокупностью двух серий

$$x = \begin{cases} \operatorname{arcc} \operatorname{tg} a + 2\pi n, \\ \pi + \operatorname{arcc} \operatorname{tg} a + 2\pi n, \end{cases} n \in \mathbf{Z}.$$

Решим уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z,$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \text{ где } k \in Z,$$



Эти две серии решений можно объединить в одну запись:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

Если мы в этой записи возьмем $n = 2k$ (то есть четное n), то мы получим первую серию решений.

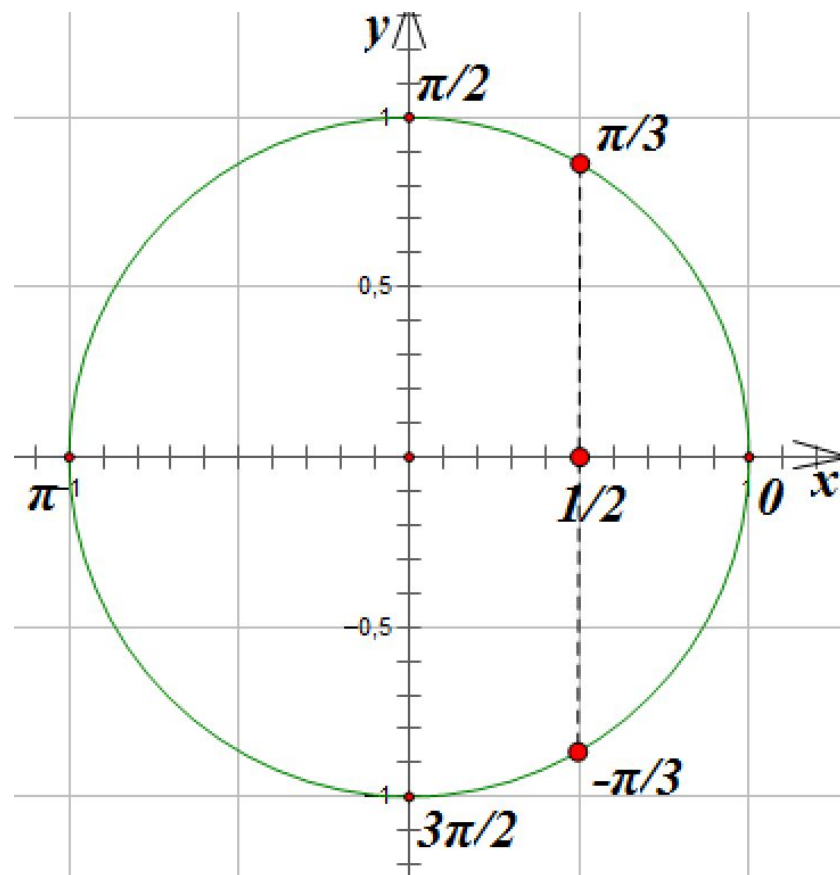
Если мы в этой записи возьмем $n = 2k + 1$ (то есть нечетное n), то мы получим вторую серию решений.

$$\text{уравнение } \cos x = \frac{1}{2}$$

Запишем две серии решений:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z$$

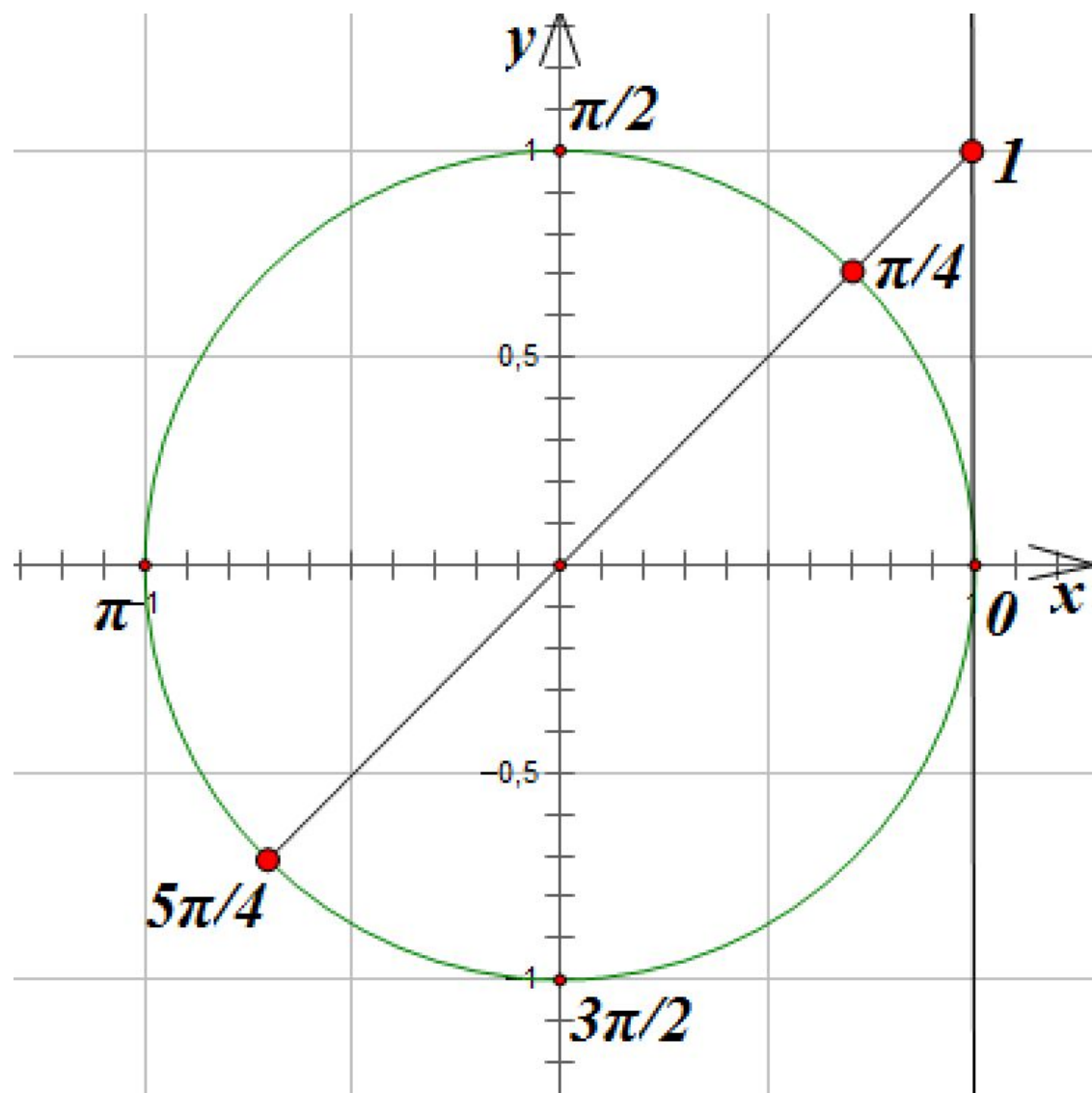


(Мы попадаем в нужную точку, пройдя из основной полный круг, то есть 2π .)

Объединим эти две серии в одну запись:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z$$

Решим уравнение $\operatorname{tg} x = 1$



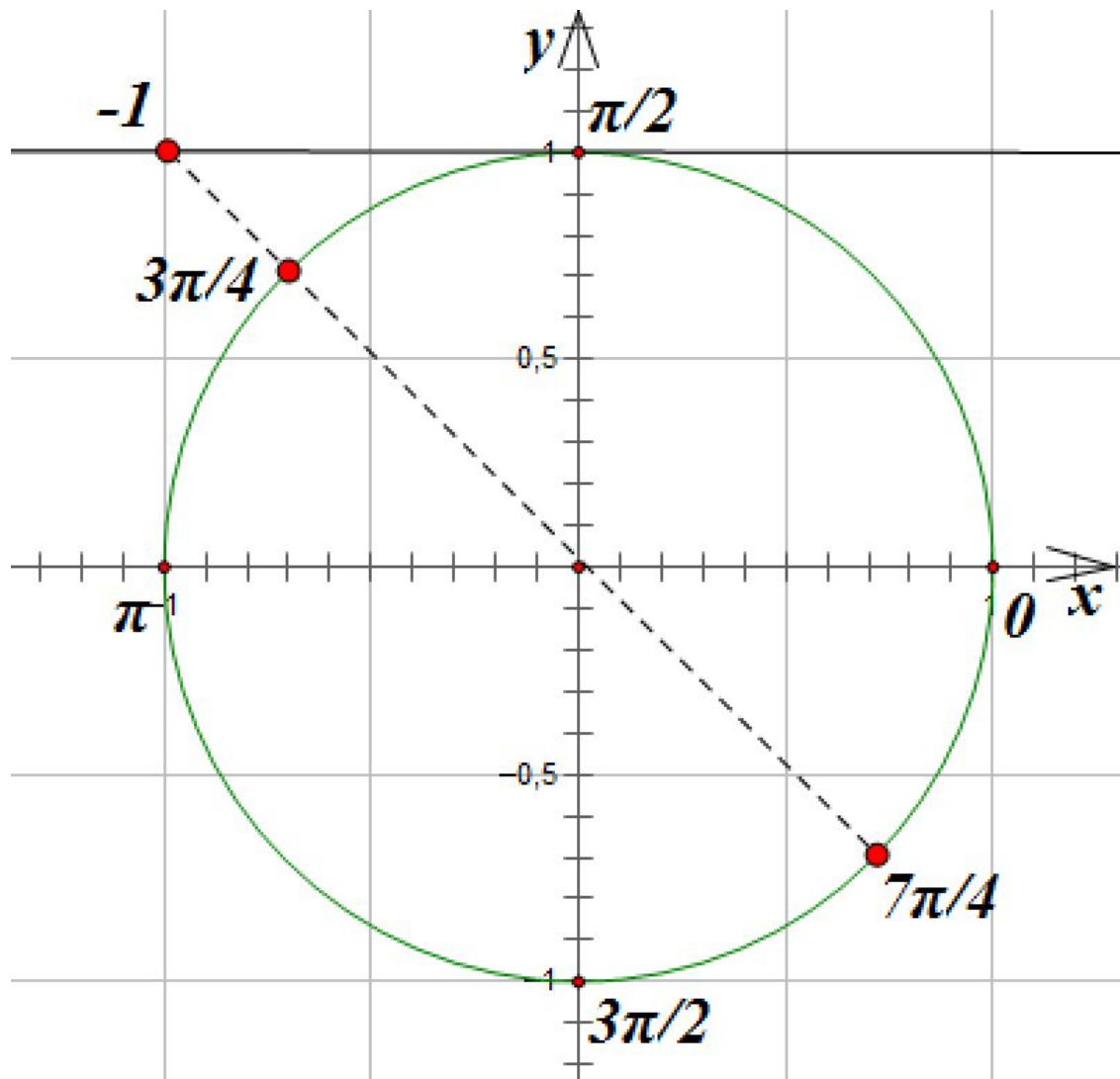
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

ИЛИ

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

Решим уравнение $ctgx = -1$



$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

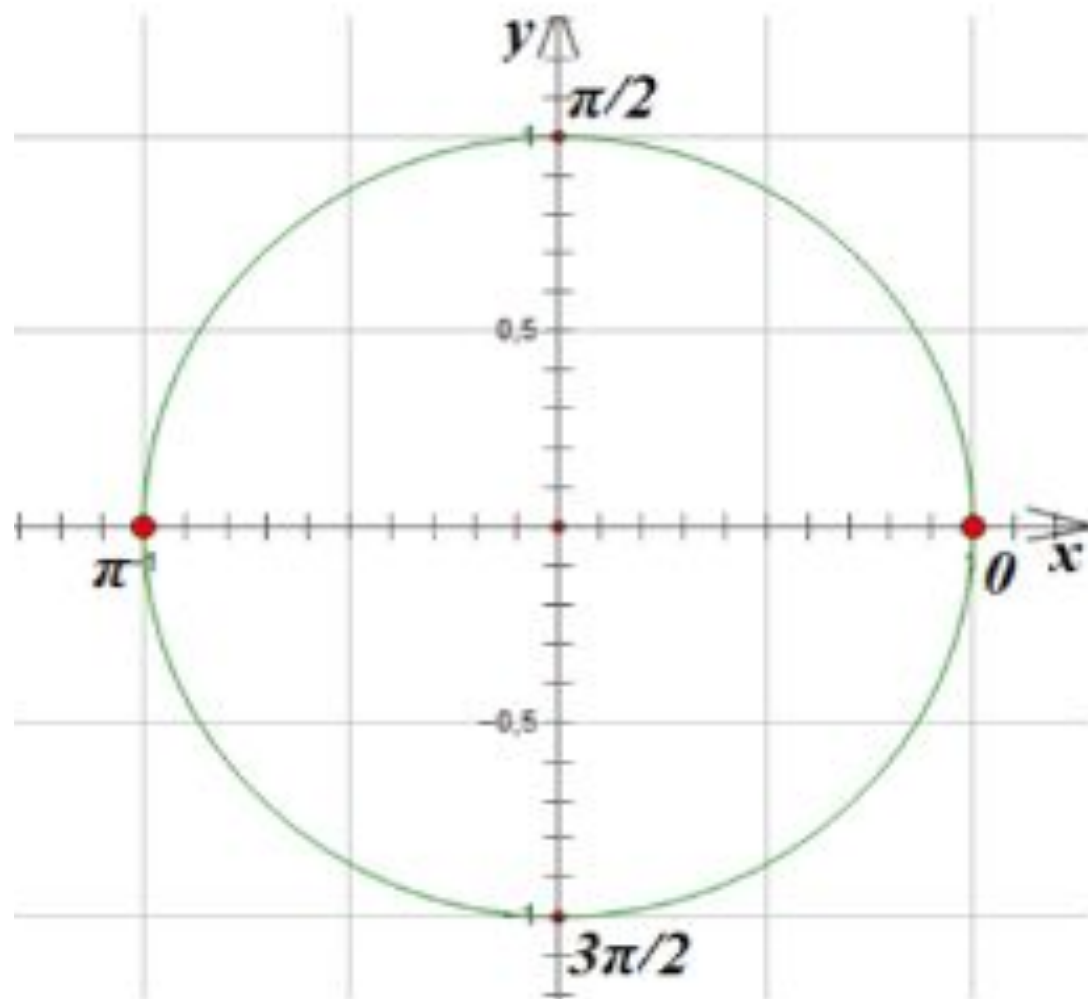
или

$$x_1 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\sin x = 0$$

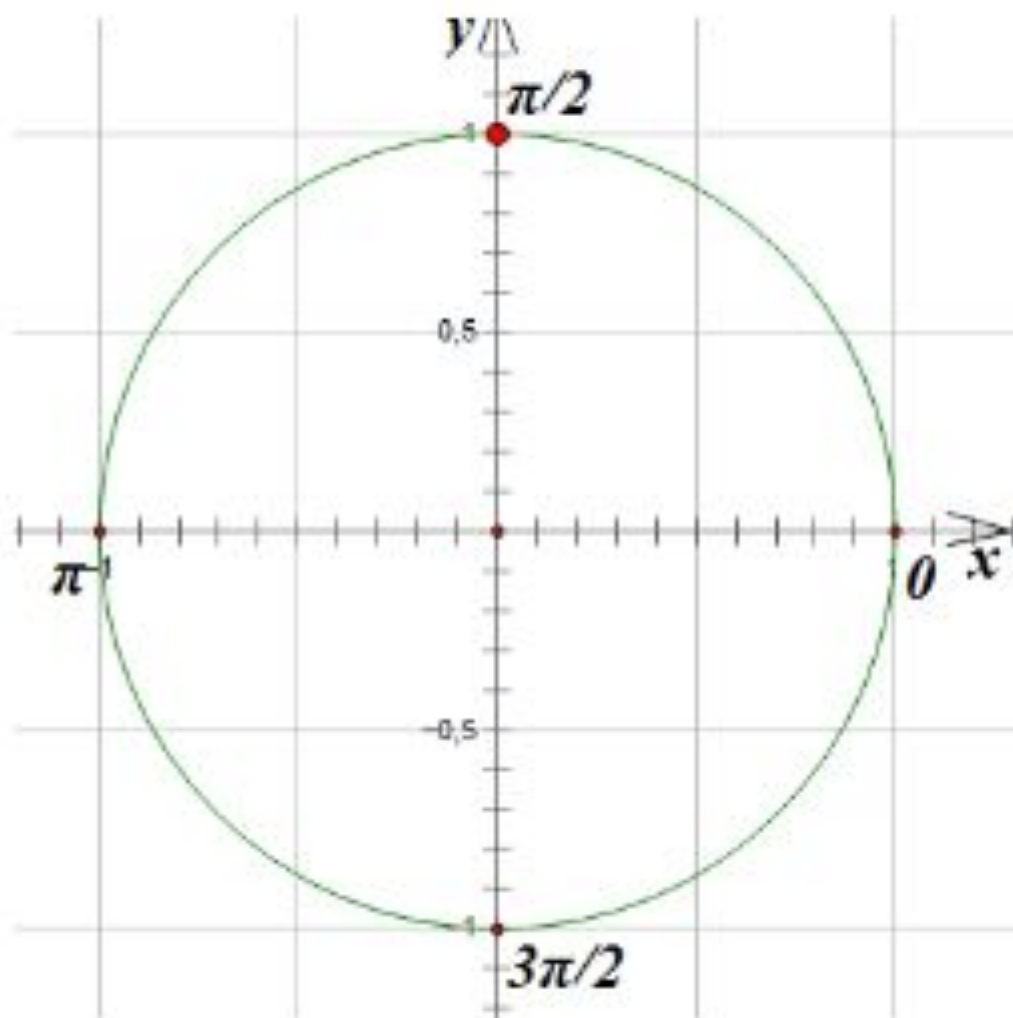
Отметим на окружности точки, ордината которых равна 0:



$$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 1$$

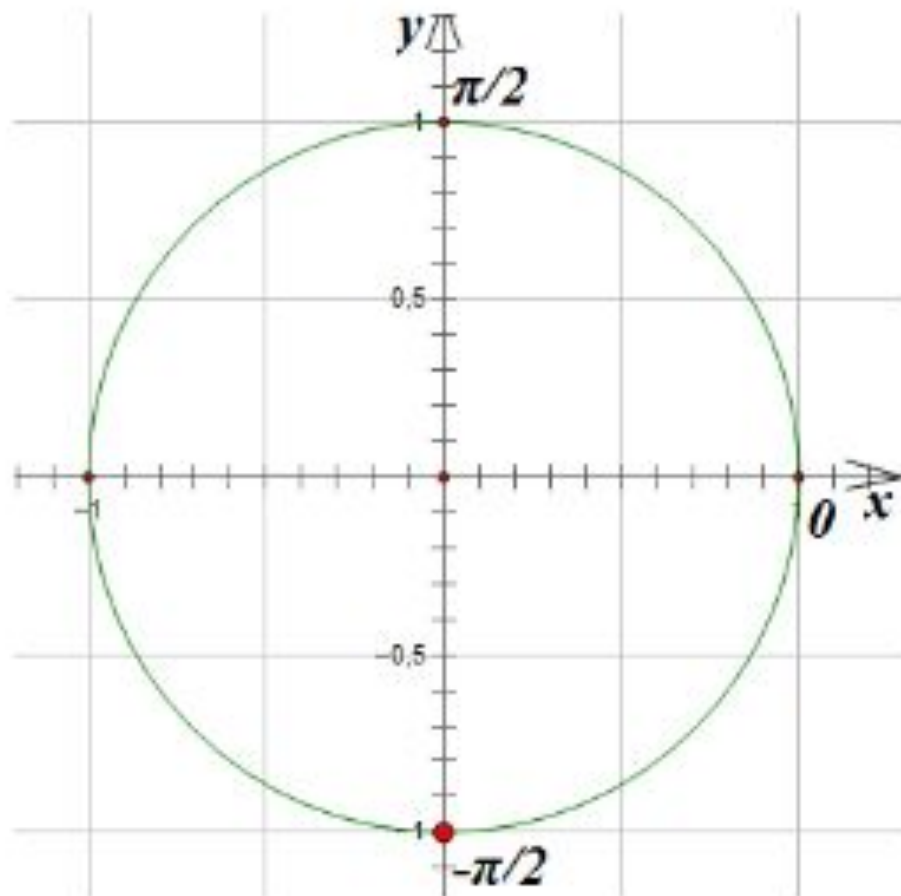
Отметим на окружности единственную точку, ордината которой равна 1:



$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -1$$

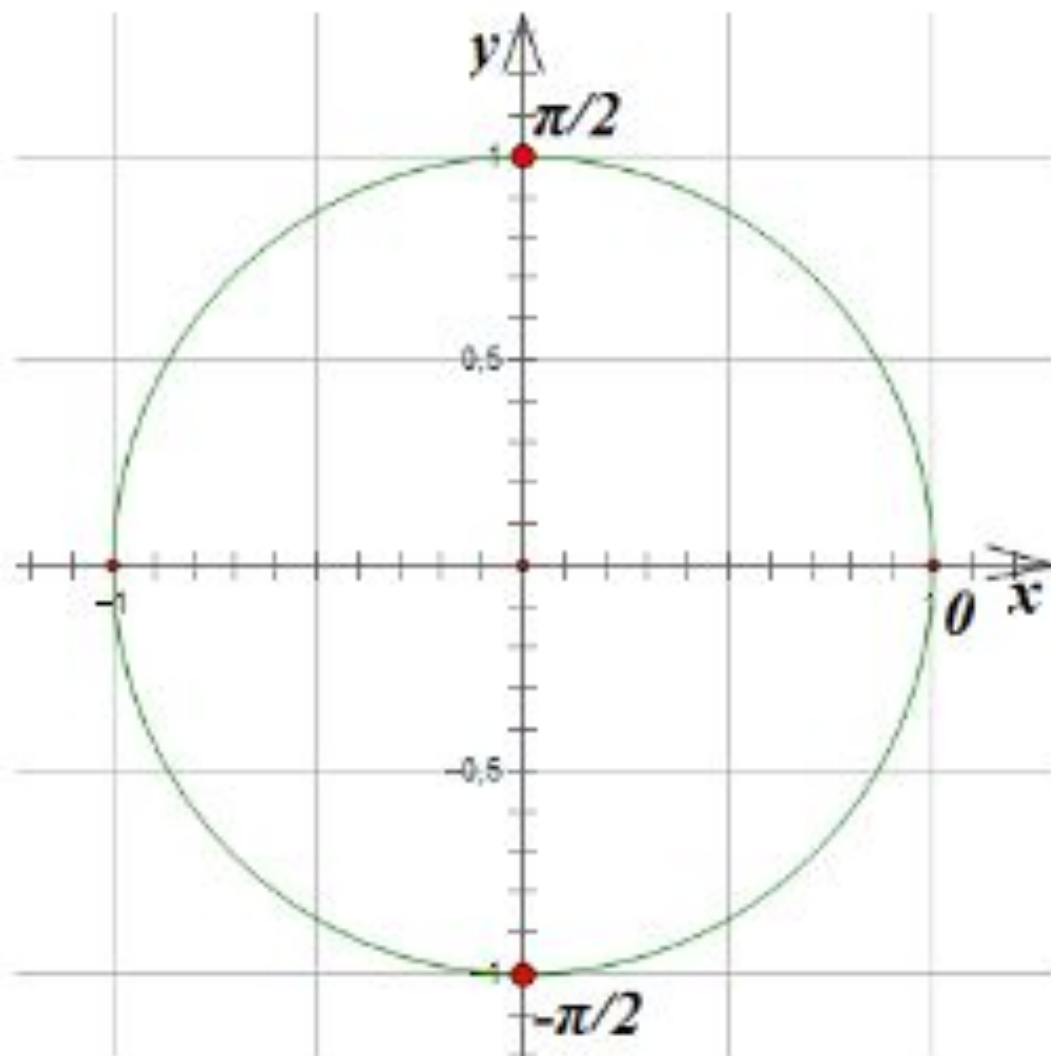
Отметим на окружности единственную точку, ордината которой равна -1:



Так как принято указывать значения, наиболее близкие у нулю, решение запишем так:
 $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\cos x = 0$$

Отметим на окружности точки, абсцисса которых равна 0:



$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

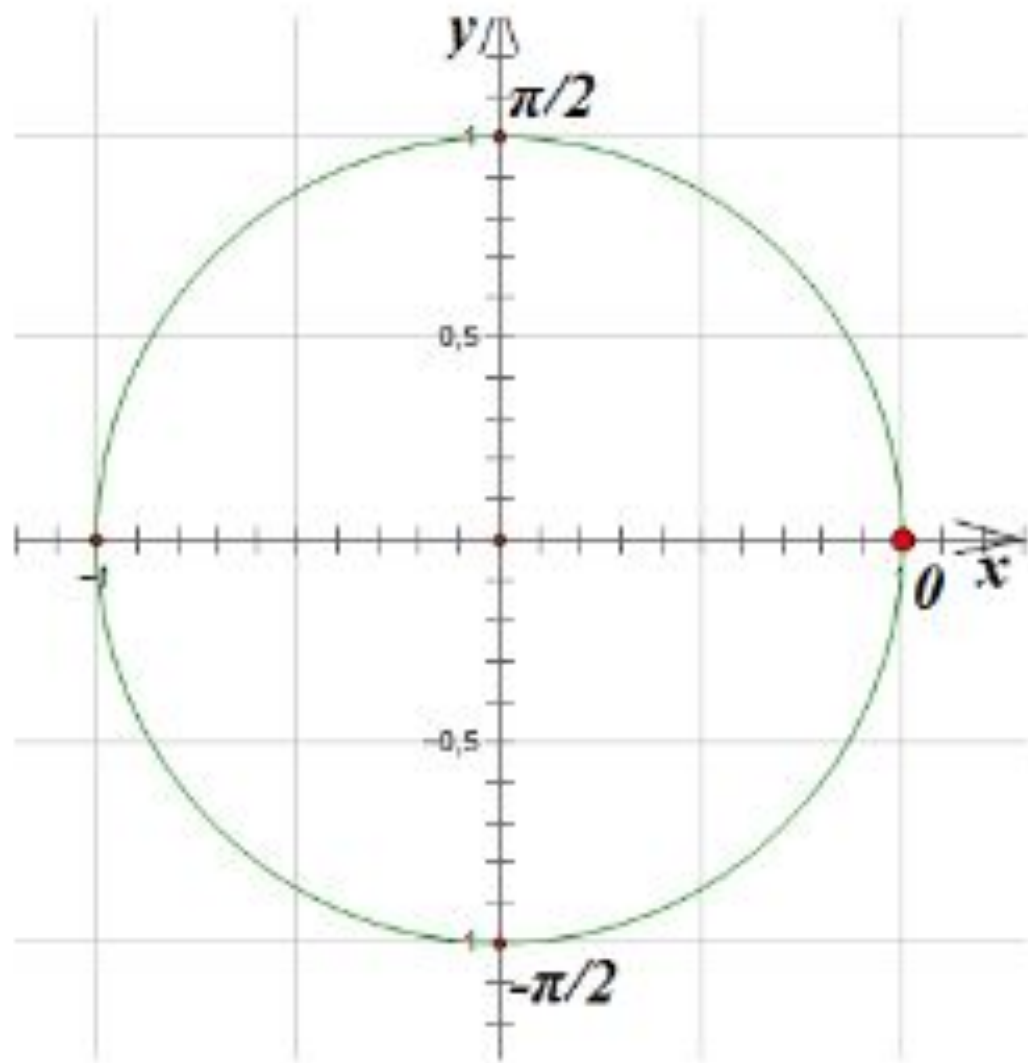
или

$$x_1 = +\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 1$$

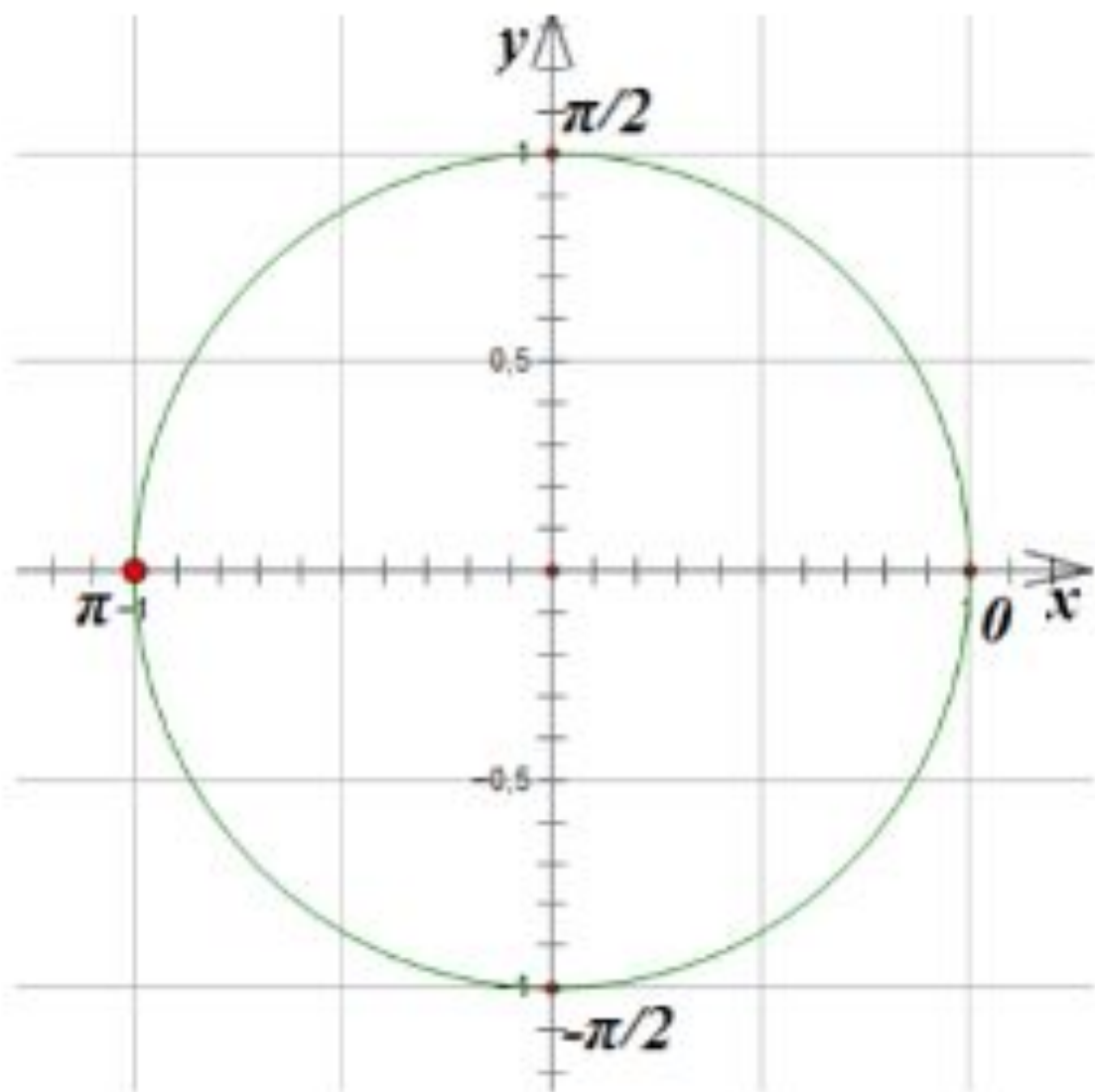
Отметим на окружности единственную точку, абсцисса которой равна 1:



$$x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1$$

Отметим на окружности единственную точку, абсцисса которой равна -1:



$$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$$

И чуть более сложные примеры:

$$\sin 3x = 1$$

Синус равен единице, если аргумент равен $\pi/2 + 2\pi k$, $k \in Z$

Аргумент у нашего синуса равен $3x$, поэтому получим:

$3x = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in Z$. Разделим обе части равенства на 3:

$$x = \pi/6 + 2\pi k/3, k \in Z$$

Ответ: $x = \pi/6 + 2\pi k/3, k \in Z$

$$\cos(\pi/3 - 2x) = 0$$

Косинус равен нулю, если аргумент косинуса равен $\pi/2 + \pi k$, $k \in Z$

Аргумент у нашего косинуса равен $\pi/3 - 2x$, поэтому получим:

$$\frac{\pi}{3} - 2x = \pi/2 + \pi k, \quad k \in Z$$

Выразим x , для этого сначала перенесем $\pi/3$ вправо с противоположным знаком:

$$-2x = -\pi/3 + \pi/2 + \pi k, \quad k \in Z$$

Упростим правую часть:

$$-2x = \pi/6 + \pi k, \quad k \in Z$$

Разделим обе части на -2:

$$x = -\pi/12 + \pi k/2, \quad k \in Z$$

Заметим, что перед слагаемым $\pi k/2$ знак не меняется, поскольку k может принимать любые целые значения.

Ответ: $x = -\pi/12 + \pi k/2, \quad k \in Z$

Для самостоятельного
решения

$\sin\left(8x + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{1}{3}$	$\sin(x - 2) = \frac{\sqrt{2}}{2};$	$\sin 3x = 1$	$\cos 2x = 1$
$\cos\left(3x - \frac{\pi}{13}\right) = 0,2$	$\cos \frac{7}{x} = 0$	$\operatorname{tg} 2x = 100$	$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3}$
$\operatorname{tg} \frac{x}{\pi} = 1$	$\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{x} = -\sqrt{3}$	$\operatorname{ctg} 2x = 0,7$	$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin \frac{14}{5}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin \frac{3\pi}{x+1} = \frac{1}{2}$	$\sin \frac{5\pi}{x^2} = -1$	$\sin \frac{8\pi}{\sqrt{x}} = 1$
$\sin \sqrt{\frac{\pi}{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin(7 - 3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 2x = \frac{1}{2}$	$\cos \frac{3}{5}x = -\frac{1}{2}$
$\cos \frac{3\pi}{x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{tg} \frac{x}{3} = \sqrt{3}$	$3 \cos^2 x - \cos x - 2 = 0$	$2 \cos^2 x - \sin x + 1 = 0.$
$3 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} x = 8$	$4 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$	$5 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 4$	$\cos 2x - 7 \cos x + 1 = 0$

ИСТОЧНИК

1. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней