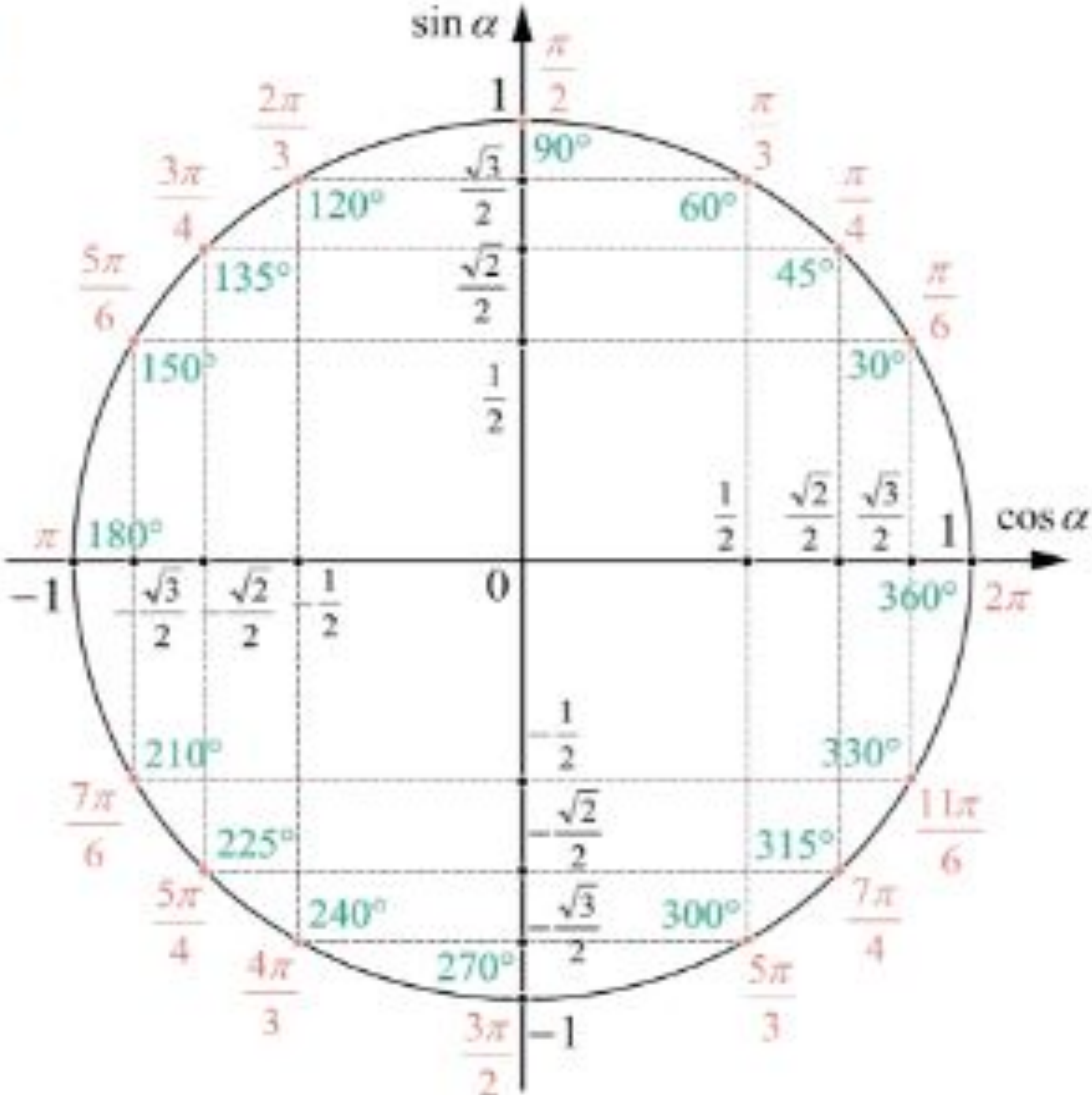
ЕГЭ. Математика
Задание №5
«Решение простейших Тригонометрических уравнений»

Составитель: Коченкова Т.В. учитель математики МБОУ «Средняя школа №2 г. Навашино»

2017 год



sin α
cos α
0
1
−1
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
0°
30°
45°
60°
90°
120°
135°
150°
180°
210°
225°
240°
270°
300°
315°
330°
360°
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
π
$\frac{7\pi}{6}$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{3}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{11\pi}{6}$
2π

Вид уравнения	Общая формула решений
$\sin x = a$, $\lvert a \rvert \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$ $n \in \mathbf{Z}$
$\cos x = a$, $\lvert a \rvert \le 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n,$ $n \in \mathbf{Z}$
$\mathrm{tg} x = a$	$x = \mathrm{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$
$\mathrm{ctg} x = a$	$x = \mathrm{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

1. Решения уравнения $\sin x = a$ $(-1 < a < 1)$ можно записать совокупностью двух серий решений

$$x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi n, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{array} \right. n \in \mathbf{Z}.$$

2. Решения уравнения $\cos x = a$ $(-1 < a < 1)$ можно записать совокупностью двух серий решений

$$x = \left[\begin{array}{l} \arccos a + 2\pi n, \\ -\arccos a + 2\pi n, \end{array} \right. n \in \mathbf{Z}.$$

3. Решения уравнения $\mathrm{tg} x = a$ можно записать совокупностью двух серий

$$x = \left[\begin{array}{l} \mathrm{arctg} a + 2\pi n, \\ \pi + \mathrm{arctg} a + 2\pi n, \end{array} \right. n \in \mathbf{Z}.$$

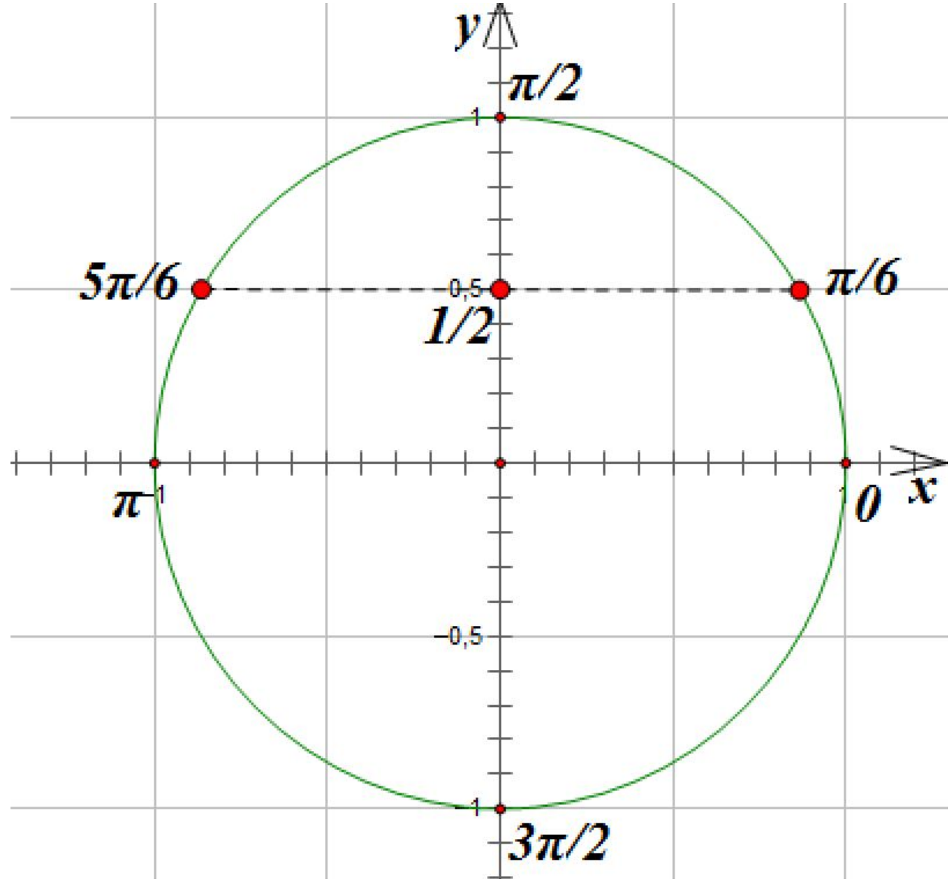
4. Решения уравнения $\mathrm{ctg} x = a$ можно записать совокупностью двух серий

$$x = \left[\begin{array}{l} \mathrm{arcctg} a + 2\pi n, \\ \pi + \mathrm{arcctg} a + 2\pi n, \end{array} \right. n \in \mathbf{Z}.$$

Решим уравнение $sinx = \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z,$

$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in Z,$



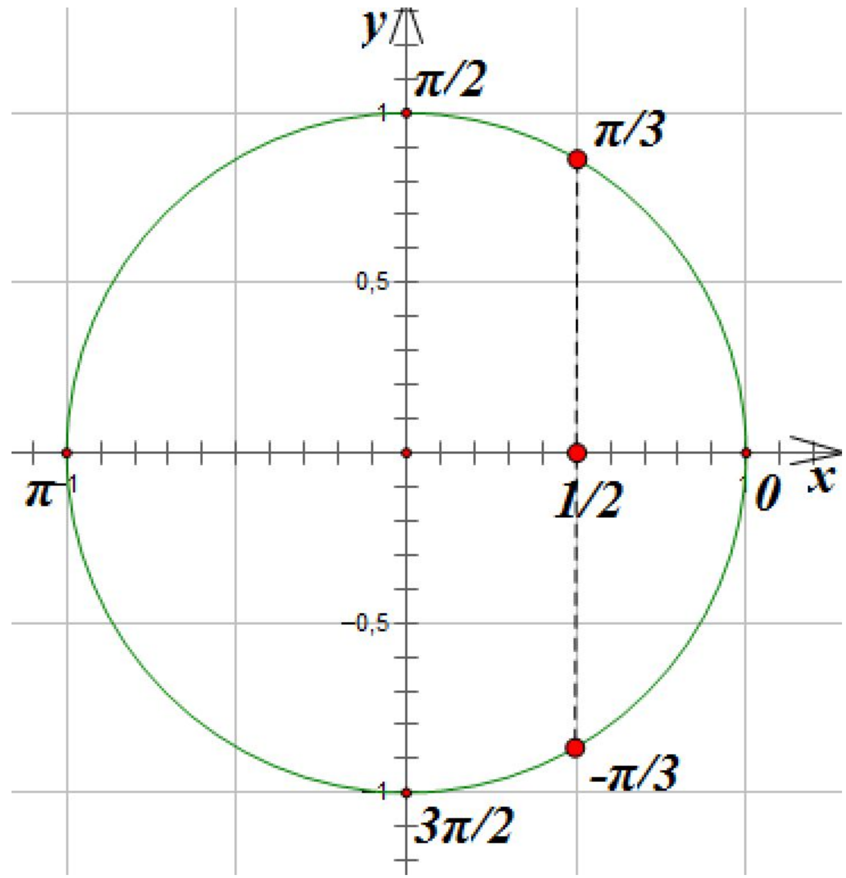
Эти две серии решений можно объединить в одну запись:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$$

Если мы в этой записи возьмем $n = 2k$ (то есть четное n), то мы получим первую серию решений.

Если мы в этой записи возьмем $n = 2k + 1$ (то есть нечетное n), то мы получим вторую серию решений.

уравнение $cos x = \frac{1}{2}$



Запишем две серии решений:

$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$

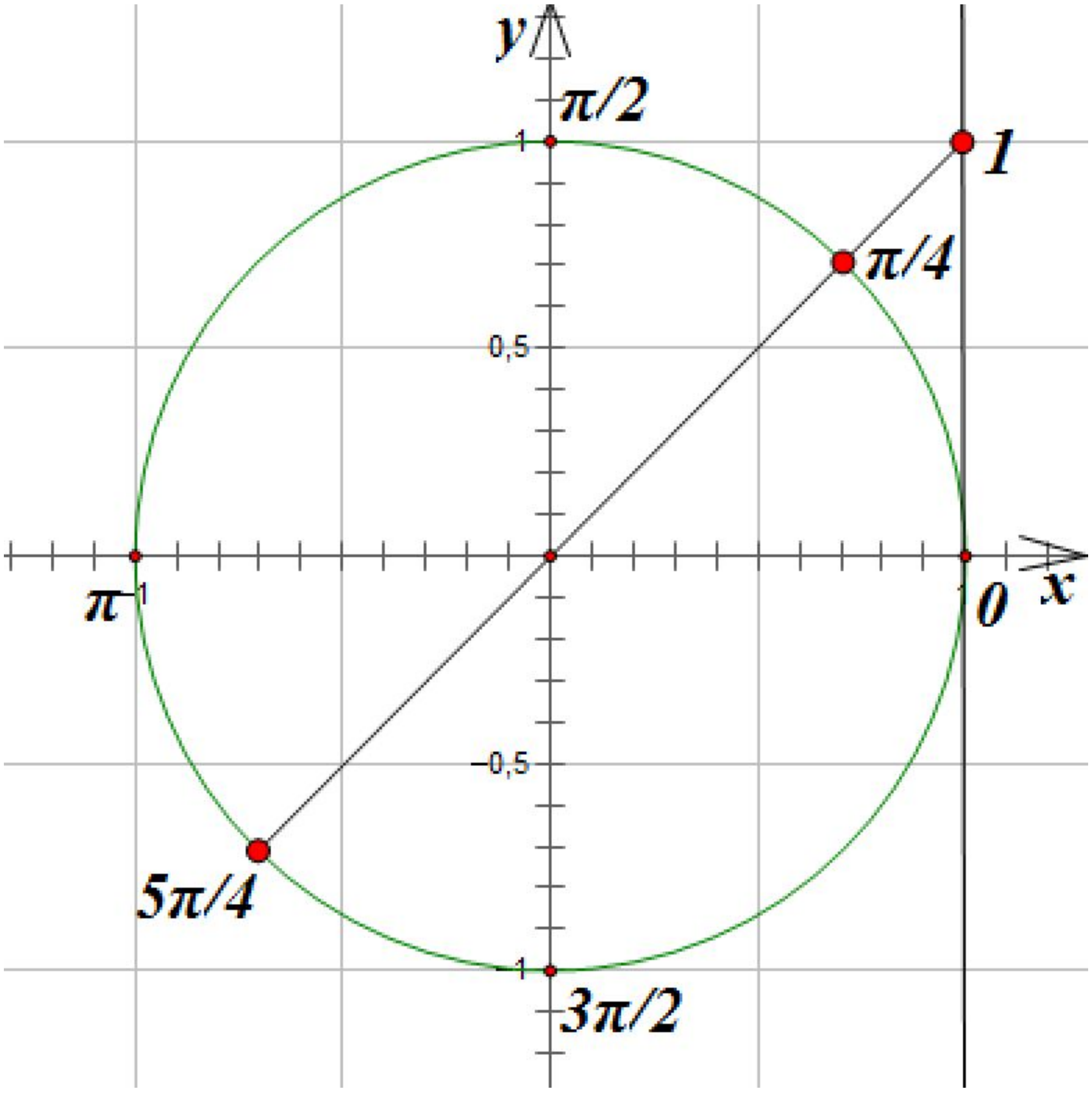
$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$

(Мы попадаем в нужную точку, пройдя из основной полный круг, то есть 2π.

Объедим эти две серии в одну запись:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$$

Решим уравнение $tgx = 1$



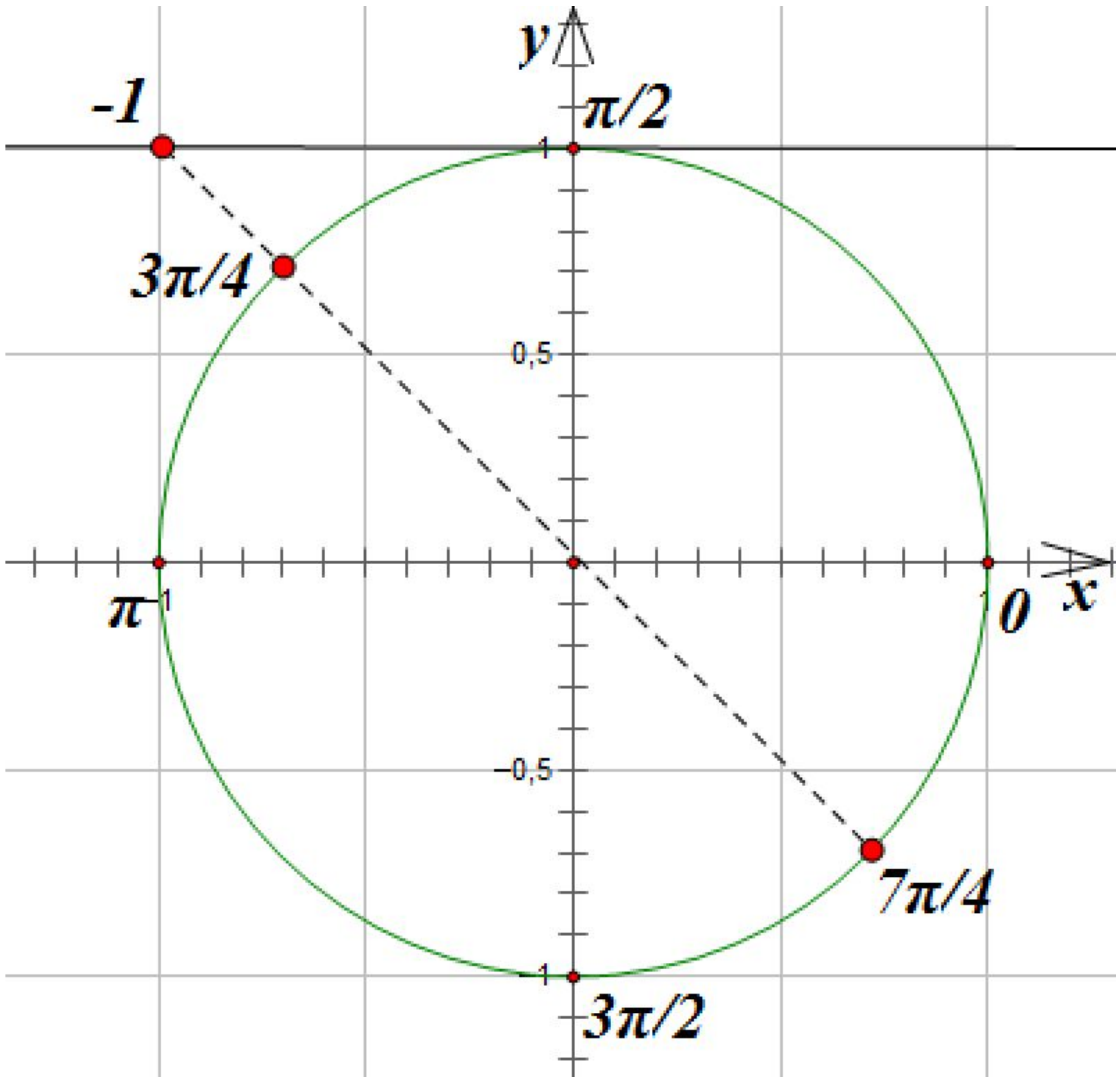
$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

или

$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$

$x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$

Решим уравнение $ctgx = -1$



$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$$

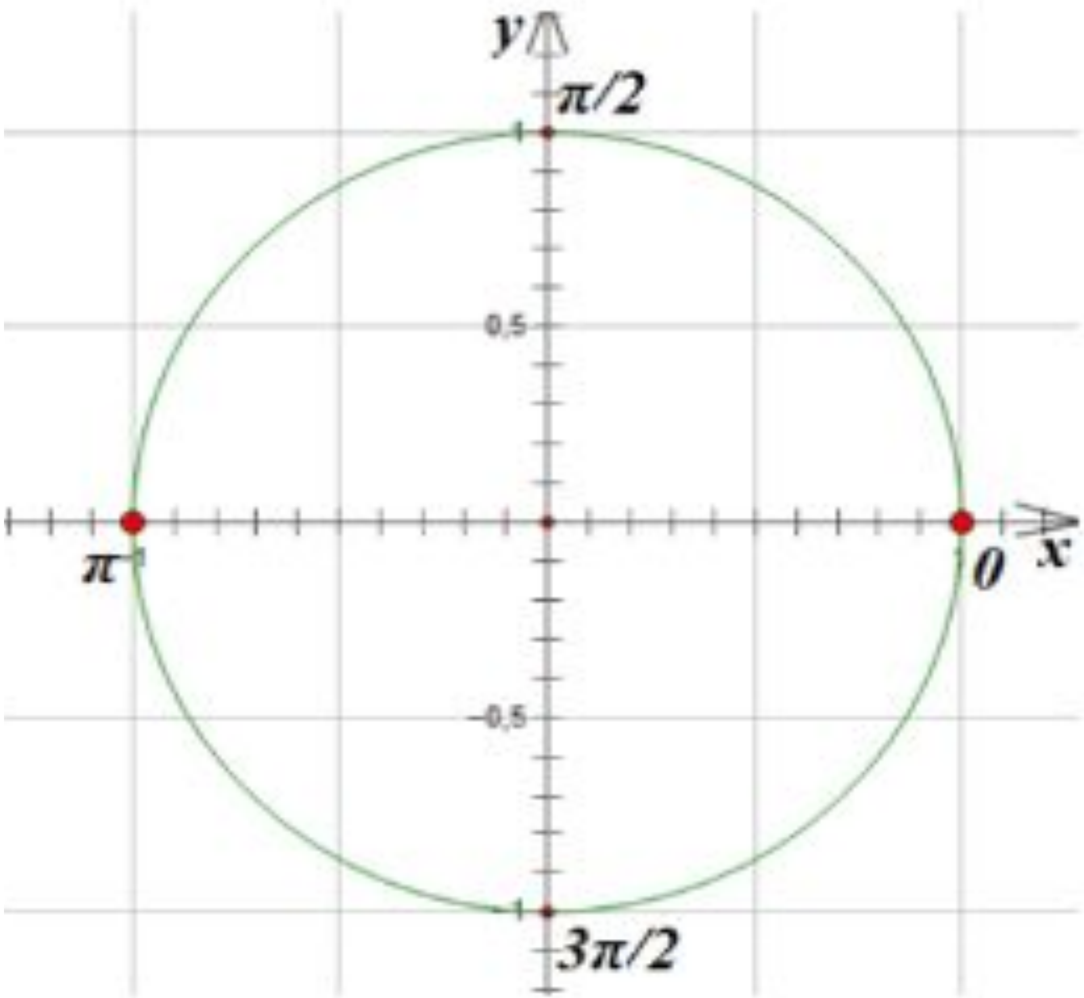
или

$$x_1 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$x_2 = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$\boxed{sinx = 0}$$

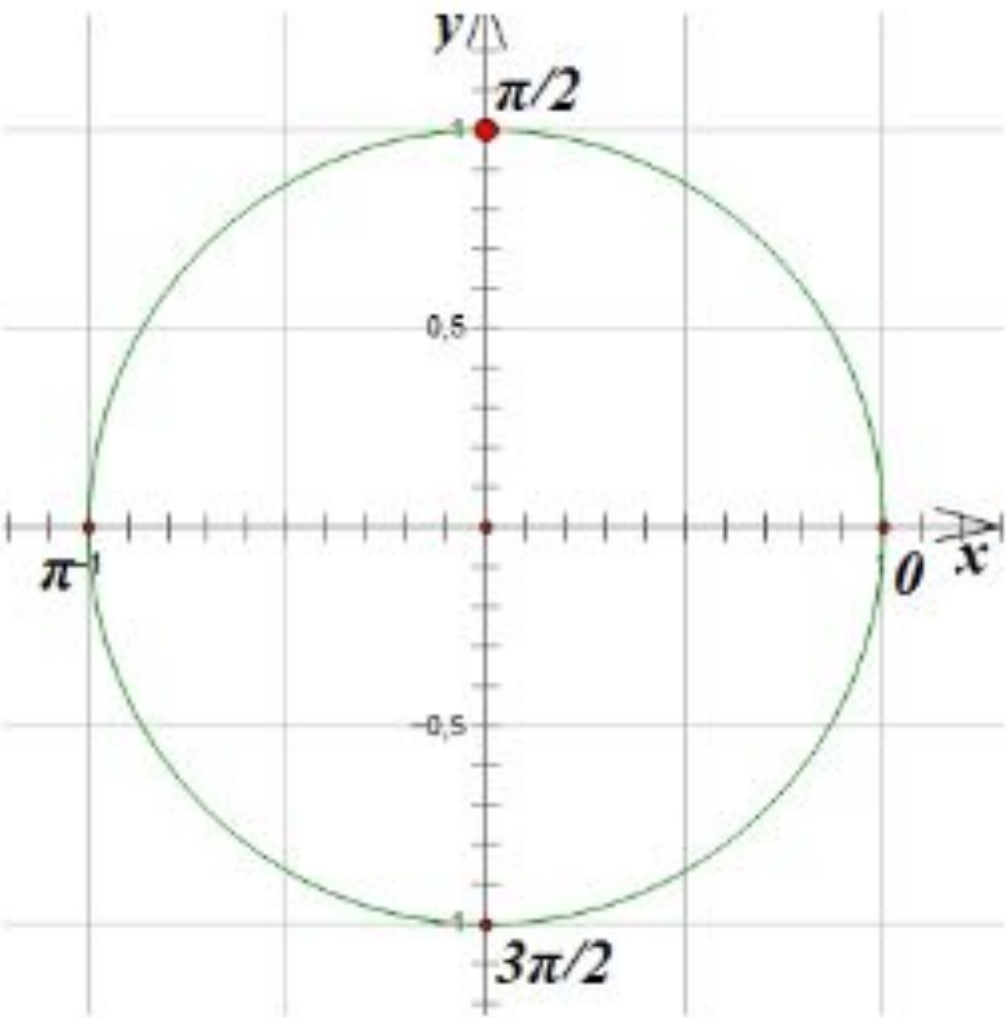
Отметим на окружности точки, ордината которых равна 0:



$$x = \pi n,\ n \in Z$$

$$\boxed{sinx = 1}$$

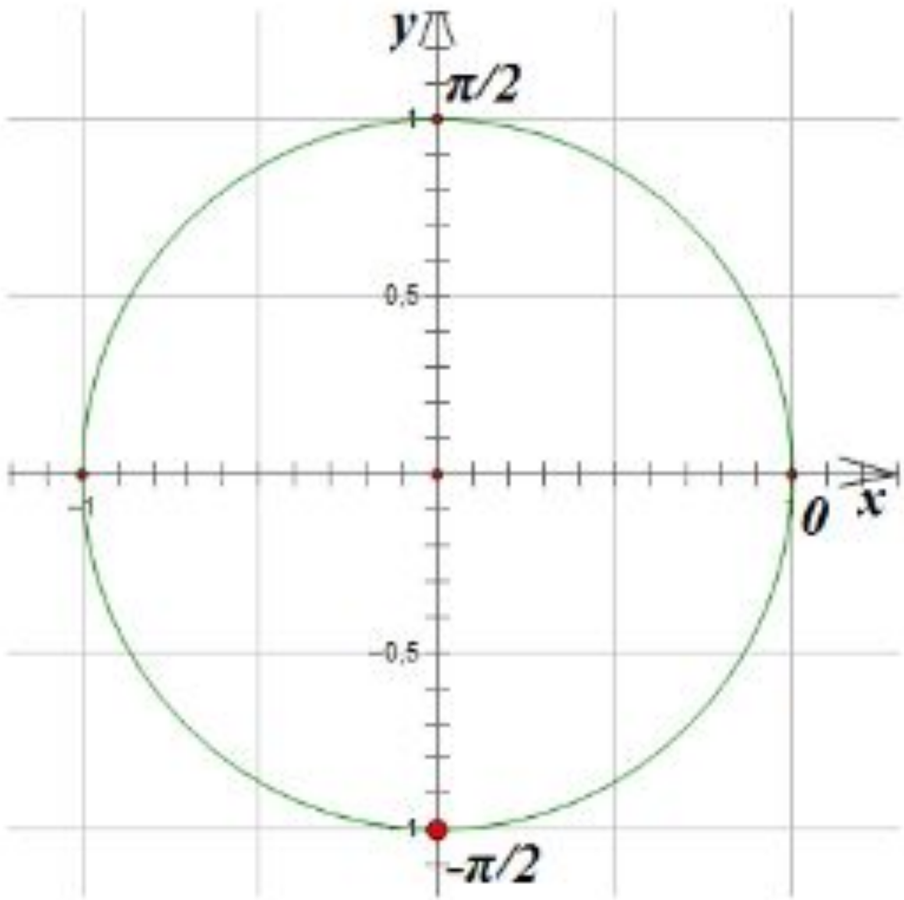
Отметим на окружности единственную точку, ордината которой равна 1:



$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$$

$\boxed{sinx = -1}$

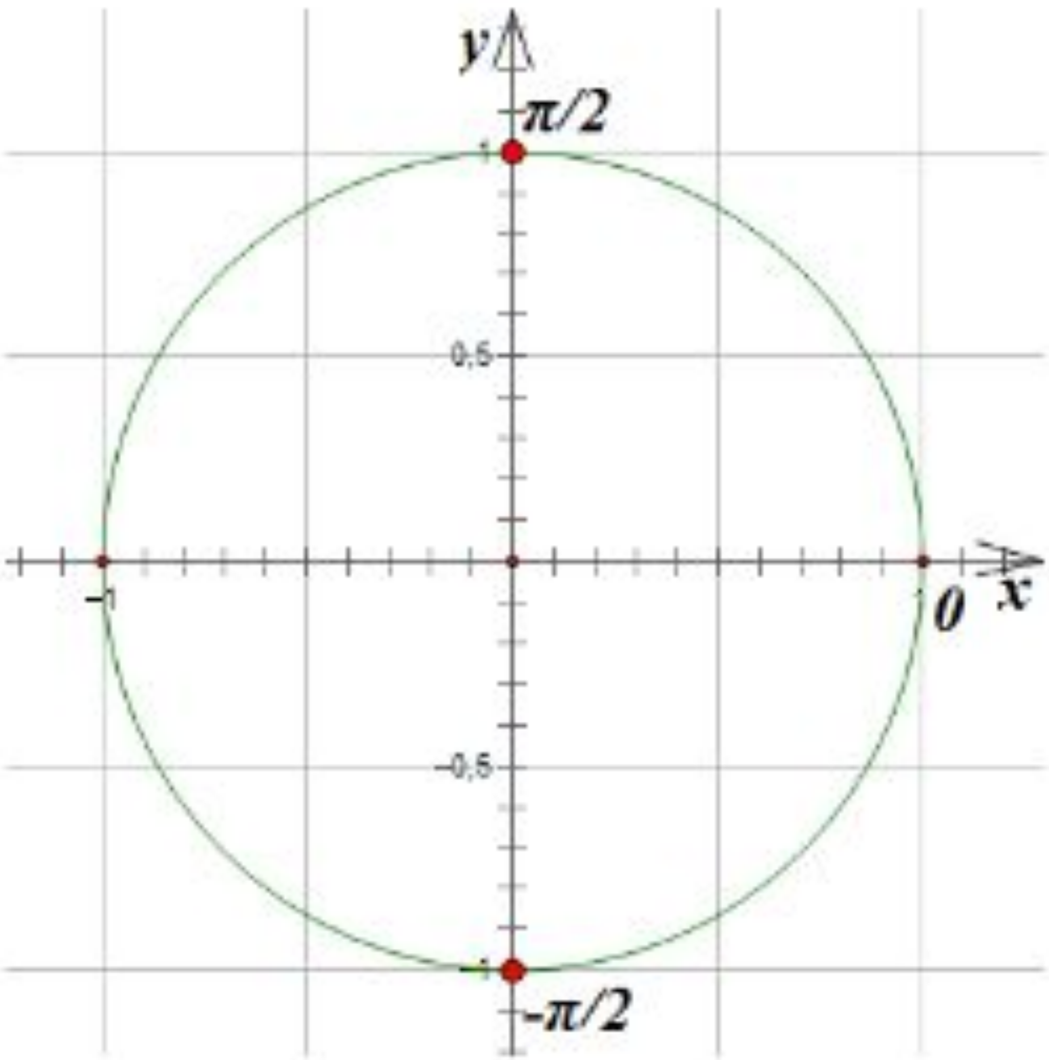
Отметим на окружности единственную точку, ордината которой равна -1:



Так как принято указывать значения, наиболее близкие у нулю, решение запишем так:
$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

$$\boxed{\cos x = 0}$$

Отметим на окружности точки, абсцисса которых равна 0:



$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

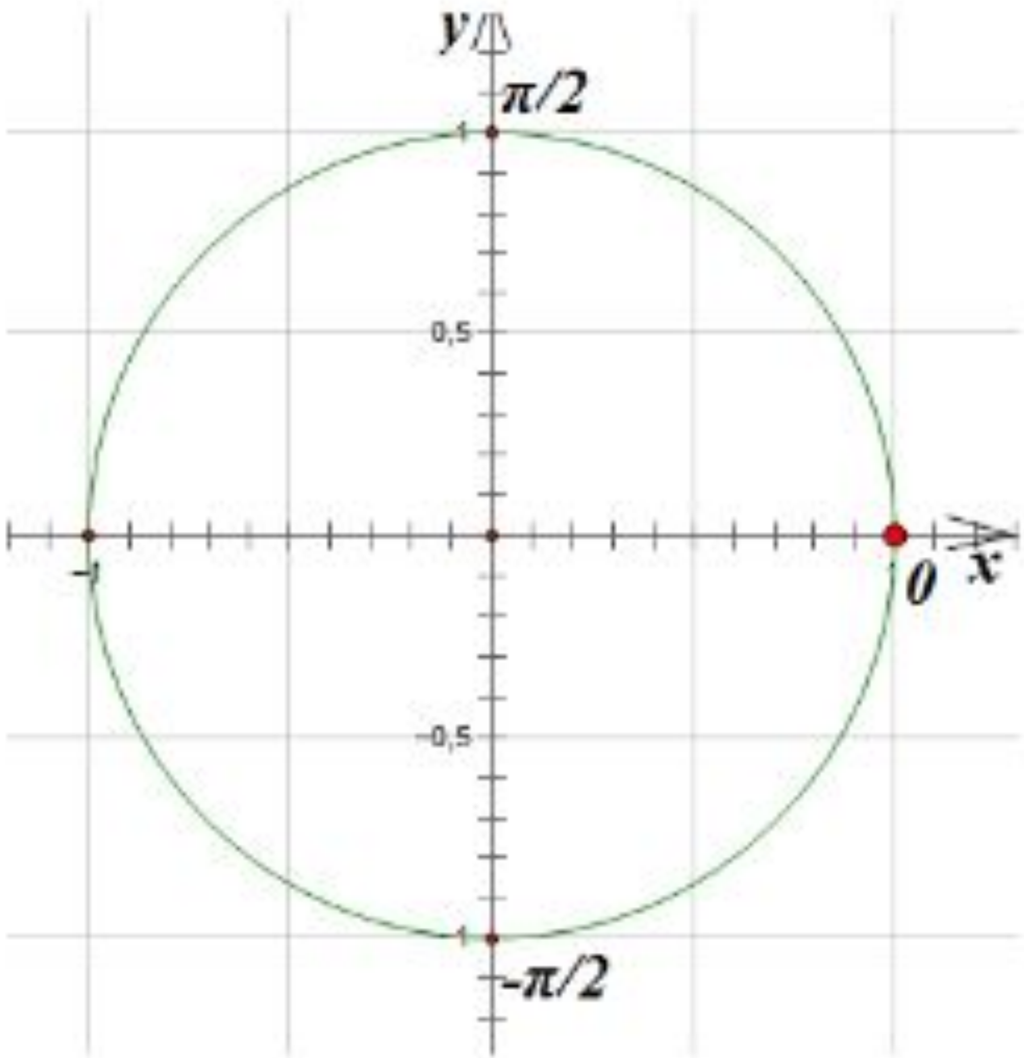
или

$$x_1 = +\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$\boxed{cos x = 1}$$

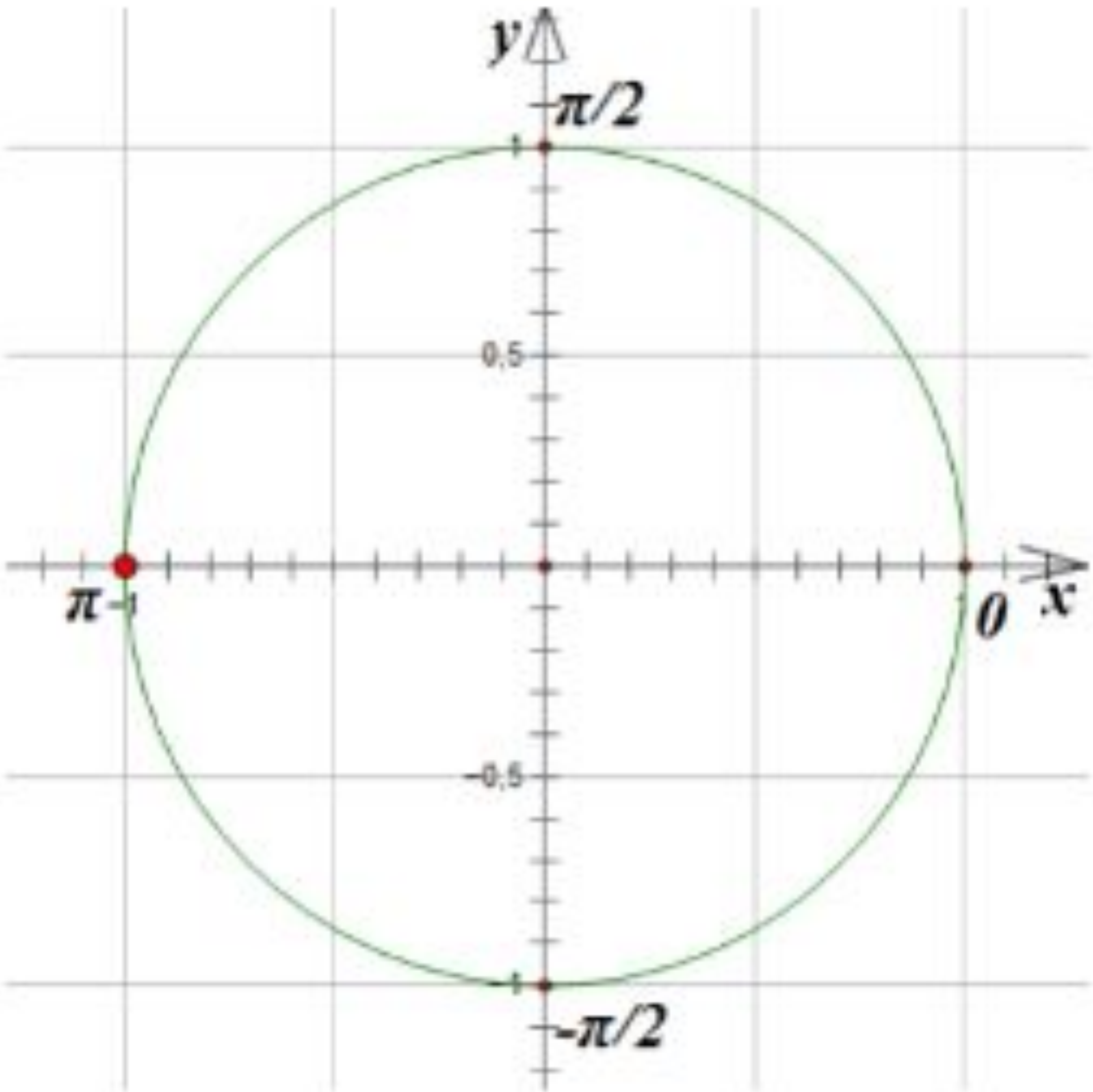
Отметим на окружности единственную точку, абсцисса которой равна 1:



$$x = 2\pi n,\ n \in Z$$

$$\boxed{cos x = -1}$$

Отметим на окружности единственную точку, абсцисса которой равна -1:



$$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$$

И чуть более сложные примеры:

$$sin3x = 1$$

Синус равен единице, если аргумент равен $\pi/2 + 2\pi k,\ k \in Z$

Аргумент у нашего синуса равен $3x$, поэтому получим:

$3x = \pi/2 + 2\pi k,\ k \in Z$. Разделим обе части равенства на 3:

$x = \pi/6 + 2\pi k/3,\ k \in Z$

Ответ: $x = \pi/6 + 2\pi k/3,\ k \in Z$

$$\boxed{cos(\pi/3 - 2x) = 0}$$

Косинус равен нулю, если аргумент косинуса равен $\pi/2 + \pi k,\ \ k \in Z$

Аргумент у нашего косинуса равен $\pi/3 - 2x$, поэтому получим:

$$\frac{\pi}{3} - 2x = \pi/2 + \pi k, \quad k \in Z$$

Выразим x, для этого сначала перенесем $\pi/3$ вправо с противоположным знаком:

$$-2x = -\pi/3 + \pi/2 + \pi k,\ \ k \in Z$$

Упростим правую часть:

$$-2x = \pi/6 + \pi k,\ \ k \in Z$$

Разделим обе части на -2:

$$x = -\pi/12 + \pi k/2,\ \ k \in Z$$

Заметим, что перед слагаемым $\pi k/2$ знак не меняется, поскольку k может принимать любые целые значения.

Ответ: $x = -\pi/12 + \pi k/2,\ \ k \in Z$

Для самостоятельного решения

$\sin\left(8x+\frac{\pi}{7}\right)=\frac{1}{3}.$	$\sin(x-2)=\frac{\sqrt{2}}{2};$	$\sin 3x = 1$	$\cos 2x = 1$
$\cos\left(3x-\frac{\pi}{13}\right)=0,2$	$\cos\frac{7}{x}=0$	$\operatorname{tg} 2x = 100$	$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3}$
$\operatorname{tg}\frac{x}{\pi}=1$	$\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{x}=-\sqrt{3}$	$\operatorname{ctg} 2x = 0,7$	$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\sqrt{x}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin\frac{14}{5}x=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\frac{3\pi}{x+1}=\frac{1}{2}$	$\sin\frac{5\pi}{x^2}=-1$	$\sin\frac{8\pi}{\sqrt{x}}=1$
$\sin\sqrt{\frac{\pi}{x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin(7-3x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 2x=\frac{1}{2}$	$\cos\frac{3}{5}x=-\frac{1}{2}$
$\cos\frac{3\pi}{x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{tg}\frac{x}{3}=\sqrt{3}$	$3\cos^2 x-\cos x-2=0$	$2\cos^2 x-\sin x+1=0.$
$3\operatorname{tg} x+5\operatorname{ctg} x=8$	$4\sin^2 x-\cos x-1=0$	$5\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x=4$	$\cos 2x-7\cos x+1=0$

Источники

1. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней